最近のマイクロメカニクス*

皆川 七郎**

Recent Developments in Micromechanics / Sitiro MINAGAWA

Key words: micromechanics, elasticity, plasticity, dislocation, disclination, Cosserat theory, micropolar theory, characteristic length, micro-structure

1. 緒 論

マイクロメカニクスは、材料力学の一分野であって、材料のミクロな構造や欠陥が、そのマクロな性質に及ぼす影響を、力学の立場から検討することを目的とする。古典的な材料力学は、材料を連続体と仮定することから出発する。これに対して、マイクロメカニクスは、材料の連続性を何らかの意味で否定するのであるが、それでもなお、不連続性を考慮した連続体という、一見、矛盾した立場が存在する。転位や欠陥の連続分布、微視構造を有する弾性体、などの考え方がこれに属する。本稿は、このような立場から、研究の流れを展望しようとするものである。

現在の材料力学の理論体系は、19世紀のエーテル理論でほとんど完成されたと見ることが出来る。マイクロメカニクスも、その起源はまずそのあたりに求めるべきであろう。多くの人々は、コッセラ兄弟の最後のエーテル理論、現在、コッセラ集合体の理論と呼ばれているもの、をその起源とする。しかし、生体の力学に関する研究の歴史も古く、その前史として無視できないであろう。但し、ここでは歴史的記述に深入りすることは避け、マイクロメカニクスの現状を、主として連続体力学の立場から、展望してみようと思う。

2. 微視構造と連続体

文献1)によると、変形連続体は、物質点の集合であって、連続の濃度を有する。濃度は、これを質量密度とおきかえてしまっても、さほどの支障はないので、

ここでは、物質点(material point)について考えてみる。物体を分割しても、その物理的性質に変化は生じない。この分割を限りなく繰り返して行くと、幾何学的な点にまで到達する。物体の物理的性質は、分割によって変化しないと考えるのだから、ここで得られた幾何学的な点は、分割前の物体と、同じ物理的性質を持っていると考えられる。このような点が物質点であって、物体のこのような物質点への分割可能性と、その物質点相互の識別可能性が、よく知られているように連続体力学が、その前提として持つ、基本的な仮定である。

材料の微視構造を、上述の2つの仮定と関連づけて考えてみる。例えば、多結晶体は、マクロにみたときは連続体として等方性であっても、分割が進むにつれて結晶の異方性が現れる。また、等方性の材料を組み合わせて出来た複合材料は、マクロには異方性でも、その要素の内部にまで立ち入れば、等方性となる。このような場合、最も簡単な考え方では、分割の下限が存在するとし、それを長さで表して特性長(characteristic length)と呼んでいる。この場合、物質点は有限な大きさを持ち、それ自身ある種の構造を持つ。物質点を剛体と考え、したがって、それを識別する座標として、位置と方向が与えられるときに、コッセラ(又はマイクロポーラ)連続体であり、物質点自身が変形体と考えられるとき、連続体はマルチポーラ連続体、マイクロモーフィック連続体、微視構造を有する弾性体、などと呼ばれる。

物質点の識別について、まず、次のように考えておく。物質点から、物理的属性を取り除くと、幾何学的な点となり、物体は、このような幾何学的な点の集ま

* 原稿受付 昭和63年3月29日

** 電気通信大学(調布市調布ヶ丘1-5-1)

りとして幾何学的な空間（この場合は3次元ユークリッド空間の部分空間）となる。古典弾性論では、物質点と幾何学的な点との間の、このような、1対1の対応が与えられ、それが、変形の前後を通じて変わらないことを要請する。この場合、変形はユークリッド空間からユークリッド空間への写像として表現されることになる。

このような写像を与える代表的な例が、変形結晶をパーガス回路に沿って理想結晶上に展開する場合で、もし回路が転位（dislocation）を含むならば、その始点と終点との間にくい違いが生じ、変形前後の格子点の間の1対1写像は与えられないことになる（詳細は、文献2）など参照）。転位の発生や消滅を伴う変形では、ユークリッド空間から非ユークリッド空間への（又は、その逆）の写像として表現されることになる。

物質点がそれ自身微視構造を持つときには、位置だけではなく、その構造に生ずるくい違いも重要な意味を持ってくる。方向にくい違いが生ずるとき、これを転傾（disclination）と呼ぶことはよく知られている。これらは、後に述べる微分幾何学による欠陥の分布論で、位置と方向の不確定として、捩率と曲率に対応し、更に、微視構造に生ずるくい違いが、計量の不確定として解釈されるのである。

