磁気浮上型多自由度位置決め装置の機構と制御*

岩 城 敏** 松 田 隆 一**

Mechanism and Control of Magnetically Suspended Multiple Degree-of-freedom Positioners

Satoshi IWAKI and Ryuichi MATSUDA

Mechanism and control design of magnetically suspended multiple degree-of-freedom (D.O.F.) positioners are described. One of the most important problems of the mechanism is optimal location of electromagnets and sensors. The general condition of mechanical decoupling is derived using a general electromagnet location matrix determined by the geometric positions and attitudes of the electromagnets. An electromagnet locating method robust to magnetic parameter change is proposed using singular value decomposition representation. A controller that has an arbitrary bandwidth and damping coefficient with respect to each D.O.F. and minimal energy loss through the electromagnets is proposed using a generalized inverse of the electromagnet location matrix. As an example, a 5 D.O.F. model with 6 electromagnets was designed and experimental results supporting the design were obtained.

Key words : magnetic suspension, decoupling control, antenna pointing mechanism, singular value decomposition

1. はじめに

磁気浮上技術を利用した多自由度位置決め装置は、比較的駆動範囲は狭いが、高精度が要求されるアンテナ駆動装置などの衛星搭載用駆動機器への適用が有望である^{1)~3)}。これらの機器は、外部からの指令値に従って負荷を駆動することが目的であり、従来のモータムホイールに代表される回転機能を重視する磁気軸受⁴⁾とは異なった設計手法が要求される。

この機構設計の中で特に重要なことは小型軽量化であり、電磁石数の低減化とこれに伴う電磁石配置の最適化が設計上の基本的な検討課題である。しかし、この電磁石配置の最適性に関しては、これまで解析的な判断基準が無く、磁気軸受で蓄積されてきたノウハウあるいは幾何学的な直感に頼らざるを得ないのが現状である。

また制御系に関しては、磁気浮上系は本質的に自由度に対する電磁石数の冗長性を有しているが、これらを考慮した系構造と制御パラメータ決定法に関する一般的な議論はほとんど行われていない。

そこで本論文では、まず、これらの汎用的な設計法

を確立することを目的とし、電磁石とセンサの幾何学的な配置を表現する行列を用いて、自由度数を限定せずに一般論として議論をすすめる。その中で、機構系では、① 動的干渉が無く、② 電磁石パラメータの変動に強い電磁石配置条件について、制御系では、① 簡素化と② 低電力化をねらいとした系構造と制御パラメータ決定法について検討し、衛星搭載用機器としてどのような機構と制御系が望ましいかを論ずる。最後に具体的な設計例として、5自由度制御形モデルとこれによる実験結果を示す。

2. 動作原理と特徴

本論文で扱う磁気浮上型多自由度位置決め装置は、複数の電磁石と非接触型変位センサを配置したステータ（駆動体）、磁性体ロータ（被駆動体）、及びその制御回路からなり、各電磁石の電流を操作することにより被駆動体を吸引駆動し、その位置と姿勢を制御するものである。以下のような優れた特徴があるので、衛星搭載用機器として適している。

- ① 摩擦、バックラッシュが無く、位置決め精度が高い。
- ② 潤滑の必要がなく長寿命化が期待できる。
- ③ 伝達機構を必要とせずコンパクトな機構構成となる。

* 原稿受付 昭和63年3月23日。昭和63年度精密工学会春季大会学術講演会（昭和63年3月18日）にて発表

** 正会員 日本電信電話(株)（武蔵野市緑町3-9-11）

- ④ 機構の重要な特性である剛性と減衰率を、制御定数を変えることにより自由に設定できる。

3. 機構系の設計

一般性のある議論を行うために、以下では、 m 個の電磁石及び l 個の非接触型変位センサにより、 n (≤ 6) 自由度の剛体を制御する多自由度機構の構成問題を取り上げる。以下のベクトル及び行列を定めておく。

$\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]^T$: 被駆動体重心を原点とする直交座標系変位あるいは角度

$\mathbf{r}_x = [r_{x1}, \dots, r_{xn}]^T$: 被駆動体に与えられる直交座標系目標値

$\mathbf{f}_x = [f_{x1}, \dots, f_{xn}]^T$: 上記直交座標系に対応する力及びトルク

$\mathbf{M} = \text{diag}[M_1, \dots, M_n]$: 被駆動体質量及び重心回りの慣性モーメントを要素とする対角行列

$\mathbf{u}_a = [u_{a1}, \dots, u_{am}]^T$: 各電磁石への操作量(定電流アンプへの入力)

$\mathbf{i}_a = [i_{a1}, \dots, i_{am}]^T$: 各電磁石の電流の変動分

$\mathbf{f}_a = [f_{a1}, \dots, f_{am}]^T$: 各電磁石の吸引力の変動分

$\mathbf{r}_a = [r_{a1}, \dots, r_{am}]^T$: 各電磁石のすきま目標位置

$\mathbf{g} = [g_1, \dots, g_m]^T$: 各電磁石のすきま変位(狭まる方向が正)

