非線形要素を考慮した機械構造変更予測法*

—— モーダル解析の応用法 ——

大久保 信 行** 望 月 貴 裕***

Development of Structural Modification Method
in Consideration of Non-linear Elements

Nobuyuki OKUBO and Takahiro MOCHIZUKI

The modal synthesis method for mass, stiffness or damping structural modification is so extended as to take into consideration of non-linear elements. First the experimental modal analysis is used to characterize the non-linear elements, like rubber mounts, engine mounts, etc. with respect to the frequency of external force but also to the acceleration level. Then a new method of structural modification developed can predict when the original structure is modified by non-linear elements. In addition to numerical examples, the method is applied to an actual simple structure.

Key words : modal analysis, non-linear element, structural modification

1. はじめに

現在の機械設計においては、機械の高性能化の要求に伴い機械の動特性を把握することが重要となり、この動特性を把握する手法の一つである実験的モーダル解析が広く利用されている。さらに最近では、モーダル解析結果に基づき、構造物の構造変更後の動特性を予測する手法が開発され実用化されている¹⁾²⁾。

このように構造変更後の動特性を予測できることは構造物の設計段階において動特性改善のための試作回数を減らすことが可能となり、非常に有効である。

しかし構造物の動特性の改善要求がさらに高度で複雑、すなわち広域の周波数や振幅にわたり動特性を改善しなければならなくなった今日では、構造物の一部に非線形要素を取り入れ、その改善要求に対応しようとしている。そのため構造変更後のばねおよび減衰特性が線形であることを前提としている従来の手法では周波数や振幅依存性を有する非線形要素を考慮しながら構造変更後の動特性を予測することは困難である。

このために、非線形振動理論に基づき適当な非線形モデルを仮定した場合の予測法もいくつか発表されているが³⁾⁴⁾、この非線形モデル化が実際の非線形要素

を適切に表現できているかは明らかではなかった。

そこで本論文では、実験的モーダル解析を利用し、まず対象の非線形要素の非線形性を定性的、定量的に簡便に求める実験方法を考案し、この結果に基づき、従来の構造変更予測法を拡張し、モーダルパラメータ(固有振動数、減衰比、振動モード)によって記述された全体構造物の一部をその非線形要素により、構造変更した際の動特性変化の予測法について述べる。さらに本手法の数値シミュレーションおよび実際の構造物への適用例を示し、その有効性を確認する。なお、対象とする実際の非線形要素としては、最近の音響機器、情報機器等の防振に用いられるゴムばねや、自動車用エンジンのマウントを想定している。

2. 非線形要素の非線形性の定量化

構造変更後の動特性を予測するためには構造変更部分の要素の特性、例えば、ばね特性および減衰特性を知る必要がある。これらの特性を求めるため、本研究では変更する非線形要素の一端に適当な質量を付加し、他端を固定した1自由度系として測定した伝達関数より、その系の非線形ばねおよび減衰特性を定量化する方法を採用する。

質量 M と、周波数 ω およびその要素の両端間の相対変位 X の関数と仮定した非線形ばね $K_{NL}(\omega, X)$ と非線形減衰 $C_{NL}(\omega, X)$ から成る1自由度系の外力 F に対するコンプライアンス伝達関数 (X/F) は、周波

* 原稿受付 昭和62年6月11日。昭和62年度精密工学会春季大会学術講演会(昭和62年3月28日)にて発表

** 正 会 員 中央大学理工学部(東京都文京区春日1-13-27)

*** 学生会員 中央大学大学院

Fig. 1 Frequency response functions (FRF) of non-linear element (weight 280 gf)

数領域において次のように表される。

$$\frac{X(\omega)}{F(\omega)} = \frac{1}{-\omega^2 M + j\omega C_{NL}(\omega, X) + K_{NL}(\omega, X)} \quad (1)$$

式 (1) を動剛性 (F/X) に変形し、その実数部をとれば式 (2) が導かれる。

$$\operatorname{Re} \left(\frac{F(\omega)}{X(\omega)} \right) = -\omega^2 M + K_{NL}(\omega, X) \quad (2)$$

式 (2) から分かるように質量 M が既知で動剛性が測定されれば非線形ばね $K_{NL}(\omega, X)$ が求められる。また式 (1) を機械インピーダンス (F/V) に変形し、その実数部をとれば式 (3) が導かれる。

$$\operatorname{Re} \left(\frac{F(\omega)}{V(\omega)} \right) = C_{NL}(\omega, X) \quad (3)$$

