微視構造を有する材料の力学(III)*

——結晶, その塑性材料空間の幾何学的表示

塩沢 和章**

Micromechanics of Materials with Microstructure (III) - Crystals, Geometrical Aspect of Plastically Deformed Materials Space - / Kazuaki SHIOZAWA

Key words : micromechanics, materials with microstructure, crystal plasticity, non-Riemannian space, torsion tensor, curvature tensor, distributed dislocations, strain space, stress space

1. はじめに

材料の力学的挙動に関する研究は、原子、分子の性質を出発点として材料の微視的（ミクロ）な構造と性質を理解、記述するだけでなく、我々の必要とする巨視的（マクロ）な材料の性質がミクロな性質とどのように関連付けられているかを明らかにし、所要のマクロな性質を実現するためには、ミクロな構造と性質をどのようにしていけばよいかを研究しなければならない。

微視構造レベルの微視的な力学的性質と材料全体の巨視的なそれを橋渡しする学問分野の一つとして、固体のマイクロメカニクスが登場してきた。微細構造をもつ材料では、それ以上細分すれば材料の物理的性質に変化を生じるような限界が存在し、従来の連続体の考え方を直接用いることは厳密にはできない。しかし、巨視的尺度で物体の力学的挙動を研究する連続体力学の手法を何らかの方法で拡張して用いることは、微視構造をもつ材料の力学的挙動を理論的に把握する上で有効である。すなわち、不連続体の連続体近似である。ここでは結晶性材料の塑性変形挙動の力学を取り挙げ、格子欠陥を含む不完全結晶の連続体近似の手法についてその考え方を近藤ら¹⁾及び Bilby ら²⁾の流れに沿って述べることにする。

2. 降伏現象と塑性変形

材料の降伏現象を解釈するために、近藤による考

え³⁾に従って次のような類同が得られる。

2次元平板：3次元平坦材料＝座屈限界：降伏
薄平板に圧縮の面内荷重を与えるとある限界荷重で座屈を生ずる。この座屈によって生じた平板の形は一般に平面に展開不可能な曲面になる。すなわち、2次元空間が3次元空間内に曲がり込む現象としてとらえることができる。

一方、3次元平坦空間内に終始する力が作用して3次元平坦材料が曲がり込む空間は3次元ユークリッド状態から4次元、5次元、更にはより高次の空間である。しかし、現実には高次の空間は存在しないから、連続のままで高次空間への遷移は不可能である。ゆえに、材料内の不均一ひずみと格子欠陥の導入により材料内部の連結関係に変化が起り、すべったり、ちぎれたりすることによって可能となる（図1⁴⁾参照）。これは平面へ展開不可能な曲面を微小な素片に分解して3次元平坦空間に並べ換えることに対応している。材料の降伏は、それまで連続していた材料が与えられた荷重条件のもとで、もはや無数の小片に分解することなしで3次元ユークリッド的平坦状態を保持することのできなくなる限界と考えることができる。

3. 塑性材料空間の幾何学的表示

3.1 ねじれテンソルと曲率テンソル

不完全結晶が実空間において3次元デカルト座標系（ i 座標系で定義）に閉じ込められた状態にあると考える。いま、2章で述べたように変形した連続体を不完全結晶内で欠陥域を避けて切り出せば、切り離された完全な結晶の小片の集合が得られる。しかし、互いに

* 原稿受付 昭和63年3月11日

** 富山大学工学部（富山市五福3190）

離れたものがユークリッド空間に対して占める位置や位相的対応は一通りには定まらず、また切り離れた素片は周囲からの拘束がなく、内部応力が全く解放された状態となり、自由な状態で最も力学的に安定な長さとしに落ち着く。これが近藤によって定義された自然状態⁵⁾ (x 座標系で定義) である。

