微視構造を有する材料の力学(I)*

——粒状体とき裂体

佐武 正雄**

Mechanics of Materials with Microstructure (I) -Granular and Cracked Materials /
Masao SATAKE

Key words: granular materials, cracked materials, micromechanics, damage mechanics, void, fabric, computer simulation

1. ま え が き

粒状体 (granular materials)¹⁾ と呼ばれている材料は、砂や砂利のように眼に見える程度の径約 0.5～500 mm の粒子の比較的均一な集合体をいう。さらに径の小さい粒子の集合体は通常粉体と呼ばれるが、やや異なった力学性状をもつ。また粒径が 1 m 以上になると、粒状体には違いないけれども、人間との相対的大きさが接近してくるので、取扱いに不便となるばかりでなく、材料として、単位体積当たりの総表面積が減少してきて、次第に単一の連続体に近づく。これは、あくまでも相対的なことではあるが、一応通常の粒状体の粒径は上述の範囲としておこう。

粒状体は個々にバラバラの粒子の集まりであるから、変形性がよい。器に入ればそれを満たし、あたかも流体のように振舞う。しかし、また平らな所に山を作って置くこともできる。粒状体全体の変形を考える際に、粒子相互の接触関係が変わらないものとし、個々の粒子の弾性変形によって解析することもできるけれど、通常は、粒をむしろ剛体と考え、粒子相互の接触関係が変わる (すなわちすべり) ことによって、結果として、全体の変形がもたらされると考えるのが普通である。本文でも、粒子個々の弾性変形は無視する立場で議論をすすめる。

粒子間にすべり (滑動) が起こる場合、これに抵抗するのは粒子間の摩擦、粒子と粒子のかみ合わせ (粒子は必ずしも滑らかな形状ではない)、また周辺粒子

による束縛等である。粒子の形状は必ずしも単一の形状でなく、また、その配列も必ずしも規則的ではない。従って、粒子相互のすべりに対する抵抗の内容は複雑で、個々の接触点で異なっていると考えられる。従来、巨視的な解析では、せん断抵抗についてモール・クーロンの法則が成り立つと考える。すなわち、材料内の応力成分により、

$$\tau \leq \sigma \sin \varphi + c \quad (1)$$

ただし、 σ, τ はそれぞれ垂直応力、せん断応力、 φ, c はそれぞれ内部摩擦角、粘着力と呼ばれる材料定数、として取り扱われてきた。式 (1) は実験結果ともよく適合し、いわゆる c - φ 解析として一般的にひろく用いられている。

しかし、粒状体の変形を記述する構成式をつくるためには、特に地震力のような複雑な荷重にも対応する構成式をつくり出すためには、従来の連続体的解析とは異なり、粒状体の微視構造に立ち入り、微視的な粒子の挙動を取り入れた解析を行うことが必要となってくる。最近、コンピュータによる計算のため構成式を整備することが緊要となってきたことや、地震の際の液化化現象なども解析できる構成式への要求が高まってきたこと、一方において、粒状体の挙動についてのシミュレーションの技術が普及し、従来、その数値をとり出すことができなかった粒状体内部の微視的変形機構や力の伝達などを容易に調べることが可能となってきたこと、従来の三軸試験でなく、円筒ねじり試験等によって主軸の回転等、複雑な応力経路を与える実験が可能となってきたこと、などによって、粒状体の微視的力学解析、すなわちマイクロメカニクスに対

* 原稿受付 昭和 63 年 3 月 28 日

** 東北大学工学部 (仙台市荒巻青葉)

する認識が深められ、その研究が急速に発展してきた。昭和62年10月、仙台・蔵王で「粒状体のマイクロメカニクス」に関する日米セミナー²⁾が開催されたのも、その一つの現れと考えることができる。

本文は、粒状体のマイクロメカニクスについて、粒状体と類似の解析が適用されているき裂体への応用も含めて解説することとする。まだ一般化していない考え方も取り入れて説明している点などについてはご寛容を頂きたい。

2. 微視構造とその表現

2.1 間 隙

粒状体は、粒子の空間へのパッキング（充てん）であるから、**間隙**（または空隙）をもっている。間隙は、通常、**間隙率** (porosity) $p = V_v / V$ や **間隙比** (void ratio) $e = V_v / (V - V_v)$ で表示される (V_v は間隙の体積, V は全体積)。この間隙は、粒子の形状、粒度分布（粒径の分布）等によるばかりでなく、またパッキングの仕方にも依存する。いわゆる、緩詰め、かた詰めがあり、それぞれ下限、上限をもっている。