$\mathbf{s} = [s_1, \dots, s_l]^T$: 変位センサ出力(広がる方向が正)
被駆動体の平衡点位置近傍において $\mathbf{g}, \mathbf{s}, \mathbf{x}$ は以下のような線形な関係式で記述できる。

$$\mathbf{g} = \mathbf{K}_g \mathbf{x} \quad (1)$$

$$\mathbf{s} = \mathbf{K}_s \mathbf{x} \quad (2)$$

ここで $\mathbf{K}_g$ は各電磁石の位置と姿勢(力の方向)から決まる ($m \times n$) の定数行列、また $\mathbf{K}_s$ はセンサの位置と姿勢(検出の方向)から決まる ($l \times n$) の定数行列である。

式(1)の変位の関係式は、仮想仕事の原理から以下の力の関係式へ変換できる。

$$\mathbf{f}_x = \mathbf{K}_g^T \mathbf{f}_a \equiv \mathbf{K}_a \mathbf{f}_a \quad (3)$$

$\mathbf{K}_a (n \times m)$, $\mathbf{K}_s$ は機構の大きさ及び位置決め装置としての特性を左右する重要な機構パラメータであり、それぞれアクチュエータ配置行列、センサ配置行列と呼ぶことにする。本報告でいう機構設計とは、要求される自由度に対して適切な $\mathbf{K}_a$, $\mathbf{K}_s$ を決定することを意味する。明らかに、

$$m > n, \text{rank}(\mathbf{K}_a) = n, \text{rank}(\mathbf{K}_s) = n \quad (4)$$

が、機構として成り立つための必要条件の一つである。

3.1 アクチュエータ配置行列 $\mathbf{K}_a$ の設計

3.1.1 機構的非干渉化条件

一般に電磁吸引力は、すきまと入力電流との非線形

関数となるが、適当なバイアス電流を付加することにより、被駆動体の平衡点位置付近における $\mathbf{f}_a$ は、近似的に以下のような線形な式で表せる¹⁾。

$$\mathbf{f}_a = \mathbf{G}_g \mathbf{g} + k_c \mathbf{G}_1 \mathbf{u}_a \quad (5)$$

ただし、

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_g &= \mathbf{G}_{g0} + \Delta \mathbf{G}_g \\ &= \mathbf{G}_{g0} \mathbf{I}_m + \text{diag}[\Delta G_{g1}, \dots, \Delta G_{gm}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_1 &= \mathbf{G}_{10} + \Delta \mathbf{G}_1 \\ &= \mathbf{G}_{10} \mathbf{I}_m + \text{diag}[\Delta G_{11}, \dots, \Delta G_{1m}] \end{aligned}$$

$\mathbf{G}_{g0}$, $\mathbf{G}_{10}$ は、各電磁石の平衡すきまと平衡電流及び力定数により決まるノミナルな正定数対角行列、また $\Delta \mathbf{G}_g$, $\Delta \mathbf{G}_1$ は各すきまと電流の変化に応じて非線形的に変化するパラメータであり、被駆動体の駆動範囲が大きくなるほどこれらのパラメータ変動の範囲は増大する。 $\mathbf{I}_m$ は m 次元の単位行列、また k_c は定電流アンプのゲインであり、各アンプすべて同じ値とする。この値の変動は小さいので以下では変動は無いものとして扱う。以下の数式では、ノミナル値に対してはサフィックス '0'、変動分に対しては 'Δ' を用いて表すこととする。式(3), (5)より被駆動体の運動方程式は以下のように書ける。

$$\left. \begin{aligned} M \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} &= \mathbf{f}_x \\ &= \mathbf{K}_a (\mathbf{G}_g \mathbf{K}_a^T \mathbf{x} + k_c \mathbf{G}_1 \mathbf{u}_a) \\ &= \mathbf{K}_a \mathbf{G}_g \mathbf{K}_a^T \mathbf{x} + k_c \mathbf{K}_a \mathbf{G}_1 \mathbf{u}_a \\ &\equiv \mathbf{f}_{xg} + \mathbf{f}_{x1} \\ &= \mathbf{G}_{g0} \mathbf{K}_a \mathbf{K}_a^T \mathbf{x} + \mathbf{K}_a \Delta \mathbf{G}_g \mathbf{K}_a^T \mathbf{x} \\ &\quad + k_c \mathbf{G}_{10} \mathbf{K}_a \mathbf{u}_a + k_c \mathbf{K}_a \Delta \mathbf{G}_1 \mathbf{u}_a \\ &\equiv \mathbf{f}_{xg0} + \Delta \mathbf{f}_{xg} + \mathbf{f}_{x10} + \Delta \mathbf{f}_{x1} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

