研究論文

軽負荷歯車の歯の接触特性について*

金 炯 均** 林 輝*** 高 久 健太郎†

Contact Characteristics of a Pair of Gear under Lightly Loaded

Hyung-gyoon KIM, Teru HAYASHI and Kentarou TAKAKU

Recently, the gear breakage and the noise due to the repetitive impact load in the lightly loaded gear train became one of big problems. For the theoretical analysis of this problem, actual contact characteristics of a pair of gear under lightly loaded is necessary. In this paper, the exact contact characteristics were obtained experimentally. Actually we obtained, spring characteristics and damping characteristics for the ideal condition, misalignment condition and double flank meshing condition. The result of lightly loaded gear pair has nonlinearity and the smaller values of contact characteristics compare with gears which used under heavy load for transmit power.

Key words: machine element, gear, light load, contact characteristic, misalignment, non-linear

1. 緒 論

工作機械用変速歯車装置などでは軽負荷のとき生ずる歯車の衝突振動・騒音や動荷重による損傷が重大な問題になっている。この衝突振動が問題になるのは多くは中間歯車を持つ歯車列の場合である。

著者らはこの問題を解明するため、まず単純な1対の歯車の衝突振動について近似解析と試験歯車装置を用いた実験を行い、加振振幅の大きさと衝突振動モード、衝突エネルギーの間の関係を明らかにしてきた¹⁾。

次に、実際の場合に合わせた中間歯車のある歯車列の実験装置を作り衝突振動につき実験とともに理論解析を行い、それらの結果を比較してみた²⁾。その結果、定性的には一致したが、定量的にはかなりの差がみられた。その原因としては理論解析に用いた軽負荷時の歯のばね定数、減衰係数などの未解明な接触特性についての仮定が正しくなかったためと考えた。そこで、実際の軽負荷歯車の歯の接触特性を誤差のない理想的な場合、およびピッチ誤差、片当たりがある場

合につき実験的に求めることになった。

2. 定義および関係式

1 対の歯の全たわみ: 1 対の歯がかみあう時、それぞれの歯の負荷作用点における作用線方向のたわみの総和を全たわみ δ と呼ぶことにする。全たわみは次のようになる。

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 + \delta_{pv} \quad (1)$$

ここで、 δ_1 と δ_2 はそれぞれの歯の作用線方向のたわみ、 δ_{pv} は歯面接触部の変形量である。大きな動力を伝達する歯車の場合、歯の全たわみは荷重の大きさにほぼ比例すると考えられている。歯面のたわみを求めるためによく使われている石川の式³⁾を用いて1対の歯の歯面にかかる力と全たわみの関係を力学モデルで示せば図1のようになる。図中の F は荷重によって歯面にかかる力、 k_1 は曲げによるたわみだけ考えた場合のばね特性、 k_2 は歯面変形量だけ考えた場合のばね特性である。ここでは力とたわみの関係を線形関係と考えているので次のような式が成り立つ。

Fig. 1 Spring characteristic of a pair of gear teeth

* 原稿受付 昭和63年4月19日。昭和61年度精密工学会春季大会学術講演会(昭和61年3月28日)および昭和61年度精密工学会秋季大会学術講演会(昭和61年10月10日)にて発表

** 学生会員 東京工業大学総合理工学研究科(横浜市緑区長津田町4259)

*** 正会員 東京工業大学精密工学研究所(横浜市緑区長津田町4259)

† 正会員 浜井産業(株)(足利市福富新町1480)

Table 1 Dimensions of experimented gear pairs

No. of gear pair	gear pair ①		gear pair ②	
No. of gear	gear 1	gear 2	gear 1	gear 2
Module mm	2.5		2.5	
Number of teeth	32	96	40	75
Pressure angle	20°		20°	
Face width mm	10	10	22	22
Effective face width mm	10		14	
Radius of tooth surface curvature mm	13.68	41.04	17.01	32.06
Inertia moment (Include shaft) kg·m ²	0.001	0.053	0.0005	0.028

$$\delta = \left(\frac{F}{k_1} \right) + \left(\frac{F}{k_2} \right) \quad (2)$$

$$\frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \quad (3)$$

ただし、 k_{eq} は曲げによるたわみと歯面変形量を同時に考えた場合のばね特性 ($k_{eq} = dF/d\delta$) である。

本実験で使われた歯車対①(詳細は表1を参照)を用いてピッチ円上で1対歯かみあいしている場合、石川の式³⁾を用いてばね定数を求めれば $k_1 = 260$, $k_2 = 1810$ (単位は $N/\mu m$) のようになる。