3. コッセラ（又はマイクロポーラ）連続体

物質点が剛体の自由度—位置と方向—を有する連続体の概念を始めて提案したのはコッセラ兄弟で、彼らは力学エーテルと電磁エーテルの統一を目的として、この理論を1897年から1909年にかけて、短い数編の論文と単行本の形で公表している³⁾。第二次大戦後、Günther が、この理論と転位論との類似性を指摘し⁴⁾、また、何人かの研究者が、材料の微視構造とコッセラの連続体理論との関連を論じた。例えば、複数個の質点の集まりを構成要素とする連続体⁵⁾、それ自体が運動し変形する要素の集まりとしての連続体の概念⁶⁾、などがある。この要素が剛体と見なされる時をマイクロポーラ連続体と呼んだのはEringenである⁷⁾⁸⁾（その歴史と解析例については、文献9)、10) 参照。本稿は、これらを補足するよう整理した）。

マイクロポーラ連続体には、応力 σ_{ij} のほかに偶応力 μ_{ij} が生じ、それらは、

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{ij,j} &= 0 \\ \mu_{ij,j} + \epsilon_{ijk} \sigma_{jk} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

を満たす。指標 $i, j, \dots$ は、1, 2, 3 のいずれかを取り、一つの式に同じ指標があるときは、それらについての加算記号 $\sum_{i=1}^3$ などが、省略されているものとし、 j は、

$\partial/\partial x_j$ を、 x_i は物質点の位置のデカルト座標、 ϵ_{ijk} はエディントンの交代記号である。

上述のように、各物質点は剛体の自由度—変位と回転の自由度—を有するので、それらを、変位ベクトルと回転ベクトル (u_i と ϕ_i) で表し、ひずみと回転勾配を、

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{ij} &= u_{j,i} - \epsilon_{ijk} \phi_k \\ \chi_{ij} &= \phi_{j,i} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

で定義する。 γ_{ij} と χ_{ij} は

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{jpq} (\gamma_{pi,q} + \epsilon_{pih} \chi_{qh}) &= 0 \\ \epsilon_{jpq} \chi_{pi,q} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

を満足する。これらが適合条件である。

構成式は、(応力・偶応力) 対 (ひずみ・回転勾配) の関係式として与えられる、Grioli¹¹⁾、Mindlin-Tiersten¹²⁾ などがこれを与えている (Truesdell-Toupin¹³⁾ によると、はじめて構成式を与えたのは、Hellinger¹⁴⁾ である)。等方性を仮定したときでも、構成式の作り方は色々ある。例えば、

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{ij} &= (A + \alpha) \gamma_{ij} + (A - \alpha) \gamma_{ji} + \lambda \gamma \delta_{ij}, & \gamma &= \gamma_{pp} \\ \mu_{ij} &= (B + \beta) \chi_{ij} + (B - \beta) \chi_{ji} + \rho \chi \delta_{ij}, & \chi &= \chi_{pp} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

あるいは、通常の弾性論との対応を考えやすいように、

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{ij} &= G \left\{ \left(1 + \frac{C_1}{2} \right) \gamma_{ij} + \left(1 - \frac{C_1}{2} \right) \gamma_{ji} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \gamma \right\} \\ \mu_{ij} &= GL^2 \left\{ \left(1 + \frac{C_2}{2} \right) \chi_{ij} + \left(1 - \frac{C_2}{2} \right) \chi_{ji} \right. \\ &\quad \left. + 2C_3 \delta_{ij} \chi \right\} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

あるいは、

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{ij} &= (2\bar{\mu} + \bar{\kappa}) e_{ij} + \bar{\kappa} \epsilon_{ijk} (r_k - \phi_k) + \bar{\lambda} e \delta_{ij} \\ \mu_{ij} &= \bar{\gamma} \chi_{ij} + \bar{\beta} \chi_{ji} + \bar{\alpha} \chi \delta_{ij} \\ e_{ij} &= \frac{1}{2} (u_{j,i} + u_{i,j}) \\ r_k &= \frac{1}{2} \epsilon_{kij} u_{j,i} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

と与える。式 (6) はEringenの与えた形である。式 (4) の A, B, α, β などはいずれも物性定数で、これから特性長は、

$$\left. \begin{aligned} l^2 &= \frac{(A + \alpha)(B + \beta)}{4\alpha A} \\ h^2 &= \frac{2B + \rho}{4\alpha} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