被駆動体の駆動範囲が極く微小である場合には、式(6)の変動分 $\Delta \mathbf{f}_{xg}$, $\Delta \mathbf{f}_{x1}$ は無視できるので、運動方程式は以下のようになる。

$$M \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = \mathbf{G}_{g0} \mathbf{K}_a \mathbf{K}_a^T \mathbf{x} + k_c \mathbf{G}_{10} \mathbf{K}_a \mathbf{u}_a \quad (7)$$

第1項の $\mathbf{K}_a \mathbf{K}_a^T$ は、式(4)より常に正定となるから、どのように電磁石を配置しても、被駆動体は全自由度において不安定であり、フィードバック制御が必要になることがわかる。

式(7)右辺第1項は、出力フィードバックにより自由度ごとに非干渉化できるが、衛星搭載用機器ではできるかぎり簡素な制御系が要求されるので、機構的に非干渉化されていることが望ましい。すなわち、

$$\mathbf{K}_a \mathbf{K}_a^T = \text{diagonal} \quad (8)$$

が、制御側から見た磁極の望ましい配置と言える。

一方、式(7)右辺第2項の操作入力項は常に長方形列となるから、適当な前置補償器が必要である。

3.1.2 特異値分解による K_a の評価

3.1.1 項で述べたように、 G_g と G_l は系の状態 x と操作量 u_a により変化するので、これに応じて、それぞれ f_{xg} , f_{xl} が変化し、従って f_x が変化する。 K_a は f_a から f_x への伝達行列とみなせるから、 G_g , G_l の変動分 ΔG_g , ΔG_l による f_x の変動分 Δf_x への影響がなるべく小さくなるような K_a が望ましいと言える。

以下では、 K_a の特異値分解表現⁵⁾を用いてこの望ましい K_a に関する1つの評価法を論ずる。以下で用いるベクトルと行列のノルムはユークリッドノルムとする。

K_a の特異値分解表現を以下のように表しておく。

$$K_a = P_a \Sigma_a V_a^T \quad (9)$$

$$\Sigma_a = [\Sigma_{a0} \mathbf{0}]$$

$$\Sigma_{a0} = \text{diag}[\sigma_{a1}, \sigma_{a2}, \dots, \sigma_{an}]$$

ここで、 $P_a (n \times n)$, $V_a (m \times m)$ は適当な直交行列、 $\mathbf{0}$ は $(n \times (m-n))$ 零行列、 $\sigma_{a1} \geq \sigma_{a2} \geq \dots \geq \sigma_{an} \geq 0$ は K_a の特異値である。

まず、 G_l の変動による f_{xl} の変動の大きさについて考察する。 $z = k_c G_l u_a$ とおくと、

$$f_{xl} = K_a z \quad (10)$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta z &= k_c \Delta G_l u_a \\ z_0 &= k_c G_{l0} u_a \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

となる。これらの値の大きさ(ノルム)の比は、 K_a の特異値を用いて、以下のように不等式表現できる⁶⁾。

$$\|\Delta f_{xl}\| / \|f_{xl0}\| \leq \text{cond } K_a \|\Delta z\| / \|z_0\| \quad (12)$$

$$\text{cond } K_a \equiv \sigma_{a1} / \sigma_{an}$$

ここで、 $\text{cond } K_a$ を K_a の条件数⁶⁾と呼ぶ。ところで、

$$\left. \begin{aligned} \|\Delta z\| &= k_c \|\Delta G_l u_a\| \leq k_c \|\Delta G_l\| \|u_a\| \\ \|z_0\| &= k_c G_{l0} \|u_a\| \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

となるので、式(12)より、

$$\|\Delta f_{xl}\| / \|f_{xl0}\| \leq \text{cond } K_a \|\Delta G_l\| / G_{l0} \quad (14)$$

を得る。

一方、式(6)の f_{xg} に関しても、同様な過程より以下の不等式が得られる。

$$\|\Delta f_{xg}\| / \|f_{xg0}\| \leq \text{cond } K_a \|\Delta G_g\| / G_{g0} \quad (15)$$

式(14)、(15)はそれぞれ、パラメータ変動 ΔG_l , ΔG_g による f_{xl} , f_{xg} の変動 Δf_{xl} , Δf_{xg} の大きさの上限を与える式である。すなわち、それぞれの入力となる u_a と K_a の値に関係なく、変動分は最悪で $\text{cond } K_a$ 倍される可能性があることを示す。

一般に制御系設計においては、制御対象のパラメータ変動による全系への影響は、極力小さいことが望ましい。従って、その最悪値をなるべく小さくするという安全側の設計に立てば、 $\text{cond } K_a$ が小さいほど望ましいといえる。このことは特に、磁気浮上型多自由度

位置決め機構においては、電磁吸引力の性質から、駆動範囲が大きいほど注意すべき要因であると言える。

ところで、 K_a の要素の内、回転にかかわるものは距離の次元を持つから、 $\text{cond } K_a$ は距離の単位の取り方で値が異なる。従って、適当な基準値を用いて $\text{cond } K_a$ を無次元化して評価する必要がある。