格子欠陥を含む不完全結晶の材料空間は接統の係数によって関連付けられたユークリッド空間の無限個の集合体、すなわち、ユークリッド接統をもつ非リーマン空間で表示できる。この空間は接統の係数 Γ_{ji}^k を用いて定義されるねじれテンソル S_{ji}^k とリーマン-クリストッフェルの曲率テンソル R_{iji}^k から構成されている。

図2に示すように、非リーマン空間内に四辺形を取り、その頂点をP, Q, S, Rとする。ここで、点P(x)とそこでのベクトル v を点P(x) から出て点P(x) に戻る一つの閉曲線 Γ に沿って一周り展開*するとき、これらが新しい位置 $\bar{P}$ 及びベクトル $\bar{v}$ を占めるとすれば、ここに点 $\bar{P}$ を点Pに重ねる並進 $\Delta u^k =$

図2 非リーマン空間内に存在する微小四辺形とその自然状態解放後の形状⁶⁾ (P(x) から出発して順次閉曲線に沿って接触ユークリッド空間に展開すると終点において位置の食い違い及びベクトルの回転を生ずる)

$d_2(d_1u)^k - d_1(d_2u)^k$ とベクトル $\bar{v}$ をベクトル v に重ねる回転 $\Delta v_k = d_1(d_2v_k) - d_2(d_1v_k)$ とを組み合わせた閉曲線に随伴する運動が考えられる。並進と回転はそれぞれ次式で与えられる⁶⁾。

$$\begin{aligned} \Delta u^k &= -2\Gamma_{[ji]}^k dx^{[j]} dx^{[i]} = 2S_{ji}^k f^{ji} \\ &= -2\Gamma_{[ji]}^k d_2u^{[j]} d_1u^{[i]} = 2S_{ji}^k f^{ji} \end{aligned} \quad (1)**$$

$$\begin{aligned} \Delta v_k &= R_{\lambda i \mu}^k v_\lambda f^{i\mu} \\ \Delta v_j &= R_{j k i}^m v_m f^{ik} \end{aligned} \quad (2)$$

ここで、 $f^{ji} = d_2x^{[j]} d_1x^{[i]}$ 、 $f^{j\mu} = d_2u^{[j]} d_1u^{[\mu]}$ はそれぞれ実状態および自然状態解放後の微小面積を表す。

3.2 ねじれテンソルで表される格子欠陥

図2に示した回路 Γ は結晶転位論ではバーガース回路と呼ばれ、その中の不完全性の種類と大きさに応じて自然状態に食い違いを生じる。この食い違いベクトル Δu^k はバーガースベクトルであり、転位の強さを表し、ねじれテンソルは Bilby ら²⁾ によって定義された転位密度テンソルとなる。

テンソルの縮約及び写像によって次式の関係を得る。

$$a^{ik} = \frac{1}{2} \epsilon^{ij} S_{ji}^k \quad (3)$$

ここで、 ϵ^{ij} はエディントンのイプシロン記号である。 a^{ik} は非対称の2次のテンソルであり、対角成分 (a^{11} , a^{22} , a^{33}) はらせん転位の、非対角成分 (a^{12} , a^{23} , a^{31} など) は刃状転位の密度を表す。同様にして $[ji]$ を転位線に垂直な面素、 k をバーガースベクトルの方向にとれば、 S_{i2}^1 , S_{i2}^2 , S_{i3}^2 などは刃状転位、 S_{i2}^3 , S_{i3}^1 , S_{i3}^2 などはらせん転位の密度に対応する。

図1 多結晶体の各結晶粒の仮想的な塑性変形 (b) と粒界でのひずみを適合させるために導入された過剰な刃状転位列 (c), (d) の模式的表示⁴⁾ ((d) が実状態, (b) が自然状態と考えることができる)

