厚板の変形に関する近似理論 (第2報)*

——異方性厚板の場合——

五十嵐 悟** 渋川 勝久** 尾崎 正弘***

An Approximate Theory of Deformation of a Thick Plate (2nd Report)
—The Case of an Anisotropic Thick Plate—

Satoru IGARASHI, Katsuhisa SHIBUKAWA and Masahiro OZAKI

In this paper, the approximate theory for an isotropic thick plate presented in the previous paper is extended for an anisotropic plate, and general two dimensional equations in the n -th order approximation are derived for deformation of anisotropic plate with arbitrary thickness. For a graphite/epoxy composite plate under sinusoidally distributed load at the upper surface, the approximate equations presented are solved and the solution is compared with the exact one and with those of several other approximate theories by numerical calculation. The following results are obtained: (1) With increasing the order of approximation, the solution of the approximate equations approaches the exact solution. (2) The accuracy of approximate solution decreases with increasing in the strength of anisotropic property and in the thickness of the plate. (3) The limit of application of approximate equations for any given anisotropic thick plate can easily be estimated by preliminary calculation as shown in this paper.

Key words: two-dimensional plate theory, anisotropic thick plate, composite material, maximum bending stress

1. 緒 言

前報¹⁾では等方性厚板の変形に関して弾性体の基礎方程式から任意の精度の近似方程式を導出する理論を提出し、表面で任意の分布荷重を受ける板については、具体的に一般的な第 n 近似方程式を導出した。また、上面で正弦分布荷重を受ける板に対して近似方程式を解いて変位や応力の近似解を求め、それらの結果を厳密解や他の研究者による近似理論から得られる解と比較して、著者らの提出した近似方程式の有用性を明らかにした。しかし、最近の複合材料の開発は目覚ましく、これに伴い工業材料として異方弾性材料が使われる例が多く見られるようになってきた。

そこで、本論文ではこれらの状況を考慮して、前報で提出した等方性厚板の変形に関する近似理論を異方性厚板の場合に拡張し、より一般的な近似方程式を導出する。また、等方性の場合と同様に上面で正弦分布

荷重を受ける異方性板について近似方程式を解き、その結果を厳密解や他の近似理論による解と比較して、提出した近似方程式の精度や性質について検討する。

2. 主な記号と座標系

主な記号

x_i : 直角座標 ($i=1, 2, 3$)

ξ_i : 変位成分 ($i=1, 2, 3$)

$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \xi_j}{\partial x_i} + \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} \right)$: ひずみの成分 ($i, j=1, 2, 3$)

A_{ij} : 応力成分 ($i, j=1, 2, 3$)

a_{ij} : 弾性定数 ($i, j=1 \sim 6$)

h : 板厚

座標系

座標系は右手系とし、板中央面上に x_1, x_2 軸をとり、 x_3 軸は板厚方向、下向きを正にとる。

3. 弾性体の基礎方程式と変形問題の二次元化

弾性対称面が x_1 - x_2 平面に平行な場合の異方弾性体の応力-ひずみ関係式(構成方程式)は、 a_{ij} ($i, j=1 \sim 6$) を弾性定数として次式で与えられる。

* 原稿受付 昭和62年9月12日。昭和60年度精機学会北海道支部学術講演会(昭和60年9月15日)にて発表

** 正会員 北海道大学工学部(札幌市北区北13条西8丁目)

*** 日本電気(株)(府中市日新町1-10)

$$\begin{Bmatrix} A_{11} \\ A_{22} \\ A_{33} \\ A_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{16} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{26} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{36} \\ a_{16} & a_{26} & a_{36} & a_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{Bmatrix} A_{23} \\ A_{31} \end{Bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} a_{44} & a_{45} \\ a_{45} & a_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} \end{Bmatrix}$$

式(1)を弾性体の釣合い方程式,

$$\sum_{j=1}^3 \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_j} = 0 \quad (i=1, 2, 3) \quad (2)$$

に代入して整理すれば、次式が得られる.