明らかに、 $\text{cond } K_a = \text{cond } K_g$ であるから、この基準値として、被駆動体の最大駆動範囲、すなわち並進運動では最大並進距離 $x_{\max}$ 、回転運動では最大回転角 $\theta_{\max}$ を取り、有次元状態量 x をこの $x_{\max}$, $\theta_{\max}$ で割った無次元状態量 x^* を以下のように定義する。

$$x^* = X_{\max}^{-1} x \quad (16)$$

ただし、 $X_{\max} (n \times n)$ は x の各要素の次元に応じて、 $x_{\max}$ あるいは $\theta_{\max}$ を対角要素とする定数対角行列である。この時、式(1)より、

$$g = K_g X_{\max} x^* \equiv K_g^* x^* \quad (17)$$

のような $K_g^* (m \times n)$ を定義すれば、 K_g^* の全要素は距離の次元を持つから、無次元の $\text{cond } K_g^*$ を $\text{cond } K_a$ の代わりに評価すれば良い。さらに、

$$(K_g^*)^T K_g^* = X_{\max} K_a K_a^T X_{\max} \quad (18)$$

となるから、機構の非干渉化条件式(8)の成立を仮定すれば、 $\text{cond } K_g^*$ は式(9)の特異値分解表現を直接求めなくても以下のように容易に求まる。

$$\text{cond } K_g^* = \sqrt{(\sigma_{\max} / \sigma_{\min})} \quad (19)$$

ここで、 $\sigma_{\max}$, $\sigma_{\min}$ はそれぞれ、式(18)の最大、最小要素である。

以上の議論から、望ましい電磁石配置法の1つとして、式(8)を成立させる必要最小限の電磁石を用いて、 $\text{cond } K_g^*$ がなるべく小さくなるように配置することが良いと言える。そして、その理想的な配置は、

$$\text{cond } K_g^* = 1 \quad \therefore (K_g^*)^T K_g^* = k^* I_n \quad (20)$$

(k^* は適当な定数)

すなわち、重心を原点とする直交座標系で、 K_g^* が直交行列の定数倍となることである。

3.2 センサ配置行列 K_s の設計

センサには必ず観測誤差が伴うので、 s の測定誤差による x の誤差がなるべく小さくなるようなセンサ配置が望ましい。今 x の真値を x_0 、これに対応する s の値を s_0 、 s の誤差を Δs 、 x の誤差 Δx とすれば、アクチュエータの場合と同様に、センサ配置行列 K_s の特異値を利用して、次のように誤差評価できる⁵⁾⁶⁾。

$$\|\Delta x\| / \|x_0\| \leq \text{cond } K_s \|\Delta s\| / \|s_0\| \quad (21)$$

$$\text{cond } K_s \equiv \sigma_{s1} / \sigma_{sn}$$

ここで σ_{s1} , σ_{sn} はそれぞれ K_s の最大特異値、最小特異値であり、 $\text{cond } K_s$ を K_s の条件数と呼ぶ。これより計算値 x の S/N 比は、センサ単体の S/N 比に対し、最

Fig. 1 Method 1 (actuator oriented)

Fig. 2 Method 2 (D.O.F. oriented)

悪 1/cond K_s 倍まで下がる可能性があるので、 K_s の設計の際にはこの cond K_s ができるかぎり小さくなるよう考慮する必要がある。ただし、アクチュエータの場合と同様に、適当な基準値で無次元化して評価する必要がある。

4. 制御系の設計

4.1 状態量の算出法

- ① $l=n$ の場合は、 $\mathbf{x} = K_s^{-1}\mathbf{s}$ と一意に定まる。
- ② $l>n$ の場合は、 K_s は長方形列となるので、 $\mathbf{s}$ から $\mathbf{x}$ への変換行列は一意に定まらないが、 K_s の擬似逆行列 K_s^+ を使えば次式で算出できる。

$$\mathbf{x} = K_s^+ \mathbf{s} = (K_s^T K_s)^{-1} K_s^T \mathbf{s} \quad (22)$$

これは式 (2) の最小ノルム最小 2 乗解であり⁵⁾、センサにノイズが均一に重畳すると仮定した場合、誤差ノルムが最小となる意味で最適な変換式である。

4.2 閉ループの構造

前述したように、磁気浮上系では常に自由度数 n よりも電磁石数 m の方が大きいから、この冗長性をどう扱うかが制御系設計の重要点である。構成するループを自由度対応とするか、あるいはアクチュエータ対応とするかにより、閉ループの構造は大きく異なる。以下それぞれの特徴と衛星搭載用機器としての適性を検討しつつ比較検討を行う。ただし、制御系設計に用いる制御対象パラメータは、平衡点近傍におけるノミナル値を用いて行う。