しかし、これらの値は4節で述べるように軽負荷歯車対を用いる実験結果とは大きな差があった。

そこで、軽負荷の場合は歯面変形量 δ_{pv} が曲面の接触理論である Hertz 理論に従うものと仮定した。

その時、 δ および F と δ_{pv} の関係は式(4)のようになる。

$$\delta = \left(\frac{F}{k_1'} \right) + \left(\frac{F}{k_2'} \right)^{2/3} \quad (4)$$

ただし、 k_1' と k_2' はそれぞれ式(2)の k_1 と k_2 に相当する。

この時、ばね特性 k_{eq} は式(5)のようになる。

$$\frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k_1'} + \frac{2}{3} \left(\frac{1}{k_2'} \right)^{2/3} \times \frac{1}{\sqrt[3]{F}} \quad (5)$$

3. 実験装置および測定方法

3.1 実験装置の概要

図2に実験装置の概略図を示す。実験は2組の試験歯車対を用いて行った。試験歯車の諸元、形状は表1のようなものである。両試験歯車の歯面粗さは、歯形方向最大 $2 \mu m$, RMS $0.2 \mu m$, 歯筋方向最大 $1 \mu m$, RMS $0.1 \mu m$ 程度である。実験装置の小歯車は軸をしっかりと固定し $200 N$ の荷重がかかっても軸の回転による変位は $0.1 \mu m$ 以内になるようにした。軸受台

Fig. 2 Schematic diagram of experimental equipment

はねじ送りにより基盤の面上を微動させて片当たりの量が調節できるようにしてあり、片当たりの大きさは台の変位測定値から換算して求める。測定装置としては静的たわみを測る電気マイクロメータ、歯車対の固有振動数を測るための加速度計を用いた。

3.2 測定方法

実験は、まず歯当たりの様子を調べながら片当たりのないように歯車対を調節し、バックラッシュ $0.2 mm$ の状態で行った。

静的実験では、おもりにより荷重を段階的に加え、歯のたわみと歯面の変形量の和を電気マイクロメータを用いて $0.01 \mu m$ 単位まで慎重に測定した。この装置で実際歯面にかかる法線方向の力は負荷用おもりの荷重の 0.7 倍である。また、最初に歯面が離れないように $2 N$ の初期荷重をかけた。

また、モータを用いて本実験装置を回転させたときの振動特性の推定のため歯面の動特性の実験もあわせて行った。

動特性の実験では、荷重をかけたまま接線方向に小さな加振力を与え、そのとき加速度計に発生する信号を周波数分析し歯車対の固有振動数を測定した。また、加速度計の信号を電磁オシログラフに記録し振動の減衰比を求めた。

4. ばね特性の測定と検討

4.1 片当たりのない場合のばね特性の測定結果

図3はピッチ円上で1対歯かみあいする片当たりのない場合、歯面にかかる力と全たわみの関係を示したものである。歯車対②には荷重を $200 N$ までかけて実験を行ったが、歯面に塑性変形が発生すると測定の再現性がなくなる恐れから歯幅の小さい歯車対①に

Fig. 3 Relative displacements of a pair of gear teeth (Non-misalinement condition)

Fig. 4 Examples of the frequency-amplitude diagrams (the written parameters on the diagrams show the static load in [N] and the peaks show the position of natural frequencies)

は弾性範囲にある 100 N までの実験を行った。測定は 10 回繰り返して行った。その測定値は図中の「+」の間に分布する。

曲線は静的実験の測定値を式 (4) に代入し、力とたわみの関係を最小 2 乗法により求めたものである。

測定値から求めた k_1' の絶対値が k_2' に比べ大きいことから、たわみのほとんどは歯面変形によることが分かる。また、石川の理論を用いて求めたばね定数に比べかなり小さい値を示した。