$$\left. \begin{aligned} (a_{55}\alpha_3^2 + L_A^2)\xi_1 + (a_{45}\alpha_3^2 + L_B^2)\xi_2 \\ + L_C\alpha_3\xi_3 = 0 \\ (a_{45}\alpha_3^2 + L_B^2)\xi_1 + (a_{44}\alpha_3^2 + L_D^2)\xi_2 \\ + L_E\alpha_3\xi_3 = 0 \\ L_C\alpha_3\xi_1 + L_E\alpha_3\xi_2 + (a_{33}\alpha_3^2 + L_F^2)\xi_3 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

ここで、次のようにおいた.

$$\begin{aligned} L_A^2 &= L_1\alpha_1 + L_2\alpha_2, \quad L_B^2 = L_2\alpha_1 + L_3\alpha_2, \\ &= L_4\alpha_1 + L_5\alpha_2, \quad L_C = L_G + L_H, \\ L_D^2 &= L_5\alpha_1 + L_6\alpha_2, \quad L_E = L_1 + L_J, \\ L_F^2 &= L_G\alpha_1 + L_1\alpha_2, \quad L_1 = a_{11}\alpha_1 + a_{16}\alpha_2, \\ L_2 &= a_{16}\alpha_1 + a_{66}\alpha_2, \quad L_3 = a_{12}\alpha_1 + a_{26}\alpha_2, \\ L_4 &= a_{16}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2, \quad L_5 = a_{66}\alpha_1 + a_{26}\alpha_2, \\ L_6 &= a_{26}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2, \quad L_G = a_{55}\alpha_1 + a_{45}\alpha_2, \\ L_H &= a_{13}\alpha_1 + a_{36}\alpha_2, \quad L_1 = a_{45}\alpha_1 + a_{44}\alpha_2, \\ L_J &= a_{36}\alpha_1 + a_{23}\alpha_2, \quad \alpha_i = \partial/\partial x_i \quad (i=1, 2, 3) \end{aligned}$$

式(3)から次の方程式が導かれる.

$$(\alpha_3^2 - \delta_1^2)(\alpha_3^2 - \delta_2^2)(\alpha_3^2 - \delta_3^2)\xi_i = 0 \quad (i=1, 2, 3) \quad (4)$$

ここで $\delta_k (k=1, 2, 3)$ は、次式を満たす演算子である.

$$\begin{vmatrix} a_{55}\delta_k^2 + L_A^2 & a_{45}\delta_k^2 + L_B^2 & L_C\delta_k \\ a_{45}\delta_k^2 + L_B^2 & a_{44}\delta_k^2 + L_D^2 & L_E\delta_k \\ L_C\delta_k & L_E\delta_k & a_{33}\delta_k^2 + L_F^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (5)$$

式(4)を満たす $\xi_i (i=1, 2, 3)$ は、次式で与えられる.

$$\left. \begin{aligned} \xi_i &= \sum_{k=1}^3 \{ \cosh(x_3\delta_k) A_{i,k} \\ &\quad + \delta_k^{-1} \sinh(x_3\delta_k) B_{i,k} \} \quad (i=1, 2) \\ \xi_3 &= \sum_{k=1}^3 \{ \cosh(x_3\delta_k) B_{3,k} \\ &\quad + \delta_k^{-1} \sinh(x_3\delta_k) A_{3,k} \} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

ただし、 $A_{i,k}, B_{i,k} (i, k=1, 2, 3)$ は x_1 と x_2 の関数であり、 $\cosh(x_3\delta_k), \sinh(x_3\delta_k)$ は次式で定義される演算子である.

$$\left. \begin{aligned} \cosh(x_3\delta_k) &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{x_3^{2r}}{(2r)!} \delta_k^{2r} \\ \sinh(x_3\delta_k) &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{x_3^{2r+1}}{(2r+1)!} \delta_k^{2r+1} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

式(6)を式(3)に代入すれば、関数 $A_{i,k}, B_{i,k}$ の間の12本の関係式が得られる. したがって18個の関数のうち独立なものは6個であることが分かる.