4.2.1 アクチュエータ対応制御法 (方法 1)

m 個のアクチュエータそれぞれに補償器を設け、各すきまをそれぞれ個別にフィードバックする考え方で、従来の磁気軸受制御系で用いられる方法を基本とする (図 1)。まず式 (1), (22) から算出される $\mathbf{g}$ を各アクチュエータ系へフィードバックすることにより磁気浮上系を安定化する。次に、直交座標系上で与えられる目標変位 $\mathbf{r}_x$ を、各電磁石のすきま目標変位 $\mathbf{r}_a$ に分配し、 m 個のループの偏差として与える。 $\mathbf{r}_x$ と $\mathbf{r}_a$ は、 $\mathbf{r}_a = K_a^T \mathbf{r}_x$ なる関係があるから、この場合の操作量 $\mathbf{u}_a = \mathbf{u}_1$ は、 C_a を $(m \times m)$ の補償器行列とすると次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= C_a (K_a^T \mathbf{r}_x - K_a^T K_s^+ \mathbf{s}) \\ &= C_a K_a^T (\mathbf{r}_x - \mathbf{x}) \end{aligned} \quad (23)$$

$$\therefore \mathbf{f}_x = k_c G_{10} K_a C_a K_a^T (\mathbf{r}_x - \mathbf{x}) \quad (24)$$

従って、

$$K_a C_a K_a^T = \text{diagonal} \quad (25)$$

の時、全系は自由度ごとに非干渉化される。

今、機構的非干渉化条件式 (8) が成立している場合を想定する。式 (25) を成立させる $C_a (m \times m)$ は一意には定まらないが、制御系の簡素化のために対角なものを採用すれば、

$$C_a = c(s) I_m \quad (26)$$

($c(s)$ はスカラーの補償器)

となる。これは、各アクチュエータに対する補償をすべて同じにすることを意味する。従って、自由度により異なる制御特性 (制御帯域と減衰特性) が要求される場合には対処が困難である。また、自由度数 n よりもループ数 m の方が大きいから、すべてのループに積分補償を入れることはできない。

4.2.2 自由度対応制御法 (方法 2)

式 (22) から算出される $\mathbf{x}$ をフィードバックし、この $\mathbf{x}$ と $\mathbf{r}_x$ とのエラーシステムを直接構成する考え方である (図 2)。自由度ごとに制御系を設計するためには、操作量と自由度とが 1 対 1 に対応していなくてはならない。しかし、一般に $\mathbf{u}_a$ と $\mathbf{u}$ は 1 対 1 に対応しないので、適当な前置非干渉化行列が必要となる。すなわち、

$$K_a D = I_n \quad (27)$$

となる前置非干渉化行列 $D (m \times n)$ を挿入することにより、直交座標系における新たな操作量 $\mathbf{u}$ と自由度とを 1 対 1 に対応させれば良い。しかし、 K_a は長方形列であるので式 (27) を満たす D は一意には定まらない。

一般に、駆動機器内のアクチュエータは、常に高効率化が要求されるが、特に衛星搭載用機器では、機構の小型軽量化と並び最も重要な課題である。従ってこの制御系では、電磁石で消費される損失電力 $J = r_{i1}^2 + \dots + r_{miam}^2$ が最小となるように、

$$D = R^{-1} K_a^T (K_a R^{-1} K_a^T)^{-1} \quad (28)$$

とすることが望ましい。ここで、 $r_1, \dots, r_m$ は各電磁石の抵抗で、 $\mathbf{R} = \text{diag}[r_1, \dots, r_m]$ である。このことを以下に証明する。

(証明)

$\mathbf{D}^* = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{K}_a^T (\mathbf{K}_a \mathbf{R}^{-1} \mathbf{K}_a^T)^{-1}$ とおくと、(27) の一般解 $\mathbf{D}$ は、以下のように書ける。

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}^* + \mathbf{Q} \quad (29)$$

ここで $\mathbf{Q}$ は、

$$\mathbf{K}_a \mathbf{Q} = \mathbf{O} \quad (30)$$

を満たす任意の $(m \times n)$ 行列である。このとき、

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^T \mathbf{R} \mathbf{D} &= (\mathbf{D}^* + \mathbf{Q})^T \mathbf{R} (\mathbf{D}^* + \mathbf{Q}) \\ &= (\mathbf{K}_a \mathbf{R}^{-1} \mathbf{K}_a^T)^{-1} + (\mathbf{K}_a \mathbf{R}^{-1} \mathbf{K}_a^T)^{-1} \mathbf{K}_a \mathbf{Q} \\ &\quad + (\mathbf{K}_a \mathbf{Q})^T (\mathbf{K}_a \mathbf{R}^{-1} \mathbf{K}_a^T)^{-1} + \mathbf{Q}^T \mathbf{R} \mathbf{Q} \end{aligned} \quad (31)$$

となる。式 (31) の右辺第 2, 3 項は式 (30) より $\mathbf{O}$ であり、また $\mathbf{R}$ の正定性より常に、 $\mathbf{Q}^T \mathbf{R} \mathbf{Q} \geq \mathbf{O}$ であるから、

$$\mathbf{D}^T \mathbf{R} \mathbf{D} \geq (\mathbf{K}_a \mathbf{R}^{-1} \mathbf{K}_a^T)^{-1} \quad (32)$$