粒状体において、通常変形中に粒子は破碎しないと考えるので、変形中粒子の形状は、つねに不変に保たれているが、間隙はつねに変化している。したがって、“粒状体の変形は間隙の変化によって生じる”ということもできる。この点は同様に空隙をもっている**多孔材料** (porous materials) と大きく異なる点である。

また、間隙は、間隙水と呼ばれる水によって満たされている場合があり、間隙水は間隙水圧によって、力の伝達に寄与する。間隙水の問題、特に粒状体の液状化は重要な課題であるが、本文では深く触れないこととする。間隙は、従来から、圧密など土の力学解析に取り入れられていたが、その本質を洞察して粒状体力学の解析を深めたものとして、最上と Cowin の研究をあげることができる。

最上³⁾ は、粒状体の状態が間隙比 e だけではなく、その偏差 s によると考え、**粒状体のエントロピー** と呼ばれる量 $\log W$ (W は粒状体の状態の確率) を e と s の関数で表した。また一方、粒状体のせん断ひずみ γ (2次元で考察しているのでスカラー、3次元の場合は等価せん断ひずみとする) により、

$$\log W = F(e - k\gamma) \quad (2)$$

とおくことができる (k は材料定数) と仮定し、これから、 s は e と γ の関数で表されることを示し、また、有名な最上の式

図1 粒状体内のメゾ領域

$$\sin \varphi = \frac{k}{1+e} \quad (3)$$

を導いた*。この式は粒状体の強度を示す内部摩擦角が、単純に初期の間隙比 e だけで決定されることを示したものと注目される。最上の理論は、粒状体の状態の考察に間隙分布の偏差を表す量を導入し統計力学的考察を行った点で画期的であり、極めて示唆に富むものである。

一方、Cowin⁵⁾ は、粒状体の流れに対する連続体的アプローチを考え、粒子の体積率 (solids content fraction) ν を導入し、 ν を含んだ連続体的構成式を導いた。粒子の体積率 ν は、 $1-p = (V - V_v)/V$ を各点を中心とするメゾ領域で考えることによって、位置の連続関数とし、解析に取り入れたものである。**メゾ領域** とは、図1のように、粒状体の内部に考えた粒径に比して十分に大きい（ただし大き過ぎない）径の球形領域をいい、粒状体力学で巨視的測度を導入する際にしばしば用いられるものである。Cowin の構成式において、 ν の勾配 $\nabla \nu$ が重要な働きをすることが注目される。また、極限平衡状態に対して、モール・クーロンと同一の条件式が得られることは興味深い。

間隙の一つの特徴は、それがスカラーであることである。しかし、最上の研究も示唆しているように、テンソル量であるひずみ（または応力）と関連して粒状体の変形特性を論じるためには、間隙というスカラーだけでは十分でないことは、容易に納得される。粒状体の特性をさらに精密に記述する第2の量は何か？ということが、最近10年の粒状体力学研究の中心課題となったのである。

2.2 ファブリックテンソル

間隙は、粒状体のパッキングの疎密を表す一つのバ

* 式(3)だけの誘導は、エントロピーを用いなくても可能である⁴⁾。

図2 接 触 法 線

ラメータである。しかし、パッキングの状態を示す測度は粒子の接触を考慮して与えることもできる。粒子と粒子は接触点において力を伝達する。粒子1個当たりの接触点数—配位数 (coordination number)— C が大きい程、力の伝達はよく、逆に変形性は低下する。 C が大きいことは、またパッキングが密で間隙率 p が小さいことを意味している。したがって、 C を間隙に代わるパッキングの疎密を示す測度と考えることもできる。一般に C は粒子ごとに異なった値をとるから、一定体積 V のメゾ領域に含まれる粒子数 N 、接点数 n から得られる平均配位数 $\bar{C} = 2n/N$ を用いる。