図 4 は動の実験記録の一部で歯車対 ① の場合である。荷重が変わると固有振動数も変わっている。従って、歯車の慣性モーメントと固有振動数からばね定数を求めることができる。

図 3 と図 4 のような実験から歯面にかかる力とばね特性の関係をグラフに表示すれば図 5 のようになる。

静的実験から軽負荷における歯車の歯のばね特性は式 (5) から求めることができる。図中の曲線は静的実験から求めたもので、●印は動の実験値から換算した結果である。両実験から求めたばね特性はある程度一致した結果を示した。しかし、動の実験の方の値が

Fig. 5 Actual spring characteristics of a pair of gear teeth (Non-misalinement condition)

全体的に 30% 程度小さくなった。その原因は歯車の質量の全部が一樣に加振されなかったためと考えられた。また、歯車対 ② の歯幅 b は 22 mm であるが、歯面変形に影響を及ぼす有効歯幅 b_e は 14 mm である。そこで、軽負荷時のたわみのほとんどは歯面変形によるものなのでばね特性は有効歯幅に比例すると仮定し、歯車対 ① のばね特性に 1.4 倍し歯車対 ② のばね特性との差を求めて示せば曲線 A のようになる。曲線 A が示す誤差が小さいことからこの仮説は正しいと考えられる。

以上によって本実験の試験歯車における片当たりのないときのばね特性は次のようにまとめられる。

Hertz 理論によれば表面変形と力の関係は

$$\delta_{pv} \propto \left(\frac{r_1 + r_2}{E^2 r_1 r_2} \right)^{1/3} \times F^{2/3} \quad (6)$$

ただし、 r_1 と r_2 はそれぞれ歯面の曲率半径、 E はヤング率 ($=2.1 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$) である。

式 (5)、(6) に歯車対 ② のデータを代入すれば片当たりのない軽負荷歯車対のばね特性は

$$\frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{8.5 \times b} + \frac{2}{3} \times 6.69 \times 10^3 \times \frac{1}{b_e} \times \left(\frac{r_1 + r_2}{E^2 r_1 r_2} \right)^{1/3} \times \frac{1}{\sqrt[3]{F}} \quad (7)$$

4.2 片当たりのある場合のばね特性の測定結果

歯車対 ② を用いて、片当たりのある場合ピッチ円上で 1 歯かみあいしているときの力とたわみの関係を求め図 6 に示す。図中の $\angle$ は片当たりのないように慎重に調節したときを $\angle = 0$ とし、片当たりするように一方の軸受台を他方に対し傾けたとき歯面が離れる量である (図 7 を参照)。

片当たりのある場合、歯面は図 7 のように接触していると考えられる。図 (a) は歯面を歯形方向からみた場合、図 (b) は歯筋方向からみた場合である。

片当たりのない場合、歯面にかかる力は図 (b) の

Fig. 6 Relative displacements of a pair of gear teeth (Misalignment condition)

(a) view of profile direction (b) view of face wide direction

Fig. 7 Contact state of a pair of gear teeth

点 P_1 - P_2 線にかかるが、片当たりのある場合は点 P_1 に集中する。従って、片当たりのある場合曲げによるたわみ ($\delta_1 + \delta_2$) は同じ大きさになると考えた。

また、歯面変形によるたわみを次の2つの仮説にあてはめてみた。

仮説(1): δ_{pv} は Hertz 理論に従うもので δ_{pv} の大きさは力の $2/3$ 乗に比例する。この場合、全たわみ δ と力の関係は式(8)のようになる。

$$\delta = \frac{1}{k_1''} \times F + \frac{1}{k_2''} \times F^{2/3} \quad (8)$$

ただし、 k_1'' は片当たりのある場合曲げによるたわみによるばね特性を示す係数で、片当たりの大きさに関係なく同じである。 k_2'' は歯面変形によるばね特性を示す係数で片当たりの大きさによって変わる。