で与えられる。 l と無次元量 $\Psi (= h/l)$ を用いることもある。

4. 材料の微視構造と新しい物性定数

これらの物性定数を、材料の微視構造との関連で与えることが出来れば、マイクロポーラ弾性論の、マイクロメカニックスの一分野としての意味が明確になるわけである。このための努力は繰り返されてきた。例えば、Ellis-Smith¹⁵⁾ は、Mindlin-Tiersten¹²⁾ や Koiter¹⁶⁾ の計算結果を用いて、平板の曲げ剛性が、 l の自乗に比例して増大すべきことから、 l を実験的に求めることを試みている。Schijve¹⁷⁾ は常温で析出硬化したアルミニウム合金について l は 0.03 mm 以下と結論している。彼らの計算は、回転が変形に拘束されるとした。いわゆる、偶応力論に基づくものである。さらに、Gauthier-Jahsman¹⁸⁾ は、これを、一般のマイクロポーラ理論に拡張し、さらに、丸棒のねじり剛性についても同様な理論計算を行い、高分子のエポキシ材を母材とするアルミニウム粒子による粒子分散型の複合材料について実験している。彼らによると、曲げ剛性やねじり剛性に、偶応力が影響することは明らかであるが、それは極めてわずかである。例えば、これらの剛性は、平板の厚さや丸棒の半径が l と同程度のとき、数%の増加がみられる程度で、このような薄い板や細い棒について実験してみても、この程度の増加は実験データのばらつきの中に埋没してしまうのである。

円孔のまわりの応力集中についても、同様なことが言われている。偶応力の発生は、応力集中を低下させる(例えば、文献 19))。その低下は円孔の半径が l と同程度となると、はじめて明らかに現れる。もし、 l を材料の粒径と同程度と考えると、円孔の半径が周囲の材料の粒径と同程度ということになり、材料の連続性を仮定した理論計算そのものがあやしくなってしまうのである。

Lakes は、ポリウレタンフォームとシンタクティックフォームの丸棒について、曲げ剛性やねじり剛性と丸棒の太さとの関係について、上述の実験を精密化することを試みている²⁰⁾。彼は、レーザ光源を用いた干渉計から、ねじれ、または、曲げ角度を精密に測定し、また、10 Hz の振動トルクを与えた動的な実験から剛性を求めている。彼の結論によると、ポリウレタンフォームは等方性コッセラ連続体とみなされ、6 個の物性定数が与えられ、特性長は、ねじりに対して 0.62 mm、また、曲げに対して 0.327 mm となる。フォームの空孔の直径は 0.05 から 0.15 mm ということなので、それとはほぼ同程度となる。また、シンタクティックフォームでは、古典論との差はほとんど認め

られず、特性長は、上述の例よりも 1 けた低い。したがって、これは等方弾性体と考えても良いことになる。

同様に、人間の骨について、その微視構造とミクロな変形、コッセラ連続体としてのその特性長、などを調べている²¹⁾²²⁾。この場合には、骨の乾燥の程度、年齢などの条件、採取後の処置、経過日時、などによって、データは大きく異なるが、曲げに対する特性長の平均値は 0.45 mm となる。

概して、静的な実験から物性値を求める試みは成功していない。これに対して、動的な実験データから物性値を求める方に成功の可能性はより高いように思われる。筆者はダイヤモンドの分散曲線に関するデータを理論値と比較して物性値を求めてみた²³⁾²⁴⁾。この例では、偶応力論とマイクロポーラ理論のいずれによる場合でも、偶応力に関連した物性値は極めて小さい。材料として、上記のポリウレタンフォームを用いてみたいが、波動の分散のデータで基礎としうるものがあるかどうか、それがあったら試してみたい。動的な取扱いに際しては、局所慣性モーメントを計算する必要がある。Askar は、 KNO_3 について、原子質量と結晶構造とからこの局所慣性モーメントを、その他の物性定数をラマン散乱に関する実験データから求めている²⁵⁾²⁶⁾。筆者の例では、これらの定数のすべてを分散曲線から求めた。

5. 転位と転傾の連続分布

転位論には、既に半世紀近い歴史があり、その中で里程標とも言うべき研究も多く出ている。ここでは特に、マイクロメカニックスとの関連を重視する意味で、Kondo の非リーマン幾何学による分布欠陥論とその流れに属する研究について述べる^{27)~29)}。