粒状体を一つのグラフに置き換えると、接点増加の可能性を示す仮想枝の数から、間隙のもつ余裕数 (redundancy number) R を定義することができる。平均余裕数 $\bar{R}$ もまた、粒状体のパッキングの疎密を示す一つのパラメータで、2次元の場合、 $\bar{C}$ との間に

$$\bar{R} = \frac{6 - \bar{C}}{\bar{C} - 2} \quad (4)$$

の関係があることが示される⁶⁾。

配位数は、粒状体の特徴である内部の接触から定義されるものであるが、間隙と同様に一つのスカラーである。しかし、粒子と粒子の接触は、図2のように方向をもっていることに注意しなければならない。接触方向は一方の粒子Aについて接触点における外向き法線 (単位ベクトル) n_i で示される。 n_i を接触法線 (contact normal) という。この接触法線のある領域での平均を考えてみよう。他方の粒子Bの外向き法線は $-n_i$ となるから、一つのメゾ領域で $\sum n_i$ を考えたのでは、0 になってしまう。0 にならない和としては、 n_i のダイアド積 $n_i n_j$ を考え、

$$\varphi_{ij} = \frac{1}{2n} \sum n_i n_j \quad (5)$$

という2階の対称テンソルを導入する。 n は接点数、

 図3 接触法線 n_i と枝の向き m_i

したがって $2n$ は領域内の $n_i n_j$ の個数であるから、 φ_{ij} は $n_i n_j$ の単純平均と考えることができる。 φ_{ij} をファブリックテンソル (fabric tensor) という*。 φ_{ij} のトレース φ_{ii} は1となる**から、 φ_{ij} は純粋に粒状体内部の接触の方向性、すなわち異方性⁹⁾を示す量となっている。もし、パッキングが等方的であれば、明らかに $\varphi_{ij} = \frac{1}{3} \delta_{ij}$ (2次元では $\frac{1}{2} \delta_{ij}$, δ_{ij} はクロネッカーのデルタ) となる。

粒子の接触方向については、モデル粒状体を用いた実験やシミュレーションによって、その分布を調べ、接触法線密度関数 $f(n_i)$ を求めることができる。 $f(n_i)$ を用いれば、

$$\varphi_{ij} = \int f(n_i) n_i n_j d\Omega \quad (6)$$

と記すこともできる (Ω は立体角を示す)。このように、 $f(n_i)$ を与えれば、ファブリックテンソル φ_{ij} は確定するが、逆に φ_{ij} を与えても、 $f(n_i)$ は一意に決定しないことに注意しなければならない¹⁰⁾。

接触する二つの粒子の中心を結ぶ線分 (枝 branch) の向き m_i と接触法線 n_i とは、球のパッキングの場合には一致するが、任意の粒子形状では一般に一致しない (図3)。したがって、上述のファブリックテンソルの定義の中の n_i の代わりに m_i を用いることが考えられる¹¹⁾。また、 n_i や m_i について、あるウェイト (例えば接触面積、枝の長さ、接触点での力学量等) を考え

* ファブリックは粒状体の微視構造の意で、ファブリックテンソルの名称は小田ら⁷⁾による。しかし、この概念はそれ以前からも粒状体解析に導入されていた⁷⁾。また、金谷⁸⁾は接触法線密度関数を近似するために高階 (ただし偶数階) のテンソルを導入し、これらをファブリックテンソルと称している。ファブリックテンソルの定義はこのように多様に提案され、若干の混乱を生じているが、ここでは簡明な式 (5) の定義を用いることとする。

** 式 (5) の $2n$ の代わりに、粒子数 N を用いれば、 $\varphi_{ii} = \bar{C}$ 、また、体積 V を用いれば、 $\varphi_{ii} = \rho \bar{C}$ 、ただし $\rho = N/V$ (充填率) となる。

ることもできる¹²⁾。

ファブリックテンソルは、粒状体内の接触方向の分布に関する異方性を示すものである。もし、粒状体が初期状態から、このような異方性をもつ場合、固有異方性 (inherent anisotropy) という。土や砂は多くの場合、粒子形状が球形ではなく、また重力によって堆積しているため、固有異方性をもっている。さらに、粒状体の特徴として注目されることは、応力 (一般に異方的) をうけると、最大主応力の方向の接触点が増加し、逆に最小主応力の方向の接触点が減少することである。このように、応力によって粒状体に誘発される異方性を誘導異方性 (induced anisotropy) という。この場合、応力テンソル σ_{ij} とファブリックテンソル φ_{ij} とは、共軸と考えられるが、さらに $\varphi_{ij} = \sigma_{ij}^\alpha / \sigma_{ii}^\alpha$ とおき、 α によって異方性誘導度 (inductivity degree of anisotropy) を定義する。2 次元の場合、主値を用いれば、

$$\alpha = \frac{\log \sigma_1 - \log \sigma_2}{\log \varphi_1 - \log \varphi_2} \quad (7)$$