仮説(2): 図(a)のように曲率半径 r_1 と r_2 をもつ2つの曲面が δ_{pv} たわむと点 M と点 N が接触し、接触長さは $2a_1$ になる。そのとき歯筋方向では図(b)の点 M' と点 N' が接触し接触長さは b_1 になる。 b_1 の大きさは幾何学的に求めることができる。

$$b_1 = b_e \times \delta_{pv} / \Delta \quad (9)$$

Table 2 Spring characteristics and standard deviation by use 2 hypothesis

Δ μm	Theory (1)			Theory (2)		
	k_1''	k_2''	Stand. dev.	k_3''	k_4''	Stand. dev.
12	62.6	31.9	0.39	42.8	-33.3	1.32
37	62.6	18.1	0.55	42.8	22.0	0.19
64	62.6	9.1	0.56	42.8	6.2	0.75
120	62.6	6.7	0.46	42.8	4.1	1.39

Fig. 8 Actual spring characteristics of a pair of gear teeth (Misalignment condition)

従って、接触面は図(c)のような半楕円面になる。また、接触面上の応力分布は図(d)のようになる。

幾何学的な関係から求めた図中の式を用いてまとめると、この理論でたわみと力の関係は

$$\delta = \frac{1}{k_3''} \times F + \frac{1}{k_4''} \times F^{1/2} \quad (10)$$

ただし、 k_3'' , k_4'' はそれぞれ式(8)の k_1'' , k_2'' に相当する。

2つの仮説を用いて図6の測定値を代入し、最小2乗法により係数および標準偏差を求めたのが表2である。

標準偏差はいずれも仮説(1)の方が小さく、つまり測定値をよりよく表していると考えられる。その理由としては、図(c)の楕円接触面の左半分がないため図(d)の応力分布が図(e)のようになり、Hertzの応力分布に近くなったためであると考えている。

図8は式(8)を力に関して1回微分し、片当たりのある場合の歯面のばね特性と力関係を求めたものである。小さい片当たりでもばね特性に大きく影響を及ぼしている。

無次元化した片当たり Δ' ($=\Delta/b_e$) が歯面変形に及ぼす影響を調べた。 Δ' と k_2'' を用い、最小2乗法を用いて誤差の一番小さい条件を求めると式(11)のようになる。

$$\delta = \frac{\Delta'^{2/3}}{k_0} F^{2/3} \quad (11)$$

Fig. 9 Relationship between dimensionless displacement vs. dimensionless misalignment

Fig. 10 Relative displacements of a pair of gear teeth (Case of double flank meshing)

ただし、 k_0 は比例定数で、本実験装置の場合 $k_0 = 1.369$ であった。図9はたわみと片当たりを無次元化したもので、●は式(8)による値、曲線は式(11)による値である。図9は式(11)が片当たりのある場合のたわみの大きさをよく表していることを示している。

しかし、この式は曲げによるたわみは集中力により発生するという仮定上に成り立つ。従って、 Δ が非常に小さいときと片当たりのない場合とは一致しない。

力とたわみの大きさの関係はこのほか、歯面の粗さ、接触状態などによって多少変わるであろうが、式(7)、(8)、(11)を用いてある程度の推定はできると思う。

5. 実際のかみあいにおける歯の接触特性

5.1 2対歯かみあいの場合のばね特性

図10に歯車対⑪を用いて片当たりのない場合、1対歯かみあい（かみあい点がピッチ円上）と2対歯かみあい（かみあい点がピッチ円上から同じ量離れている）の場合の力とたわみの関係を示す。2つの歯車に

Fig. 11 Actual spring characteristic of a pair of gear teeth (Case of double flank meshing)

Fig. 12 Example of decay displacement

Fig. 13 Damping ratio of a pair of gear teeth

は $1 \mu\text{m}$ の法線ピッチ誤差があり、2対歯かみあいの場合でも最初はたわみ量が1対歯かみあいの場合とはほぼ同じである。この時は2対歯かみあいの場合でも実際は1対歯しかかみあっていないと考えられる。図11は図10を用いてばね特性と力の関係を求めたものである。2対歯かみあいの場合、途中でばね特性が急になるところがある。そこが実際1対歯かみあいから2対歯かみあいに変わる場所と考えられる。