式 (3) から分かるように、機械インピーダンスが測定されれば非線形減衰 $C_{NL}(\omega, X)$ が求められる。

以上の手法を実際のゴムばね (直径 29 mm, 厚さ 12 mm, 重さ 8 gf) に適用した、ゴムばねに適当な質量 (重さ 280 gf, 550 gf, 930 gf) をのせ 1 自由度系として正弦波掃引で加振力を変化させ、それぞれのイナータンス伝達関数 (A/F) を測定した (図 1 (a))。また図中には、その際のゴムばねの両端の相対加速度 (測定においては加速度計を用いているので、相対変位の代わりとした) を (b) に示す。図中の実線、破線、点線、一点鎖線は加振力の弱い順に対応している。

この図から分かるように相対加速度の増大に従って固有振動数が下がり、振幅も減少している。すなわちこのゴムばねが相対加速度に依存する非線形性を有す

Fig. 2 Identified non-linear stiffness and damping of the element

ることが推測される。

そして先の非線形性の定量化の理論に従い、実際に測定した伝達関数とその際の相対加速度より非線形ばね定数と減衰定数を各周波数について相対加速度の関数として多項式近似し、滑らかな曲線とした。なお、ここではゴムばねにのせた 3 つの重さの異なる質量についてそれぞれ測定されたイナータンス伝達関数すべてのデータを使用している。

図 2 にこのようにして得られたゴムばねの特性を 3 次元表示する。図 (a) から分かるように、この特性を表す面は、線形の場合には平面、すなわち周波数、相対加速度に依存しないのに比し、曲面をなしており、周波数と相対加速度に依存する非線形性を有することが分かる。さらに詳しく観察すると周波数が高くなるにつれてばね定数が大きくなり、相対加速度の増大とともにばね定数が小さくなることが分かる。このばね定数の相対加速度依存性が図 1 に示す伝達関数の固有振動数を移行させている。同様に求めた非線形減衰定数も図中 (b) に示す。

なお、ここで仮定した非線形の種類としては、その非線形ばねおよび減衰特性が周波数および相対加速度の関数で表現できるものであり、すきまのように非連続な非線形には適していない。また、非線形の程度についても、本文中以外の実用要素に適用した実例から、極端な場合以外は実用可能であると経験されている。

3. 非線形要素を考慮した構造変更予測法の理論

まず構造変更の対象となる機械構造物の運動方程式は物理座標系で式(4)となる。

$$[M]\{\ddot{X}\} + [C]\{\dot{X}\} + [K]\{X\} = \{F\} \quad (4)$$

ただし、

$[M]$ ：線形質量マトリクス

$[C]$ ：線形減衰マトリクス

$[K]$ ：線形剛性マトリクス

ここで、式(4)の X はモーダル解析を行う際の機械構造物の測定点に対応している。いま、測定点数を m としモーダル解析によって n 組のモーダルパラメータが抽出されたとする。このモーダルパラメータの組の数は測定点数よりも少ないことが通常である。また対象の機械構造物が比例粘性減衰であると仮定すると各振動モードを列とする振動モードマトリクス $[\phi]$ を用いることにより、マトリクスの大きさが $m \times m$ の式(4)から $n \times n$ のモーダル座標系の運動方程式(5)が導かれる。

$$[m]\{\ddot{z}\} + [c]\{\dot{z}\} + [k]\{z\} = [\phi]^T \{F\} \quad (5)$$

ただし、

$[\phi]^T [M] [\phi] = [m]$ ：モード等価質量

$[\phi]^T [C] [\phi] = [c]$ ：モード等価減衰

$[\phi]^T [K] [\phi] = [k]$ ：モード等価剛性

$\{z\}$ ：モード座標

さて、対象の機械構造物の一部を非線形ばね $K_{NL}(\omega, X)$ と非線形減衰 $C_{NL}(\omega, X)$ によって表現される非線形要素により構造変更する場合を考える。構造変更後も比例粘性減衰の仮定が近似的に成り立つとすると、式(5)から式(6)が導かれる。

$$[m]\{\ddot{z}\} + [c]\{\dot{z}\} + (-[\phi]^T [C_L] [\phi] + [\phi]^T [C_{NL}] [\phi])\{\dot{z}\} + [k]\{z\} + (-[\phi]^T [K_L] [\phi] + [\phi]^T [K_{NL}] [\phi])\{z\} = [\phi]^T \{F\} \quad (6)$$