となり、実験によれば、 $\alpha = 0.4 \sim 0.6$ となることが知られている⁶⁾。このことは、粒状体が、材料内の粒子に許容される移動や回転の可能なことを利用して、与えられた応力に対し、できるだけ有効に抵抗するように内部の構造を変化させると考えることができる。また粒状体の解析において、修正応力を考えると便利ながあるが、この場合も修正のための乗数としてファブリックテンソルが用いられることが多い。ファブリックテンソルは粒子のパッキング状態を、上述のように、接触法線 n_i (または枝の向き m_i) によって記述するものである。しかし、粒状体では、ほかに粒子の形状そのもののもつ異方性や間隙の形状の異方性等種々の異方性を考慮することも可能である。これらの異方性はそれぞれ独立ではないと考えられるので、その相互の関係を研究することが必要である。

2.3 クラックテンソルと損傷テンソル

き裂を含有する連続体をき裂体 (cracked material) と呼ぶ。き裂体の代表的なものは岩盤であり、き裂の性状にも種々あるが、ここではき裂は、余り顕著な規則性をもたず、基本的にはランダムに分布すると考える。

小田¹³⁾¹⁴⁾ は、き裂体の解析のためにクラックテンソルを導入している。この場合、クラックに面積や厚さ、及びその分布密度によってウェイトを付するが、法線方向の空間的分布を2階のテンソル (場合によってさらに高階テンソル) によって表示することは、粒状体のファブリックテンソルと全く同一である。小田はこ

のクラックテンソルが岩石の弾性コンプライアンスや透水性の解析に有効であることを示している¹⁴⁾。

また一方、材料の損傷を一つのテンソルで表現する試みが、いわゆる損傷力学 (damage mechanics) においてなされている¹⁵⁾。

損傷テンソルは、材料内に生じる損傷 (微視き裂) を (法線) 方向 n_i によって、 $an_i n_j$ と表し、その体積平均をとることにより、

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{V} \sum a n_i n_j \quad (8)$$

と定義される。ここに a は n_i 方向の損傷に対する不連続面の面積を示すウェイトである。このように損傷テンソルの定義はクラックテンソルと類似している。実質的な応力 σ_{ij}^* は、損傷テンソル Ω_{ij} を用いれば、見かけの応力 σ_{ij} に対し、

$$\sigma_{ij}^* (\delta_{jk} - \Omega_{jk}) = \sigma_{ik} \quad (9)$$

となると考えられ、 σ_{ij}^* を用いて解析をすすめるのが損傷力学の立場である。この方法は、構成式では σ_{ij} の代わりに σ_{ij}^* を用いるなど、考え方が簡明であり、京谷ら¹⁶⁾ は、この考えを岩盤の解析に応用している。しかし、単純な引張り場合は損傷を断面積の減少で評価することが合理的と考えられるが、せん断等の場合の評価は一般に難しい問題であろう。また、損傷の発展をどう定式化するか等研究課題も多い。

前述のクラックテンソルやファブリックテンソルも、目標は構成式に取り入れられることであるが、損傷テンソルの場合と異なり、これらは材料の異方性を表す量として構成式に取り込まれるのが一般的な考え方である¹⁷⁾。この考え方は損傷力学の立場より広いが、反面、力学的意味が明確でない場合もある。

2.4 第3の測度は?

粒状体の特性はその微視構造にあり、その第1の測度は間隙率、第2の測度はファブリックテンソルと考えることができる。しかし、粒状体の微視構造の特性がこの二つだけで完全に表現できるわけではない。それでは、第3の測度は何か? という問が提出される。

いま、ここで、この問に正しく答えることはできないが、いくつかの可能性について検討してみよう。

前ページの脚注に記したように、金谷は高階テンソルによって、ファブリックの特性を近似することを提案し、小田もその考え方をクラックテンソルに応用している。これらの場合、2階テンソル (通常ファブリックテンソル) だけでは不十分なものを4階以上の高階テンソルで表現しようとしているのである。

一方、岸野¹⁸⁾ は、材料における変形の微視的不均一性を表現する変形分散テンソルを導入して解析を行

い、巨視的なせん断ひずみと変形の不均一性との興味ある関係を示している。こういう偏差や分散を示す量が重要な働きをすることは、最上によっても示唆されており、粒状体力学の新しい研究方向と思われる。