* 点Pにおける接平面をそれにごく近い曲線上の一点における接平面上へ重ね、この接平面を更にそれに近い曲線上の一点の接平面上へ重ねるという操作を繰り返すこと。

** 記号 () と [] はそれぞれその中の指標についての交代量を意味し、() は対称部分を、[] は反対称部分を指す。

図3 リーマン-クリストッフェルの曲率テンソル成分の金属物理学の意味⁷⁾

3.3 曲率テンソルで表される格子欠陥

計量欠陥の密度を表すリーマン-クリストッフェルの曲率テンソル R_{jki}^m に対して, m をバーガースベクトルの方向, i をすべり面内のベクトルの方向, $[jk]$ をすべり面の境界で囲まれた2次元微小面積の方位なる指標の役割を与えることにより, 欠陥の形の分類が可能である. 微小面積の方位を $[12]$ として分類した曲率テンソルの成分を図3⁷⁾に示す. (a) は単位長さの刃状転位によるすべりの密度, (b) はらせん転位によるすべりの密度を表す. (c), (d) および (e) は転位の分布の仕方に依存したすべり変形を生じ, 回転変位を伴う. 図の円管の軸方向に線形的に分布した刃状転位またはらせん転位による単位長さ当たりのすべり密度がそれぞれ (c) および (d) である. また, (e) は転傾である.

結晶内の格子欠陥はねじれテンソルだけによって表示できず, ここで述べた曲率テンソルによる表示の助けをかりて明らかになる欠陥, すなわち, 転位対, 空孔, 格子間原子などが存在すること, また転位のある種の存在様式および運動, すなわち, 転位の上昇運動に見られる非保存運動を曲率テンソルを用いて表示で

きることが明らかにされてきている⁸⁾⁹⁾. また, これらは著者らによってX線ラウエ法から得られるミスオリエンテーションの実測を通じて, 実験的に明らかにされている¹⁰⁾.

転傾は転位と並んでもう一つの線状格子欠陥である. 転位がせん断ひずみを伴うのに対して転傾は回転ひずみを伴う. 図4⁹⁾に転傾の幾何学的表示を示す. 図(a)の $\triangle AOF$ の三角形部分の原子を取り除いて, 面OAと面OFを結合した場合(図(b)), また, OAに切れ目を入れて $\triangle AOF$ に相当する余分な原子を挿入した場合(図(c))に, 図中に示した格子ベクトルを回路に沿って移動すると, 始点

と終点のベクトルの方向が異なりベクトルの回転を生ずる. 従って, 転傾は回路の始点と終点における標構の回転で与えられ,

$$d_i^{kq} = \frac{1}{2} R_{jii}^k \varepsilon^{ijq} \quad (4)$$

$$\omega^{ik} = \frac{1}{2} d_i^{kq} n_q dS \quad (5)$$

によって, 転傾密度テンソル d_i^{kq} , 微小回転量 ω^{ik} が直接曲率テンソルによって表示できる¹¹⁾. なお, 転傾は転位が1原子間隔で配列したものと考えられ, 両者は互いに他方の配列として説明できる¹²⁾.

3.4 材料空間の構造と分類

図5³⁾に示すように, 細実閉曲線上の点Gに付着した結晶物質線素のベクトル $\overline{GH}$ を考え, その先端を通して細実閉路の外側に破線で示すような閉曲線を想定する((a)図). これら両閉路間の物質を周囲から解放した上で, 更に $\overline{GH}$ に沿って切り離せば一般に(b)図を得るが, 特別の場合として(c)及び(d)図が得られる. Gの像 G' と G'' が一致して, Hの像 H' と H'' が一致しない, すなわち, 閉路の両端における物質線素 $\overline{GH}$ の像は方向を異にする((c)図). この場合ねじれ

図4 転傾(らせん転傾)の模式的表示⁹⁾(回転角 $\omega = 2\pi\tau/s$ で与えられ, 転傾の線分方向と回転軸の方向とが平行な場合)