ただし、

C_L ：構造変更部のもとの減衰特性

C_{NL} ：構造変更部の構造変更後の減衰特性

K_L ：構造変更部のもとのばね特性

K_{NL} ：構造変更部の構造変更後のばね特性

各周波数 ω について式(6)の両辺が等しくなるように非線形ばね $K_{NL}(\omega, X)$ と非線形減衰 $C_{NL}(\omega, X)$ を決定し、式(6)を固有値解析することにより構造変更後の固有振動数と振動モードが算出される。

図3に非線形要素を考慮した機械構造変更予測法による機械構造物の構造変更後の動特性予測プログラムの流れを示す。本プログラムは、構造変更部の構造変

Fig. 3 Flow chart of proposed structural modification method

更前のモーダルパラメータ、構造変更部の構造変更前と構造変更後のばね特性および減衰特性、そして周波数の関数とした外力が入力データとして必要である。これらの入力データをもとに、まず周波数について構造変更部の初期相対加速度を計算し、構造変更部のばねと減衰の値を計算する。また外力の値も決定する。次に式(6)を固有値計算することにより周波数 ω に固有の構造変更後のモーダルパラメータが得られる。ここで、この構造変更後の新しいモーダルパラメータは他の周波数では異なることに注意する。

さらに新しく得られたモーダルパラメータをもとに応答点の加速度を計算し、前回に計算した応答点の加速度と比較する。比較した結果、応答点の加速度が一定値に収束しない場合には構造変更部のばねと減衰の値を再度計算し、一連の計算を繰り返す。そして応答点の加速度が十分に収束した時、周波数 ω におけるイナータンス伝達関数を決定し、次の周波数についても同様にイナータンス伝達関数を決定する。

4. 数値シミュレーションによる本手法の有効性確認

本手法で実構造物の構造変更後の動特性を予測する前に、3自由度数学モデルに適用し本手法の有効性を数値シミュレーションにより確認する。

Fig. 4 Numerical simulation for 3-dof model

図4に示すように構造変更前は線形3自由度系を仮定する。構造変更部は図のようにばね K_1 と減衰 C_1 であり、これらを図中 (b), (c) に示すような周波数と相対加速度の関数である非線形ばね K_{NL} と非線形減衰 C_{NL} に交換した。この3自由度系の運動方程式を固有値計算し、3組のモーダルパラメータを得た。

構造変更後の動特性の予測は2通り行った。1番目は3自由度系の運動方程式を固有値計算して得た3組のモーダルパラメータをすべて使った純数学的なものである。ところで実験的モーダル解析を実構造物に適用して得られるモーダルパラメータの組はその構造物自体が持つモーダルパラメータの組より少ない。そこで、数値シミュレーション時でもこの条件に近くなるように3組のモーダルパラメータのうち低次2組のモーダルパラメータを使用して構造変更後の動特性を予測した。これにより振動モードを用い運動方程式を縮小して構造変更後の動特性を予測するため、縮小操作による予測値への影響を見ることができる。

図5に M_1 を加振し M_1 を応答としたときのイナータンス伝達関数を示す。また表1にこれらの固有振動数と振幅を示す。図の点線は構造変更前の3自由度系の伝達関数を示す。実線は構造変更後のばねと減衰の値を物理座標系の運動方程式に代入し、この運動方程

Fig. 5 Predicted FRF of 3-dof model due to structural modification

Table 1 Comparison of predicted and exact natural frequencies and amplitudes

Mode #	Exact		Predicted (3 Modes)		Predicted (2 Modes)	
	Freq.	Amp.	Freq.	Amp.	Freq.	Amp.
1	5.91	1.29	5.91	1.29	6.30	1.61
2	20.50	1.72	20.50	1.71	20.50	1.08
3	29.50	3.63	29.50	3.63	—	—

Freq. ; Hz, Amp. ; $m/(s^2N)$

式から直接に伝達関数を決定したものでこれを正解値とする。3組のモーダルパラメータすべてを使用し本手法により構造変更後の動特性を予測し得られた伝達関数は図の実線と重なっている。