物体の変形とそれを表現する幾何学的な空間との関係について、簡単なたとえからはじめる。板は曲げに抵抗する。板の面に平行に荷重を加えると、板はその面に沿って変形する。この荷重がある値を越えると、突然、板はその面に垂直な方向に変形する。よく知られた平板の降伏、又は座屈、の現象である。このようにして曲がった板を、もとの平面に戻すには、これを細分して平面上に並べなおす必要がある。その結果、割れ目が生じ、重なりも出来る。もし、ここに 2 次元の世界があり、そこで生活する生物がいて、この現象を観察したとすると、彼らは、板の存在とそれに働く荷重については理解出来るが、3 次元空間への突出は理解できないので、この現象を荷重を受けて板がばらばらに壊れる現象として理解するであろう。このとき、3 次元空間に突出して出来た曲面は、この変形し

た、あるいは壊れた板の変形を表現する幾何学的な2次元の空間となる。

3次元物体についても同じことが言える。物体は外力を受けて変形する。この外力がある値を越えると、物体は外部の空間—この場合には6次元ユークリッド空間—に突出する。これをもとの3次元ユークリッド空間に戻すには、物体を切り刻んで、並べかえる必要がある。我々は3次元の世界に住んでいて、外部の世界を知らないのだから、この現象を荷重を受けた連続体の内部に、突然、不連続の発生する現象として理解するのである。そして、外部の空間に突出して出来た3次元の曲がった空間が、この物体の欠陥や重なり分布を表現する3次元の幾何学的な空間となるのである。この曲がった空間は、3次元リーマン空間と同等で、この空間の曲率がこの不連続の分布を表現する幾何学的な量になる。

一般的には、3次元非リーマン空間を考え、その2つの幾何学的不変量—振率テンソルと曲率テンソル—をそれぞれ転位と転傾に対応させる。これらのテンソルの間に成立する4つの幾何学的恒等式が転位と転傾の場の物理的な等式、例えば連続の式など、に対応するのである。

Bilbyらは、これとは独立に、少し遅れて、転位の場を振率のみあって曲率のない、いわゆる、遠隔平行性空間の幾何学的構造として表現することを提案し、後に曲率の概念を加えて一般の非リーマン空間を導入し、さらにスカウテンの Q を導入して、これを非計量空間にまで拡張した³⁰⁾³¹⁾。これは、材料を細片に切り刻むとき、その方法によって、その材料の特性長が変わることに相当する。筆者もその一つの例を、コッセラ連続体(または、一般の連続体)についてあげた³²⁾³³⁾。

6. 応力関数空間

応力の場を上記と並行に論ずることが出来る。3次元応力場は、マクスウェルの応力関数、又はモレラの応力関数で表現される。これらの応力関数を成分として持つ2階の対称テンソルを用いて、これをテンソル解析の範ちゅうで取り扱うことが出来ることは、早くから知られていた³⁴⁾。この2階のテンソルを、計量基本テンソルとしてリーマン空間を作ることを考えたのは、Schaefer³⁵⁾³⁶⁾である。その曲率テンソルから作られた、アインシュタイン・テンソルは応力テンソルに対応し、応力の釣合い条件などは、すべて、空間の幾何学的構造の中に組み込まれるのである。相対論では、重力ポテンシャルを計量基本テンソルとするリーマン

空間を作り、その空間のアインシュタイン・テンソルを物質エネルギーテンソルとする。重力場の性質は空間の、幾何学的構造の中に組み込まれるのである。上記の応力関数の作る空間—応力関数空間—はこれとよく似ている。

この空間に、さらに振率を加えて空間を非リーマン空間にまで拡張するとコッセラ集合体の応力と偶応力の場を表現する空間構造が与えられ、空間の接続係数から偶応力のための応力関数が導かれる³⁷⁾³⁸⁾。初めに述べた転位と転傾の場の非リーマン空間との対応は明らかである。第2次世界大戦の直後に出た論文で、転位と転傾の場と、応力と偶応力の場との対応が指摘されているが、これを空間の幾何学の立場から再確認することが出来る。応力関数空間は、欠陥の非リーマン空間の双対概念で、後者における欠陥や降伏の双対概念として、前者における、双対欠陥や双対降伏の概念が導入される。これらを、ミクロな欠陥や降伏に対応させる試みもある³⁹⁾。