となる。損失電力 J は

$$J = \mathbf{i}_a^T \mathbf{R} \mathbf{i}_a = k_c^2 \mathbf{u}^T \mathbf{D}^T \mathbf{R} \mathbf{D} \mathbf{u} \quad (33)$$

であるから、任意の操作量 $\mathbf{u}$ に対して次式が成立する。

$$J \geq k_c^2 \mathbf{u}^T (\mathbf{K}_a \mathbf{R} \mathbf{K}_a^T)^{-1} \mathbf{u} \quad (34)$$

等号は $\mathbf{Q} = \mathbf{O}$ 、すなわち、 $\mathbf{D} = \mathbf{D}^*$ の時のみ成立し、このとき J は最小値 $k_c^2 \mathbf{u}^T (\mathbf{K}_a \mathbf{R} \mathbf{K}_a^T)^{-1} \mathbf{u}$ をとる。

(証明終)

ところで、パワーアンプの消費電力 J_{PA} が、入力 $\mathbf{u}$ の 2 乗 $\mathbf{u}^T \mathbf{u}$ に比例すると仮定すれば、式 (27) を満たす $\mathbf{D}$ のなかで、 J_{PA} を最小化する $\mathbf{D}'$ は、

$$\mathbf{D}' = \mathbf{K}_a^T (\mathbf{K}_a \mathbf{K}_a^T)^{-1} \quad (35)$$

となる。特に、 $\mathbf{R} = r \mathbf{I}_m$ 、すなわち抵抗がすべて同じ場合には、 $\mathbf{D}'$ と $\mathbf{D}^*$ は一致し、コイルで消費される損失電力を最小化し、かつ、パワーアンプの消費電力をも最小化すると言える。

かくして、 n 自由度磁気浮上系は n 個の 1 自由度系に分離されたので自由度ごと独立に補償を行えば良い。補償器行列を $\mathbf{C}_x = \text{diag}[c_{x1}(s), \dots, c_{xn}(s)]$ とすれば、この方法 2 の操作量 $\mathbf{u}_a = \mathbf{u}_2$ は次式となる。

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{D}^* \mathbf{C}_x (\mathbf{r}_x - \mathbf{x}) \quad (36)$$

このように、方法 2 では自由度と補償器は 1 対 1 に対応するので、自由度ごとに任意に制御特性（制御帯域と減衰率）を設定することが容易で、またすべての補償要素に積分補償を入れることができる。

4.2.3 方法 1 と 2 の比較

以上 2 つの制御系について、それぞれの構成要素数に関して比較検討した結果を表 1 に示す。これより、変換行列の次元が低く、ダイナミクスを持つ補償器の

Table 1 Comparison of method 1 and method 2

	Method 1	Method 2
Feedback	$\mathbf{g}$	$\mathbf{x}$
Dynamic compensator	$c(s) \times m$	$c(s) \times n$
Conversion matrix	$\mathbf{K}_a^T (m \times n)$ $\mathbf{K}_a^T \mathbf{K}_s^+ (m \times l)$	$\mathbf{D}^* (m \times n)$ $\mathbf{K}_s^+ (n \times l)$

数が少なく、かつ自由度別の補償が容易である方法 2 が、衛星搭載用機器としてふさわしいと考えられる。

5. 5 自由度制御系モデルの設計例

前節で述べた機構と制御系の設計法の 1 つの具体例として、3 つの並進自由度と 2 つの回転自由度を有する 5 自由度制御系モデルを試作したので以下これに関して述べる。

5.1 アクチュエータ配置行列 $\mathbf{K}_a$ の設計

まず磁極数 m は、必要最小限の 6 とする。機構の大きな構造は既に試作した 4 自由度モデル¹⁾の構造を基に、一例としてアウトロータ型の鼓構造を採用した²⁾ (以下鼓型モデルと呼ぶ)。このように、6 つの電磁石を用いて 5 自由度を拘束する機構は、著者らの 1 人が直進案内機構として既に検討しているが⁷⁾、位置決め機構としての具体例はほかに無いものである。図 3 (a), (b) のように、鼓形状中心 (重心) を原点とする直交座標系を取り、上下円すい面の半分の角度を θ_c 、上下 3 極の Z 軸方向から見た角度を θ_i 、中心から磁極中心までの距離を l_1 、中心から X 軸上の円すい面交点までの距離を l_2 、 O から各電磁石作用線までの長さを l_3 とする。この時、幾何学的に、 $l_3 = l_1 / \cos \theta_c + l_2 \sin \theta_c$ なる関係がある。以上の機構パラメータに対し、3 章で述べた評価基準をもとに、その望ましい値を決定する。式 (1)~(3) に対応する $\mathbf{x}, \mathbf{g}, \mathbf{f}_x, \mathbf{f}_a$ は、 $\mathbf{x} = [x, y, z, \theta_x, \theta_y]^T$ 、 $\mathbf{g} = [g_1, \dots, g_6]^T$ 、 $\mathbf{f}_x = [f_x, f_y, f_z, T_x, T_y]^T$ 、 $\mathbf{f}_a = [f_{a1}, \dots, f_{a6}]^T$ となる。ここで、 f は力、 T はトルクを表す。アクチュエータ配置行列 $\mathbf{K}_a (5 \times 6)$ の具体的な値は付録にのせる。まず、式 (8) の機構的非干渉化条件を適用する。付録から計算すれば、