(b) はねじれ $S \neq 0$, 曲率 $R \neq 0$ で非リーマン空間に, (c) は $S = 0$, $R \neq 0$ でリーマン空間に, (d) は $S \neq 0$, $R = 0$ で遠隔平行性空間に対応する。

図5 小域の格子欠陥と大域的格子欠陥のもつ物理的意味³⁾

が無く曲率のみがある場合であり, 幾何学的用語を用いればリーマン空間である。他方, (d) 図に示すように $\overline{G'H'}$ と $\overline{G''H''}$ が平行になることもあり, ねじれのみがある場合である。これを遠隔平行性空間と呼ぶ。すなわち, (d) 図は領域の大小を問わず転位のみが存在する場合であり, 転位の幾何学的概念に一致する。しかし, (b) 図は領域の取り方によって転位のみでなく, 前述したベクトルの方向の変化を与える格子欠陥を含むことになる。

以上より, 小域の欠陥の理論に相当する結晶転位論をそのまま応用するだけでは, 金属材料の塑性挙動を十分に説明することができず, 大域的欠陥の理論, すなわちリーマン-クリストッフェルの曲率テンソルで与えられる格子欠陥の表示を加えて, 一般的な材料空間の表示となり得る。換言すれば, 非リーマン空間としての取扱いが必要であることがわかる。

4. ひずみ空間および応力空間の構造

4.1 ひずみ空間の構造

ひずみテンソルは二つの幾何学的物体の相対的相異によって定義されるものである。その一つは実際にユークリッド空間内に置かれている物体であり, 他の一つは自然状態に関係して定義される物体である。ここで, 実際の空間内に置かれている量をオイラー量といい, 自然状態に属するものをラグランジェ量と呼ぶ。オイラー計量の基本テンソル δ_{ij} とラグランジェ計量

の基本テンソル g_{ij} との差としてひずみテンソル ε_{ij} が定義でき, また, ラグランジェ量 $\Gamma_{[j;k]}$ とオイラー量 $[i[j;k]]$ との差として隣接2点間の相対的な回転変位を表す回転ひずみテンソル r_{ijk} が定義できる。

$$2\varepsilon_{ij} = \delta_{ij} - g_{ij} \quad (6)$$

$$r_{ijk} = \Gamma_{[j;k]} - [i[j;k]] \quad (7)$$

ここで, $[ij;k]$ はユークリッド空間のオイラー計量基本テンソルから構成される第一種のクリストッフェルの3指標である。

上で定義した2種類のひずみテンソルの適合条件式と不適合度を考えることによって, 塑性体の幾何学的構造を明らかにすることができる。ひずみテンソル ε_{ij} の適合条件は方程式 $\nabla_i U_k = \varepsilon_{ik}$ の積分可能条件を意味する。ここで, U_k は各点の変位であり, ∇_i は x^i に関する共変微分を表す。レヴィ-チビタの平行性による曲率テンソルを用いて適合条件は弾性論より次式となる³⁾。

$$K_{jkli} = \varepsilon_{ji,kl} + \varepsilon_{lk,ji} - \varepsilon_{lj,ki} - \varepsilon_{ki,jl} = 0 \quad (8)$$

ただし, $_{,k} = \partial/\partial x^k$ である。これは弾性体においては満足するが, 塑性変形した物体においては一般に満足せず $K_{jkli} \neq 0$ であり, 不適合を生ずることになる。すなわち, K_{jkli} はひずみの不適合を生ずるような塑性欠陥の種類を表し, 計量またはひずみテンソルに依在する計量欠陥の一種である。

一方, 回転ひずみテンソルの適合条件は $\nabla_i \omega_{jk} = r_{ijk}$ の積分可能条件を意味する。 r_{ijk} に対するカルタンの一般化した発散より, 適合条件は次式に対応する¹³⁾。

$$\nabla_i (r_{ij})_{jk} = \nabla_i (r_{ij})_{jk} + S_{li}^m r_{mjk} = R_{lij} = 0 \quad (9)$$