5.2 歯面の減衰比

図12は歯面の減衰比を求めるために動の実験の信

号を電磁オシログラフに記録した例である。図 12 のような記録をまとめれば図 13 のようになる。図の縦軸は記録紙上振幅 (mm)，横軸は波の数である。○, ●, △, ▲ は実測値で実線はそれぞれの荷重に対する近似線，点線は減衰比 $\xi=0.03$ の線である。図 13 から歯面の減衰比は荷重の大きさによる傾向はなく，0.03 程度の大きさであることが分かった。

6. 結 論

軽負荷歯車の歯面の接触特性を求めるために静的，動的実験を行った結果，次のことが明らかになった。

- (1) 軽負荷の場合歯面のばね特性（こわさ）は非線形性が強く，一般の動力伝達用歯車のばね定数に比べ 1/15 から 1/7 程度であった。
- (2) 動的実験から換算したばね特性は静的実験で求めたばね特性に比べ 30% 程度小さかったが傾向は一致した。
- (3) 片当たりのある歯車対の接触特性が得られた。片当たりのある場合も応力の分布は Hertz 理論

による応力分布に近いことが分かった。また，小さい片当たりでも歯面のばね特性に大きく影響を及ぼしている。

- (4) 2 対歯かみあいのとき法線ピッチ誤差がある場合は，ピッチ誤差分歯がたわむまで実際は 1 対歯かみあいすることが分かった。
- (5) 歯面の持つ減衰比は荷重の大きさに関係なく 0.03 程度であった。

以上で求めた軽負荷時の接触特性を用いて軽負荷時の歯車の衝突振動に関する理論解析を進めることにする。

参 考 文 献

- 1) 林 輝，金 炯均：歯車の衝突振動のモードについて，精密工学会誌，54，7（1988）1346。
- 2) 金 炯均，林 輝：歯車の衝突振動について，昭和 61 年度精密工学会春季大会学術講演会講演論文集（1986）402。
- 3) 石川二郎：日本機械学会論文集，17，59（1951）103。

—精密工学会刊行図書のご案内

「精密工学シリーズ」

精密工学会編・(株)オーム社発行

工学における精密工学の役割がますます重要になり，すべての工学分野の基礎として位置付けられる時代をむかえつつあります。本シリーズは，学会として精密工学分野を新しい視点で体系化し，かつ幅広く理解されることが必要と考え，精密工学・工業に携わる人々に有効な知識をわかりやすく提供しようとするものです。

「精密機構」（大輪武司ほか著） A5判・216 ページ・発行 62 年 4 月・定価 3 000 円

目 次 1 章・序章／2 章・精密位置決め機構／3 章・情報機器の精密機構／4 章・光学機器の精密機構／5 章・精密回転機構／6 章・精密機構のための超精密測定法

「研削工学」（竹中規雄ほか著） A5判・206 ページ・発行 62 年 5 月・定価 3 200 円

目 次 1 章・研削工学の概説／2 章・研削力学／3 章・研削表面工学／4 章・研削砥石工学／5 章・研削動力学／6 章・研削技術／7 章・研磨加工

「自動組立の基礎」（牧野 洋ほか） A5判・180 ページ・発行 62 年 6 月・定価 2 700 円

目 次 1 章・自動組立システム／2 章・製品設計と工程設計／3 章・移送／4 章・部品自動供給装置／5 章・部品の整列・選別の技法／6 章・装入／7 章・結合／8 章・計測／9 章・組立機械の制御／10 章・自動車用メータゲージの組立／11 章・腕時計の自動組立

お申込みは書店にしてください。

なお，会員の方で，一括して 10 部以上購入される場合は，定価を 1 割引きに致します。その場合は本会へお申込み下さい。発送，代金の請求はオーム社より行います。

また，大会，講習会開催時等に，期間限定割引販売を予定しています。