完全な連続体に比較して、粒状体やき裂体では力の伝達が束縛され、逆に変形の自由度が増加している。損傷力学の立場では、これを有効な断面積の減少によってとらえようとしている。しかし、粒状体では粒子の回転の自由度なども考慮する必要がある、より複雑である。皆川¹⁹⁾は疲労の解析に不適合度テンソルを応用しているが、ひずみより高次のテンソルを導入して、変形の自由度の増加や、力の伝達の束縛を記述することも考えられる。不適合度に対して、仕事をする力の量は、粒状体では間隙力と呼ばれ、連続体では応力関数に相当するものと考えられる²⁰⁾。

粒状体やき裂体の幾何学を測定し、記述する技術として、ステレオロジー(Stereology)がある²¹⁾²²⁾。これに応用することは実用的な新しい方向であり、次章に述べるコンピュータシミュレーションや画像処理と併用して、研究の進展が期待されている。

3. コンピュータシミュレーション

粒状体力学の研究の一つの隘路となっているのは、内部の個々の粒子の挙動や力の伝達の状況を知ることが不可欠であるにもかかわらず、それが非常に困難なことである。円形粒子を用いた光弾性実験は、この問題解決の目的に沿ったものであるが、最近発達してきたコンピュータシミュレーションは、上記の目的をさらによく満たすものと考えられる。

コンピュータシミュレーションでは、二つの粒子の間にある単純な力学法則を設定し、イテレーションによって、各変形段階の粒子の配列を決定してゆくのである。Cundallによる手法²³⁾が広く用いられているが、岸野による方法²⁴⁾も有用で、液状化の解析などで成果が期待されている。Cundallのものが粒子の移動について動力学の方程式を用いているのに対し、岸野のものは静力学を基礎とし、粒子の接触部分に弾性ばねを考え、粒子の重なり合いに対して、反発力を生じさせ、このため生じた不釣り合い力を逐次解消してゆくものである。2, 3の例を示すと、図4は平均応力を一定に保ちながら、縦方向に圧縮、横方向に伸張を単調に加えた時の応力ひずみ関係である。この図は比較的緩詰めの砂に対する応力ひずみ関係と類似したものである。シミュレーションの対象としたパッキングモデルを図5に示す。同図はピーク状態(図4の黒丸)におけるものである。図中、接触力の大きさは矩

図4 シミュレーションによる応力-ひずみ関係
(単調二軸試験)

図5 円粒子パッキングにおける接触力分布(ピーク時)

形で示し、その幅を接触力の大きさに比例させて描いている。この試験においては、縦方向に圧縮しているために、縦方向に卓越した接触力の分布が観察される。このようなシミュレーションにより種々の微視的な情報を抽出することが可能である。

本解析手法は液状化のシミュレーションにも応用可能である。この場合、間隙水は排水されず、全体の体積変化に対して、水もその圧縮係数に応じた抵抗を示すと仮定している。図6は間隙水圧最大の最終状態における接触力分布を示す。この試験の初期平均応力は図5の排水試験と同様であるが、間隙水圧の上昇に伴い、接触力が減少し、外力に対する粒子の抵抗力が低下していることがわかる。

コンピュータシミュレーションのもう一つの重要な応用分野は、粒状体の流れの研究である。粒状体の高速流れの研究では、粒子径、形状、摩擦、反発係数等

図6 接触力分布 (液状化に近い状態)

の基礎量から、粒子の衝突によるエネルギーの散逸など微視的な力学現象を統計力学的に処理することによって、巨視的構成関係を求める方法がとられる。理論面では、Jenkins-Richman²⁵⁾などにみられるように進展がめざましいが、実験によって、種々の物理量を測定検証することの困難が大きい障害となっていた。最近、周期性をもつ境界条件の導入などシミュレーション技術の発展によって、少ない粒子数でも十分に有用な成果が得られるようになり、シミュレーションによって、流れにおける諸量の分布が詳しく求められ、新しい理論展開が活発に行われるようになった。

4. あとがき

本文は、微視構造をもつ材料の一つとして粒状体とき裂体について概説した。具体的な成果よりも、研究の方向について述べたので、やや抽象的になった点はお許し頂きたい。この小文が、微視構造をもつ材料の力学に興味をもつ方々の研究の一助となれば幸いである。