$$\mathbf{K}_a \mathbf{K}_a^T (3, 5) = \mathbf{K}_a \mathbf{K}_a^T (5, 3) = 2 l_3 \sin \theta_c (2 \sin \theta_c - 1) = 0 \quad (37)$$

より、 $\theta_c = 30^\circ$ の時、平衡点近傍における動的干渉は無いことがわかる。これは上下 3 極をそれぞれ 120° ずつ等間隔に配置することを意味する。また、この時さらに、任意の l_3 に対して、

$$\mathbf{K}_a \mathbf{K}_a^T (1, 1) = \mathbf{K}_a \mathbf{K}_a^T (2, 2) \quad (38)$$

$$\mathbf{K}_a \mathbf{K}_a^T (4, 4) = \mathbf{K}_a \mathbf{K}_a^T (5, 5) \quad (39)$$

Fig. 3 Schematic drawing of conical model

となることがわかる. 式 (38) は X, Y 軸方向の並進運動に関する条件数が 1, つまり最良の状態となることを意味する. また, 式 (39) より, X, Y 軸周りの回転運動に関しても同様である. さらに電磁石の大きさを考慮に入れると, 隣り合う磁極間の電磁力の干渉が最も小さくなるという意味でも, $\theta_c = 30^\circ$ は最適な磁極配置といえる.

次に, l_1, l_2, θ_c について考察する. この内, l_1, l_2 は機構全体の大きさを左右する最も重要なパラメータで, 軽量小型化を図るにはできるかぎり小さい方が望ましい. 一方, X, Y 軸方向の並進運動と, Z 軸方向の並進運動との条件数, および並進運動と回転運動との条件数の観点から, これらの最適値を評価してみる.

被駆動体の最大駆動範囲を, 4 自由度モデル¹⁾ の実績から, $x_{\max} = 2 \text{ mm}$, $\theta_{\max} = 1.5^\circ = \pi/120 \text{ (rad)}$ とし, この値で無次元化を行うこととした. 付録より,

Fig. 4 Condition number of conical model

$$\left. \begin{aligned} (K_g^*)^T K_g^* &= \text{diag}[d_{xy}, d_{xy}, d_z, d_\theta, d_\theta] \\ d_{xy} &= 3 \cos^2 \theta_c x_{\max}^2 \\ d_z &= 6 \sin^2 \theta_c x_{\max}^2 \\ d_\theta &= 3 l_3^2 \theta_{\max}^2 \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

となる. これより $\text{cond } K_g^* = 1$ となる条件を求めてみる. $d_{xy} = d_z = d_\theta$ より,

$$\left. \begin{aligned} \cos^2 \theta_c &= 2/3 \quad \therefore \theta_c \approx 35.26^\circ \\ l_3 &= \sqrt{(2/3)} x_{\max} / \theta_{\max} \approx 6 \text{ cm} \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

を得る. $l_3 = l_1 / \cos \theta_c + l_2 \sin \theta_c$ であるから, l_1, l_2 は, 式 (41) より, 上下円すい交線部の機械的強度と電磁石の大きさを考慮し, $l_1 \approx 3.5 \text{ cm}$, $l_2 \approx 3 \text{ cm}$ と決定した. 図 4 に, $20^\circ \leq \theta_c \leq 80^\circ$ の範囲で, $l_3 = 3, 6, 12 \text{ cm}$ と変化させた時の $\text{cond } K_g^*$ の変化の様子を示す.

ところで, 式 (41) の θ_c は条件数から判断した最適値であるが, 実際の試作機では工作上の便宜を考慮し, これになるべく近い値として, 図 4 より, $\theta_c = 30^\circ$ と決定した. この時, $\text{cond } K_g^*(30^\circ) \approx 1.22$ となるが, 同様な機構系を用いたシミュレーションによると, この条件数の差に起因する応答波形の違いは, ほとんど見られなかった.

5.2 センサ配置行列 K_s の設計

機構の対称性に着目し, 図 3 (a), (b) のように, 各アクチュエータとの対称的な位置に 6 個のセンサを設置した. この時のセンサ配置行列 $K_s (6 \times 5)$ を付録に示す. K_s の条件数は, アクチュエータ位置との対称性より明らかに, $\text{cond } K_s = \text{cond } K_a$ となるので, アクチュエータの場合と同様にセンサ配置に関しても, $\theta_c = 30^\circ$, $\theta_t = 30^\circ$ は適切な値であるといえる.