また破線が低次2組のモーダルパラメータを使用し本手法により予測した構造変更後の伝達関数である。図の破線から分かるように低次2組のモーダルパラメータを使用した場合には構造変更後の動特性も低次の2組しか表れない。また、表からも分かるように固有振動数とその振幅において低次2組のモーダルパラメータしか使用しない場合には、3次モードの影響が考慮できないことと振動モードによる縮小操作上の誤差により正解値とのずれが認められるが実用上は十分な精度である。

5. 簡単な実構造物への適用

図6に示すように口型フレームの両端に同じ特性のゴムばねを取り付け、ゴムばねの両端を固定支持した構造物に対し本手法を適用した。

加振方法は正弦波掃引を行い、応答検出には加速度計を使用し測定点は加振方向に10点とした。測定周波数範囲は0~300 Hzで構造変更前に測定した伝達関数を解析した結果3組のモーダルパラメータが抽出された。図7の点線に示すイナータンス伝達関数は、図

Fig. 6 Frame structure under test

Fig. 7 Predicted and measured FRFs of frame due to structural modification

6に示すようにゴムばねを取り付けたフレームの内側の部分を加振し、同じ部分を応答点としたものである。

構造変更は口型フレームの両端の線形ばねを、図2に示した特性をもつゴムばねに2つとも交換した。本手法により構造変更後の予測した伝達関数の精度を判断するために実際に構造変更した構造物の伝達関数も測定した。加振方法や応答検出方法は構造変更前と同様に正弦波掃引加振を行い加速度計によって応答を検出した。図7の実線が実際に構造物を構造変更した際のイナータンス伝達関数である。

一方、本手法をこの構造変更に適用した。入力データは、構造変更前に実際に測定、解析して得られた3組のモーダルパラメータと前述の理論に基づき、あらかじめ測定しておいた構造変更部の構造変更前のゴムばねの特性および構造変更後のゴムばねの特性と構造変更後に伝達関数を測定した際の加振力のスペクトルである。これらの入力データを先のプログラムに入力して予測した構造変更後のイナータンス伝達関数を図7の点線に示す。また表2に実際に構造変更し測定した固有振動数と本手法により構造変更後の予測した伝

Table 2 Comparison of predicted and measured natural frequencies

Mode #	Measured Hz	Predicted Hz	Error %
1	72.96	70.10	-3.9
2	117.82	114.20	-3.1
3	278.63	267.70	-3.9

Table 3 MAC of predicted and measured mode shapes

	Predicted modes		
	1	2	3
Measured modes 1	0.962 39	0.017 26	0.320 57
2	0.026 01	0.666 41	0.028 69
3	0.284 10	0.105 90	0.533 57

達関数より求めた固有振動数の比較を示す。

表から分かるように実際に構造変更し測定した固有振動数と本手法により予測した伝達関数より求めた固有振動数の誤差は、3モードとも4%弱であり精度よく予測できている。また図7より振幅面からも特に1次モード、2次モードは精度よく予測されていることが分かる。

また、実際に構造変更し測定した伝達関数を解析して得られた振動モードと本手法により予測した構造変更後の振動モードの相関を表3に示す。この振動モードの相関は、MAC (Modal Assurance Criterion) と呼ばれるもので²⁾、その値は0~1の間をとり、0の場合は無相関で1の場合は振動モードが一致していることを表す。表より、実際に測定、解析して得た振動モードと本手法によって予測した振動モードの対応がとれていることが分かる。また表において高次の対角のMACの値が低いのは、本手法による予測で4次モード以上の影響を考慮していないためと考えられる。

また、ここでは構造変更後も比例粘性減衰を近似的に仮定しているため、変更前に比べ外力のレベルが大きく異なる場合の予測に関しては誤差が大きくなると考えられる。

以上のことから本手法が実構造物においても構造変更後の動特性を予測する場合にも有効的であることが確かめられた。

6. 結 論

以上、本論文により下記のことが結論づけられる。

- (1) 非線形ばねおよび非線形減衰を実際に測定した伝達関数より定量化する方法を確立した。
- (2) 非線形要素を考慮した機械構造変更予測法を数学モデルに適用し、その有効性を確認した。

- (3) 本手法を簡単な実構造物に適用し、構造変更後の動特性を精度よく予測できることを確認した。
- (4) 構造物の設計段階において、本手法を用いることにより非線形要素を考慮しながら構造変更後の動特性を予測することができるため構造物の最適な構造変更設計に有効である。