7. 欠陥の場の電磁場類同とゲージ理論

転位の場と電磁場との相似性についてはよく知られている。Golebiewska-Lasota⁴⁰⁾、Golebiewska-Lasota-Edelen⁴¹⁾は、Kossecka-deWit⁴²⁾の転位と転傾の場の基礎式と電磁力学の基礎方程式との相似性に注目し、後者におけるゲージ変換とゲージ条件に関するよく知られた理論の類同を、欠陥の動力学に求めている。欠陥の動力学では、ゲージ変換は並進とある点まわりの剛体回転で構成され、この変換に対して、転位と転傾の場の基本テンソルは不変量となり、場の基礎方程式はNoetherの定理を通じて、変分原理から導かれる。Kadic-Edelen⁴³⁾はYang-Millsのゲージ場理論と対応させながら、Cartanの外微分形式を用いてこれを論じている⁴⁴⁾。微分幾何学による上述の理論からの一つの展開として興味深い。

文 献

- 1) 小谷正雄：連続体の力学，I，岩波書店（1934）。
- 2) 近藤一夫：不完全連続体の塑性および降伏理論について——非リーマン塑性論概要，材料科学，1（1964）10～20；63～72。
- 3) E. & F. Cosserat: Théorie des corps déformables, Herman et Fils, Paris, (1909)。
- 4) W. Günther: Zur Statik und Kinematik des Cosseratschen Kontinuums, Abh. Braunsch. Wiss. Ges., 10, (1958) 195。
- 5) R. S. Rivlin: Generalized Mechanics of Continuous Media, in *Mechanics of Generalized Continua* (ed. by Kröner), Springer, Berlin-Heidelberg-New York, (1968) 1-17。
- 6) A. C. Eringen: Mechanics of Micromorphic Continua,