以上のように, 電磁石とセンサを対称的に配置することにより機構の小形化を図り, さらに両者の条件数を等しくさせたことがこの鼓型モデルの特徴である. 本実験モデルの概観図を図 5 に, 基本諸元を表 2 に示す.

5.3 制御系の設計と実験結果

Fig. 5 Overview of conical model

Table 2 Rotor parameter

Height	14 cm
Max diameter	13 cm
Mass	1.3 kg
Inertia	$4 \times 10^{-3} \text{ kgm}^2$

Fig. 6 Drive range and coupling test

方法2を採用し、各自由度の制御グループの帯域が10 Hz程度となるよう設計した。機構の対称性から、X, Y軸回りのイナーシャは等しいので、

$$C_x = \text{diag}[c_1(s), c_1(s), c_1(s), c_2(s), c_2(s)]$$

と設定し、それぞれの補償要素は位相進み回路とした。

図6は、 r_1 (X方向)、 r_2 (Y方向)に変位 ± 2 mmに相当する正弦波信号を与えた場合の応答を示す。同図より x_1, x_2 の駆動範囲は ± 2 mmを実現し、かつ応答周波数1 Hz以上で追従可能であることが確認できる。また、平衡点近傍をはるかに越える大振幅であるにもかかわらず、両方向の相互干渉は見られないことがわかる。

6. おわりに

本研究により得られた主な結果を要約する。

- (1) 磁気浮上型多自由度位置決め機構の電磁石と変位センサの最適配置法を検討した。電磁吸引力の非線形性に起因する動的干渉の無い電磁石配置

の一般条件を導出し、また電磁吸引力のパラメータ変動に強い電磁石配置法として、アクチュエータ配置行列の条件数が小さいものが望ましいことを明らかにした。

- (2) 制御系に関しては、各自由度ごとの制御帯域と減衰率が任意に設定でき、かつ電磁石で消費される損失エネルギーの総和が最小となる制御系を提案した。

- (3) 具体例として、6個の電磁石による5自由度制御形の鼓型モデルを設計、試作した。このモデルを用いて浮上試験を実施したところ、提案した機構と制御系設計法の基本的妥当性を確認した。

以上の結果より、磁気浮上型多自由度位置決め装置の機構と制御系を設計する場合の重要な指針が得られた。今後は、より詳細な実験的検証を行う予定である。

最後に、本研究全般にわたり適切な助言を頂いた当研究所川崎主幹研究員に深く感謝します。

〔付録〕 鼓型モデルの機構パラメータ

アクチュエータ配置行列 $K_a(5 \times 6) =$

$$\begin{bmatrix} -C_c & C_c s_t & C_c s_t & -C_c & C_c s_t & C_c s_t \\ 0 & C_c c_t & -C_c c_t & 0 & C_c c_t & -C_c c_t \\ S_c & S_c & S_c & -S_c & -S_c & -S_c \\ 0 & -l_3 c_t & l_3 c_t & 0 & l_3 c_t & -l_3 c_t \\ -l_3 & l_3 s_t & l_3 s_t & l_3 & -l_3 s_t & -l_3 s_t \end{bmatrix}$$

センサ配置行列 $K_s(6 \times 5) =$

$$\begin{bmatrix} -C_c & 0 & -S_c & 0 & -l_3 \\ C_c s_t & C_c c_t & -S_c & -l_3 c_t & l_3 s_t \\ C_c s_t & -C_c c_t & -S_c & l_3 c_t & l_3 s_t \\ -C_c & 0 & S_c & 0 & l_3 \\ C_c s_t & C_c c_t & S_c & l_3 c_t & -l_3 s_t \\ C_c s_t & -C_c c_t & S_c & -l_3 c_t & -l_3 s_t \end{bmatrix}$$

ただし、 $c_c = \cos \theta_c$, $s_c = \sin \theta_c$, $s_t = \sin \theta_t$, $c_t = \cos \theta_t$ とおいた。

参考文献

- 1) S. Iwaki, R. Matsuda: Testing and Investigation of Magnetically Suspended APM, International Space Technology and Science 86, Proc., 787.
- 2) 岩城 敏ほか：磁気浮上型アンテナ駆動機構、昭和63年度精密工学会春季大会学術講演会講演論文集(1987) 823.
- 3) 高原憲一ほか：磁気浮上型多自由度アンテナ駆動機構の開発、宇宙科学技術連合講演会講演論文集(1987) 152.
- 4) 樋口俊郎ほか：5自由度制御形磁気軸受制御系の研究、計測自動制御学会論文集, 18 (1982) 507.
- 5) 伊理正夫ほか：特異値分解とそのシステム制御への応用、計測と制御, 21, 8 (1982) 763.
- 6) 内山 勝：ロボット力覚センサのシステム設計論、システムと制御, 31, 2 (1987) 103.
- 7) 松田隆一、中川三男：直進案内可動体の磁気浮上制御(第1報)、精密機械, 50, 9 (1984) 1419.