一般に, 塑性体では上式を満足するとは限らず, 不適合度 R_{lij} によって塑性的欠陥を生じる。ねじれテンソル S と曲率テンソル R および K はそれぞれ独立ではなくて, 3者間に一定の関係式¹²⁾ が成り立ち, S と R もしくは K のうちの一つが0であれば, 他の不適合度も同時に0となる。

ひずみの不適合度 K_{lijk} を次式に示す不適合度テンソル η^{ij} で表示できる。

$$\begin{aligned} \eta^{ij} &= \frac{1}{4g} \varepsilon^{ikl} \varepsilon^{jmn} K_{klmn} \\ &= -(\varepsilon^{ikl} \varepsilon^{jmn} \varepsilon_{nl,km}) \\ &= \varepsilon^{ikl} \alpha^{jl}_{,k} + \varepsilon^{jkl} \alpha^{il}_{,k} \end{aligned} \quad (10)$$

ここで, $g = \det(g_{ij})$ である。従って, 不適合度テンソルは結晶内の塑性ひずみの非一様性を表す連続体近似の重要なパラメータの一つである。

以上述べたひずみ空間の幾何学的構造と物理量との対応を, Amari¹⁴⁾ に従って表1にまとめて示す。

表1 ひずみ空間の構造 (Amari¹⁴⁾)

微分の次数	幾何学量	物 理 量
0	計量 g_{ji} $\Downarrow \partial$	ひずみ ε_{ji} $\Downarrow \partial$
1	ねじれ S_{kji} $\Downarrow \partial$	転位密度 α_{ji} $\Downarrow \partial$
2	曲率 K_{lkji}	不適合度 η_{ji}

(注) $\Downarrow \partial$ は微分の関係を示す 図6 刃状転位と偶応力の関係の2次元表示¹⁸⁾

4.2 応力空間の構造

塑性ひずみを ε_{ji} 、塑性欠陥による応力を σ^{ij} とすると、ひずみエネルギー W は

$$W = \frac{1}{2} \int \varepsilon_{ji} \sigma^{ij} dX, \quad dX = dx^1 dx^2 dx^3 \quad (11)$$

である。応力 σ^{ij} は ε_{ji} に対する抵抗として働く力であり、 $\sigma^{ij} = \partial W / \partial \varepsilon_{ji}$ と表せる。いま、不適合度 η^{ij} に対する抵抗として働く力を χ_{ji} とすれば、同様に、 $\chi_{ji} = \partial W / \partial \eta^{ij}$ と書ける。ここで、応力 σ^{ij} と χ_{ji} の間には次式の関係のあることが導ける。

$$\sigma^{ij} = -\varepsilon^{ikl} \varepsilon^{jmn} \chi_{nl, km} \quad (12)$$

これから χ_{ji} はよく知られている応力関数テンソルに一致することがわかる。

次に、転位の生長に抵抗する物理的作用力を $-\bar{\alpha}^{ij}$ で表すと、

$$\left. \begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \int (-\alpha_{ji} \bar{\alpha}^{ij}) dX \\ \bar{\alpha}^{ij} &= -\partial W / \partial \alpha_{ji} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

α_{ji} はこれまでに述べた転位密度テンソルであり、また $\bar{\alpha}^{ij}$ は双対転位密度テンソル¹⁴⁾と呼ばれるもので、応力関数テンソルと次式の関係がある。

$$\bar{\alpha}^{ij} = -2\varepsilon^{ikl} \chi_{lj, k} \quad (14)$$

これらの式をもとに転位密度場におけるひずみまたは応力の分布を求めることができる。

次に、これまでに述べた応力を一般化して次のように書くことができる¹⁵⁾¹⁶⁾。

$$\sigma^{ij} = \frac{1}{4\gamma} \varepsilon^{ikl} \varepsilon^{jmn} \Sigma_{nmkl} \quad (15)$$