- in *Mechanics of Generalized Continua* (ed. by Kröner), Springer, Berlin-Heidelberg-New York, (1968) 18-35.
- 7) A. C. Eringen : Linear Theory of Micropolar Elasticity, *J. Math. Mech.*, 15, (1966) 909.
 - 8) A. C. Eringen & E. S. Suhubi : Nonlinear Theory of Simple Microelastic Solids, *Int. J. Engg. Sci.*, 2, (1964) 189.
 - 9) R. Stojanovitch : Recent Developments in the Theory of Polar Continua, Springer, Wien-New York, (1970).
 - 10) 皆川七郎 : コッセラ連続体の力学とその周辺, 材料科学, 9 (1972) 289 ; マイクロポーラ連続体の変形と力学, 材料科学, 21 (1984) 118.
 - 11) G. Grioli : Mathematical Theory of Elastic Equilibrium (Recent Results), *Ergebnisse der angewandte Mathematik*, 7, Springer, Berlin-Göttingen-Heidelberg, (1962).
 - 12) R. D. Mindlin & H. F. Tiersten : Effects of Couple-stresses in Linear Elasticity, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 11, (1962) 415.
 - 13) C. Truesdell & R. Toupin : The Classical Field Theories, *Handbuch der Physik*, Bd. III/1, Springer, Berlin-Göttingen-Heidelberg, (1960).
 - 14) E. Hellinger : Die allgemeinen Ansätze der Mechanik der Kontinua, *Enz. Math. Wiss.*, 4, (1914) 602.
 - 15) R. W. Ellis & C. W. Smith : Thin-plate Analysis and Experimental Evaluation of Couple-Stress Effects, *Experimental Mechanics*, Sept. (1967) 372.
 - 16) W. T. Koiter : Couple-stresses in the Theory of Elasticity, I ; II. *Proc. Koninkl. Nederl. Akad. Wet.*, 67, (1969) 17-29 ; 30-44.
 - 17) J. Schijve : Note on Couple Stresses, *J. Mech. Phys. Solids*, 14, (1966) 113.
 - 18) R. D. Gauthier & W. E. Jahsman : A Quest for Micropolar Elastic Constants, *J. Appl. Mech.*, Trans. ASME, 97, (1975) E, 369.
 - 19) P. N. Kaloni & T. Ariman : Stress Concentration Effects in Micropolar Elasticity, *ZAMP*, 18, (1967) 136.
 - 20) R. S. Lakes : Experimental Microelasticity of Two Porous Solids, *Int. J. Solids Struct.*, 22, (1980) 55.
 - 21) J. F. C. Yong & R. S. Lakes : Experimental Study of Micropolar and Couple Stress Elasticity in Compact Bone in Bending, *J. Biomech.*, 15, (1982) 91.
 - 22) H. C. Park & R. S. Lakes : Cosserat Micromechanics of Human Bone : Strain Redistribution by a Hydration Sensitive Constituent, *J. Biomech.*, 19 (1986) 385.
 - 23) S. Minagawa : Diamond Crystals as Cosserat Continua with Constrained Rotation, *Phys. Stat. Sol. (a)*, 57, (1980) 713.
 - 24) S. Minagawa, K. Arakawa & M. Yamada : Dispersion Curves for Waves in a Cubic Micropolar Medium with Reference to Estimations of the Material Constants for Diamond, *Bull. JSME*, 24, (1981) 22.
 - 25) A. Askar : Molecular Crystals and the Polar Theories of the Continua : Experimental Values of Material Coefficients for KNO_3 , *Int. J. Engg. Sci.*, 10, (1972) 293.
 - 26) A. Askar : A Model for Coupled Rotation-displacement Modes of Certain Molecular Crystals, Illustration for KNO_3 , *J. Phys. Chem. Solids*, 34, (1973) 1901.
 - 27) K. Kondo : On Dislocations, the Group of Holonomy and the Theory of Yielding, *J. Jap. Soc. Appl. Mech.*, 3, (1950) 107, 146 ; On the Fundamental Equations of the Theory of Yielding, *ibid.*, 3, (1950) 184 ; The Mathematical Analysis of the Yield Points : I ; II ; III, *ibid.*, 3, (1950) 188 ; *ibid.*, 4, (1951) 5 ; 35.
 - 28) K. Kondo : RAAG Memoirs of the Unifying Study of Basic Problems in Engineering and Physical Sciences by Means of Geometry, I ; II ; III ; IV. Gakujutsu Bunken Fukyu-kai, Tokyo, 1955 ; 1958 ; 1962 ; 1968, Division C, D.
 - 29) 皆川七郎 : 場の理論としての転位論, 材料科学, 9 (1972) 271.
 - 30) B. A. Bilby : Bristol Conference Report on Defects in Crystalline Solids, The Physical Society, London, (1950).
 - 31) B. A. Bilby et al. : Continuous Distribution of Dislocations : A New Application of the Method of Non-Riemannian Geometry, *Proc. Roy. Soc. Lond.*, A, 231, (1955) 263 ; III, *ibid.*, A, 236, (1956) 481 ; IV. Single Glide and Plane Strain, *ibid.*, 244, (1958) 538 ; V. Twisting under Conditions of Single Glide, *ibid.*, 241 (1958) 92 ; VI. Non-metric Connexions, *ibid.*, 292, (1966) 105.
 - 32) S. Minagawa : A Non-Riemannian Geometrical Theory of Imperfections in a Cosserat Continua, *Arch. Mech.*, 31, (1979) 783.
 - 33) H. Günther & S. Minagawa : On the Metric and Non-metric Spaces for the Mechanics of Generalized Continua, *Ann. Phys.*, 7, 38, (1981) 415.
 - 34) C. Weber : Spannungsfunktionen des dreidimensionalen Kontinuums, *ZAMM*, 28, (1948) 193.
 - 35) H. Schaefer : Die Spannungsfunktionen des dreidimensionalen Körpers, *ZAMM*, 33, (1953) 356.
 - 36) S. Minagawa : Riemannian Three-Dimensional Stress-Function Space, *RAAG Memoirs*, 3, (1962) 69.
 - 37) R. Stojanovitch : Equilibrium Conditions for Internal Stresses in Non-Euclidean Continua and Stress Spaces, *Int. J. Engg. Sci.*, 1, (1963) 323.
 - 38) S. Minagawa : On Some Generalized Features of the Theory of Stress-Function Space with Reference to the Problem of Stresses in a Curved Membrane, *RAAG Memoirs*, 4, (1968) 99.
 - 39) S. Minagawa : Fatigue Limit Problem as Dual Yielding in Terms of Stress Functions, *RAAG Memoirs*, 4, (1968) 162.
 - 40) A. A. Golebiewska-Lasota : Dislocations and Gauge Invariance, *Int. J. Engg. Sci.*, 17, (1979) 329.
 - 41) A. A. Golebiewska-Lasota & D. G. B. Edelen : On the Gauge Transformations Admitted by the Equations of Defect Dynamics, *Int. J. Engg. Sci.*, 17, (1979) 335.
 - 42) E. Kossecka & D. de Wit : Disclination Kinematics, *Arch. Mech.*, 29, (1977) 633 ; Disclination Dynamics, *ibid.*, 29, (1977) 749.
 - 43) A. Kadic & D. G. B. Edelen : A Gauge Theory of Dislocations and Disclinations, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, (1983).
 - 44) D. G. B. Edelen : On a Closure of the Governing Equations of Defect Dynamics and the Resulting Theory of the Plastic State, *Int. J. Engg. Sci.*, 17, (1979) 441.