参考文献

- 1) 佐武正雄：粒状体力学へのアプローチ，土と基礎，**28**，12 (1980) 1.
- 2) M. Satake and J. T. Jenkins (ed.): *Micromechanics of Granular Materials*, Elsevier, Amsterdam, (1988).
- 3) T. Mogami: A Statistical Approach to the Mechanics of Granular Materials, *Soil and Foundation*, **5**, 2, (1965) 26. または，最上武雄：粒状体の力学の統計的理論，「土質力学」(最上武雄編)，技報堂 (1969) 998.
- 4) 新関 茂，佐武正雄：最上の粒状体理論における間げき比-内部摩擦角関係式に関する考察，昭和55年度土木学会東北支部技術研究会講演概要 (1981) 194.
- 5) S. C. Cowin: A Theory for the Flow of Granular Materials, *Powder Technology*, **9**, (1974) 61.
- 6) M. Satake: Graph-theoretical Approach to the Mechanics of Granular Materials, in *Continuum Models of Discrete Systems* (ed. by A. J. M. Spencer), A. A. Balkema, Rotterdam, (1987) 163.
- 7) M. Oda, S. Nemat-Nasser and M. M. Mehrabadi: A Statistical Study of Fabric in a Random Assembly of Spherical Granules, *Int. J. Num. Anal. Meth. in Geomech.*, **6**, (1982) 77.
- 8) 金谷健一：ファブリックテンソルによる構造異方性の特徴づけと統計的検定，土質工学会論文報告集，**23**，4 (1983) 171.
- 9) 佐武正雄：地盤と土の異方性，土と基礎，**32**，11 (1984) 5.
- 10) M. Satake: Fabric Tensor in Granular Materials, in *Deformation and Failure of Granular Materials* (ed. by P. A. Vermeer and H. J. Luger), A. A. Balkema, Rotterdam, (1982) 63.
- 11) S. Nemat-Nasser and M. Mehrabadi: Stress and Fabric in Granular Masses, in *Mechanics of Granular Materials - New Models and Constitutive Relations* (ed. by J. T. Jenkins and M. Satake), Elsevier, Amsterdam, (1983) 1.
- 12) M. Satake: Fundamental Quantities in the Graph Approach to Granular Materials, *ibid.*, p. 9.
- 13) M. Oda: A Method for Evaluating the Effect of Crack Geometry on the Mechanical Behavior of Cracked Rock Masses, *Mechanics of Materials*, **2**, (1983) 163.
- 14) 小田匡寛：不連続性岩盤の力学へのアプローチ，土と基礎，**35**，3 (1987) 29.
- 15) 村上澄男：損傷力学——材料の損傷と破壊への連続体力学のアプローチ，材料，**31**，340 (1982) 1.
- 16) 京谷孝史，市川康明，川本眺万：岩盤の力学特性評価における損傷力学のアプローチ，土と基礎，**35**，3 (1987) 23.
- 17) S. C. Cowin: The Relationship between the Elasticity Tensor and the Fabric Tensor, *Mechanics of Materials*, **4**, (1985) 137.
- 18) Y. Kishino: Statistical Consideration on Deformation Characteristics of Granular Materials, *Proc. US-Japan Seminar on Continuum-Mechanical and Statistical Approaches in the Mechanics of Granular Materials* (ed. by S. C. Cowin and M. Satake), Gakujutsu Bunkan Fukyukai, Tokyo, (1978) 114.
- 19) S. Minagawa: Fatigue Limit Problem as Dual Yielding in Terms of Stress Functions, *RAAG Memoirs* (ed. by K. Kondo), **4**, Gakujutsu Bunkan Fukyukai, Tokyo, (1968) 162.
- 20) M. Satake: Compatibility Conditions for Granular Assembly, in *Science on Form* (ed. by S. Ishizaka et al.), KTK, Tokyo, (1986) 191.
- 21) 金谷健一：構造異方性によりひずみを決定するステレオロジーの理論，材料科学，**20**，4 (1984) 223.
- 22) K. Kanatani: Stereological Estimation of Microstructures in Materials, in ref. 2).
- 23) P. A. Cundall, A. Drescher and O. D. L. Strack: Numerical Experiments on Granular Assemblies; Measurements and Observations, *Deformation and Failure of Granular Materials* (ed. by P. A. Vermeer and H. J. Luger), A. A. Balkema, Rotterdam, (1982) 355.
- 24) Y. Kishino: Disc Model Analysis of Granular Media, in ref. 2).
- 25) J. T. Jenkins and M. W. Richman: Kinetic Theory for Plane Flows of a Dense Gas of Identical, Rough, Inelastic, Circular Disks, *Phys. Fluid*, **28**, (1985) 3485.