ここで、 Σ_{nmkl} はひずみ空間との対応から計量基本テンソル $\gamma_{ji} = a_{ji} + 2\chi_{ji}$ をもつ応力空間のリーマン-クリストッフェルの曲率テンソルであり、また、 $\gamma = \det(\gamma_{ij})$ である。応力空間を特徴付けるテンソルは応力テンソル σ^{ij} 、応力関数テンソル χ_{nl} 、および曲率テンソル Σ_{nmkl} である。これらはそれぞれひずみ空間におけるひずみテンソル ε^{ij} 、不適合度テンソル η_{nl} および曲率テンソル K_{nmkl} に対応する。

非リーマン幾何学の立場から応力空間を更に一般化

表2 応力空間の構造 (Amari¹⁴⁾)

微分の次数	幾 何 学 量	物 理 量
0	計量 γ_{ji} $\Downarrow \partial$	応力関数 χ_{ji} $\Downarrow \partial$
1	ねじれ $\bar{S}_{kji}$ $\Downarrow \partial$	双対転位 $\bar{\alpha}_{ji}$ $\Downarrow \partial$
2	曲率 Σ_{lkji}	応力 σ_{ji}

(注) $\Downarrow \partial$ は微分の関係を示す

すると、普通の意味の応力ばかりでなく偶応力を含むことが示される¹⁶⁾。

$$-\nabla_m \mu_{ji}^{;m} = t_{[ji]} \quad (16)$$

$$\text{但し, } \mu_{ji}^{;m} = \bar{S}_{ji}^{;m} + 2\delta_{ji}^m \bar{S}_l$$

ここで、 $\bar{S}_{ji}^{;m}$ は応力空間におけるねじれテンソルであり、 $\bar{S}_i = \bar{S}_{ji}^{;j}$ である。上式はコッセラ連続体に対する力の釣合い方程式に一致し、 $\mu_{ji}^{;m}$ は超応力¹⁷⁾と呼ばれるものである。なお偶応力 m_{ij} との間には、 $m_{ij} = (1/2) \varepsilon_{imn} \mu_{mnj}$ の関係がある。ねじれテンソルは転位論とのかかわりから物体内に分布する転位密度を表すのに対して、非リーマン応力空間では偶応力と関係し材料の転位的欠陥によって生じる応力を示すことになる。これは図6¹⁸⁾の表示によって容易に理解できる。すなわち、刃状転位が存在する場合、すべりの上半面には余分な原子面によって圧縮力が、下半面には引張力が働き、これら二つの力は互いに偶力モーメントを構成する。このようなモーメントの釣合いが転位をその位置に保持する役割を果たしており、その釣合いが破れると転位はすべり面において移動することになる。

従って、転位の連続分布理論または微視構造を有する不完全連続体の力学を取り扱う限りは自然に偶応力の概念が取り込まれていることがわかる。これらの応力空間の構造をまとめて表2¹⁴⁾に示す。また、ひずみ空間と応力空間の双対関係を表3¹⁶⁾に示す。

5. お わ り に

格子欠陥を含む不完全結晶体の連続体近似の一手法

表3 ひずみ空間と応力空間の双対関係 (Minagawa¹⁶⁾)

	ひ ず み 空 間	応 力 空 間
計量微分形式	$(ds)^2 = g_{ji} dx^i dx^j$ ただし $g_{ji} = a_{ji} + 2\varepsilon_{ji}$ ε_{ji} : ひずみテンソル	$(d\theta)^2 = \gamma_{ji} dx^i dx^j$ ただし $\gamma_{ji} = a_{ji} + 2\chi_{ji}$ χ_{ji} : 応力関数テンソル
リーマン-クリストッフェルの曲率テンソル	不適合度 η_{ij} 転位対, 空孔, 格子間原子 転傾などの密度 転位の上昇運動	応力 $\sigma_{ij} = t_{(ij)}$
ねじれテンソル	転位密度 a_{ji}	偶応力 $t_{(ij)}$