参 考 文 献

- 1) 大久保信行：機械のモーダルアナリシス，中央大学出版部

- (1982).
- 2) D. J. Ewins: Modal Testing: Theory and Practice, Research Studies Press, England, (1984).
- 3) H. Ito, E. Kobayashi & S. Murai: Non-linear System Simulation by the Modal Method, Proc. 2nd IMAC, Vol. 1, (1984) 528.
- 4) H. Zui, E. Imanishi, Y. Hamazaki & T. Fujikawa: An Improved Component Modal Synthesis Method Using Retrtransformed Physical Coordinate and its Application to Nonlinear Dynamics, Proc. 5th IMAC, Vol. 1, (1987) 300.

昭和 62 年度エンジニアリング産業の実態と動向

エンジニアリング振興協会（理事長・内藤雅喜氏）は、このほど標記の件について 107 社のアンケート調査に基づいて作成した報告書をまとめた。

概要は次のとおり。

全般的動向＝61 年度の受注高は 9 兆 636 億円（同一企業ベースでは対前年度比 1.0% 減）で依然として低迷状況を脱していない。特に国内は 7 兆 4 226 億円で対前年度比 10.3% 増となったのに対し、海外が 1 兆 6 409 億円となったのが主な原因である。この結果、海外比率は 18.1%（60 年度は 26.4%）と、ついに 20% 台を割り込んだ。かつてエンジニアリング産業の成長の糧であった海外需要が低迷、内需主導型に転換せざるを得ない状況となっている。

市場動向と業界構造＝プラント施設別構成比では都市・社会開発システム、環境衛生システム、通信プラントシステムがシェアを上げ、化学、鉄鋼プラントの低下が著しい。プラント輸出にかわって内需・情報関連の業種および分野が伸びている。62 年度は輸出も若干回復の兆しが見えるものの、今後の成長期待分野も内需・情報関連となろう。

62 年 7 月時点のエンジニアリング事業部門の従業員数は重厚長大型産業（総合建設などを除くほとんどの業種）を中心とした雇用調整を反映、10 万 9 665 人で前年比 3.1% の減となった。関連会社の設立については新事業分野進出、雇用調整をねらった分社型展開が目立ち、同業界が構造調整過程にあることを裏付けている。

国際化と内需＝円高対策については、「守り」と「攻め」の二つの側面がある。「守り」は経費削減、調達品・原材料の単価切下げ、人件費の切下げなどである。また「攻め」の面では選別受注、第三国調達の拡充、優位分野での展開などがある。

また実施済みなし必要とする国際化の施策について

も、もっとも多い回答は第三国調達となっており、機器・資材の海外調達はすっかり定着した感がある。さらにエンジニアリング拠点の設置、海外企業への下請け発注という国際分業関連の施策も 2 位になっており、国際化に対する意識はかなり高まったといえる。回答から推測すると海外案件を手掛けることの多い企業はほとんど（80% 以上）がローカライゼーション問題に取り組んでいることも明らかになった。

一方、エンジニアリング産業が力を入れている内需拡大分野としては、環境整備プロジェクト、特定大型プロジェクト、都市再開発プロジェクト、地域開発プロジェクト、交通網整備プロジェクト、電力プロジェクトがあり、社会資本、居住環境の整備を対象としたものが大半である。特に特定大型および都市再開発プロジェクトへの注力度は業種の枠を超えた圧倒的なものとなっており、業種ごとの技術力・営業力を駆使した異業種間協力を踏まえたビジネスチャンスへの対応が期待される。

課題＝エンジニアリング企業各社の最重視テーマは新事業分野への対応である。現在、進出中および計画中の新規分野は、バイオテクノロジー関連、都市再開発関連、新エネルギー関連が上位 3 分野である。具体的な展開事例としては、①都市再開発・地域開発などのプロジェクト、②ハイテクマテリアル・医薬品などの素材製造業、③コージェネレーションなどのエネルギー関連、また特徴的なことは各業種とも、ほとんどの新規分野に進出しており、今後、異業種間協力の可能性などが考えられる。

どちらにしても激変する産業社会の中で、新しい存立基盤を確立するためにはエンジニアリング産業そのものの通念を新たにする必要があり、現在、エンジニアリング振興協会で策定中のエンジニアリング産業の中期展望の完成が期待されている。

（服部 敏夫）