について述べてきた。これは連続分布転位論の一分野でもある。紙数の関係で十分にその意を解説できたかどうかは心もとない。詳細については文献1), 8), 9), 17)などの参考書が役立つであろう。この分野の研究は実験の側面からの検討が不十分であり, これからの研究に負うところが多いと思われる。読者各位の今後の研究に何らかのお役に立てば幸甚である。

終わりに, 本稿執筆の機会を与えていただいた電気通信大学教授・皆川七郎博士, また有益な助言をいただいた立命館大学教授・大南正瑛博士に謝意を表する。

文 献

- 1) K. Kondo: 代表的なものとして, RAAG Memoirs of the Unifying Study of Basic Problems in Engineering and Physical Sciences by Means of Geometry, Vol. 1, (1955), Vol. 2, (1958), Vol. 3, (1962), Vol. 4, (1968), Gakujutsubunken Fukyukai.
- 2) B. A. Bilby, R. Bulough and E. Smith: Continuous Distributions of Dislocations: A New Application of the Method of Non-Riemannian Geometry, Proc. Roy. Soc. Lond., **A 231**, (1955) 263.
- 3) 近藤一夫: 変形の幾何学 (岩波講座, 現代応用数学 B-7-b), 岩波書店 (1957).
- 4) B. F. Ashby: The Deformation of Plastically Non-homogeneous Materials, Phil. Mag., **21**, (1970) 399.
- 5) K. Kondo: Non-Riemannian Geometry of Imperfect Crystals from a Macroscopic Viewpoint, RAAG Memoirs, **1**, (1955) 458.
- 6) 矢野健太郎: 接続の幾何学 (数学ライブラリー 4), 森北出版 (1968) 100.
- 7) F. R. N. Nabarro: Theory of Crystal Dislocations, Oxford at the Clarendon Press, (1967) 19.
- 8) 大南正瑛, 塩沢和章: 多結晶体の強度と破壊 (破壊力学と材料強度講座 14), 培風館 (1976) 91.
- 9) 大南正瑛編: マイクロメカニクス入門, オーム社 (1980) 205.
- 10) 大南正瑛, 塩沢和章: ミスオリエンテーションの定義とその金属材料の強度評価への応用, 日本機械学会論文集, **39** (1973) 769.
大南正瑛, 塩沢和章: ミスオリエンテーションの概念とそれの材料強度学への二, 三の応用, 材料科学, **9** (1972) 278.
K. Shiozawa and M. Ohnami: Study on Flow Stress of Metal by Means of the Geometrical Aspect of the Continuously Dislocated Continuum, in *Mechanical Behaviour of Materials*, JSMS, (1974) 93.
- 11) R. W. Lardner: Mathematical Theory of Dislocations and Fracture, University of Toronto Press, (1974).
- 12) 石田洋一: Disclination——あたらしい格子欠陥, 生産研究, **24** (1972) 477.
- 13) S. Amari: On Some Primary Structures of Non-Riemannian Plasticity Theory, RAAG Memoirs, **3**, (1962) 99.
- 14) S. Amari: Non-Riemannian Stress Space and Dual Dislocation, RAAG Memoirs, **4**, (1968) 153.
- 15) S. Minagawa: Riemannian Three-Dimensional Stress-Function Space, RAAG Memoirs, **3**, (1962) 135.
- 16) S. Minagawa: On Some Generalized Features of the Theory of Stress-Function Space with Reference to the Problem of Stresses in a Curved Membrane, RAAG Memoirs, **4**, (1968) 99.
- 17) 岡村弘之編: 強度解析学, 総合材料強度学講座 3, オーム社 (1985) 243.
- 18) E. Kröner: Interrelations between Various Branches of Continuum Mechanics, IUTAM Symp., Mechanics of Generalized Continua, Springer-Verlag, (1968) 330.