一方、式(7)を使えば、式(6)の右辺は x_3 のべき級数に展開される. いま、これを次のように書き表す.

$$\xi_i = \sum_{r=0}^{\infty} \left\{ \frac{\varphi_{i,r}}{(2r)!} x_3^{2r} + \frac{\psi_{i,r}}{(2r+1)!} x_3^{2r+1} \right\} \quad (i=1, 2) \quad (8)$$

$$\xi_3 = \sum_{r=0}^{\infty} \left\{ \frac{\psi_{3,r}}{(2r)!} x_3^{2r} + \frac{\varphi_{3,r}}{(2r+1)!} x_3^{2r+1} \right\}$$

ただし、 $\varphi_{i,r}, \psi_{i,r}$ は x_1 と x_2 の関数であり、

$$\varphi_{i,r} = \sum_{k=1}^3 \delta_k^{2r} A_{i,k}, \quad \psi_{i,r} = \sum_{k=1}^3 \delta_k^{2r} B_{i,k} \quad (i=1, 2, 3) \quad (9)$$

とおいた.

式(8)を釣合い方程式(3)に代入し、 x_3 の同次のべきの項の係数を0とおくことによって、 $r=1, 2, \dots$ に対して次の関係式が得られる.

$$\left. \begin{aligned} \{\varphi_{i,r}\} &= [m_{ij}]\{\varphi_{j,r-1}\} = [m_{ij}]^r \{\varphi_{j,0}\} \\ &= [m_{ij}^{(r)}]\{\varphi_{j,0}\} \\ \{\psi_{i,r}\} &= [n_{ij}]\{\psi_{j,r-1}\} = [n_{ij}]^r \{\psi_{j,0}\} \\ &= [n_{ij}^{(r)}]\{\psi_{j,0}\} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

ただし、

$$\begin{aligned} \{\varphi_{i,r}\} &= [\varphi_{1,r} \ \varphi_{2,r} \ \varphi_{3,r}]^T \\ \{\psi_{i,r}\} &= [\psi_{1,r} \ \psi_{2,r} \ \psi_{3,r}]^T \end{aligned}$$

であり、

$$[m_{ij}^{(r)}] = [m_{ij}]^r, \quad [n_{ij}^{(r)}] = [n_{ij}]^r$$

は 3×3 のマトリクスで、

$$\begin{aligned} m_{ij}^{(0)} &= n_{ij}^{(0)} = \delta_{ij}, \quad m_{ij}^{(1)} = m_{ij}, \quad n_{ij}^{(1)} = n_{ij} \\ m_{11} &= (a_{45}L_B^2 - a_{44}L_A^2)/A \\ m_{12} &= (a_{45}L_D^2 - a_{44}L_B^2)/A \\ m_{13} &= (a_{45}L_E - a_{44}L_C)/A \\ m_{21} &= (a_{45}L_A^2 - a_{55}L_B^2)/A \\ m_{22} &= (a_{45}L_B^2 - a_{55}L_D^2)/A \\ m_{23} &= (a_{45}L_C - a_{55}L_E)/A \\ n_{31} &= -L_C/a_{33}, \quad n_{32} = -L_E/a_{33} \\ n_{33} &= -L_F^2/a_{33}, \quad n_{ij} = m_{ij}(1 - \delta_{3j}) + m_{i3}n_{3j} \\ m_{3j} &= n_{31}m_{1j} + n_{32}m_{2j} + n_{33}\delta_{3j} \\ &\quad (i=1, 2; j=1, 2, 3) \end{aligned}$$

$$A = a_{44}a_{55} - a_{45}^2$$

である. 式(10)から、 $\varphi_{i,r}, \psi_{i,r}$ は $\varphi_{i,0}, \psi_{i,0}$ を使って書き表されることが分かる. なお、式(9)と(10)を使えば $A_{i,k}$ と $B_{i,k}$ も $\varphi_{i,0}, \psi_{i,0}$ によって書き表すことができる.

以上から、異方弾性体の変位、したがって応力やひずみは、 x_1 と x_2 に関する6個の未知関数 $\varphi_{i,0}, \psi_{i,0}$

($i=1, 2, 3$)によって決定されることが分かった。これら6個の未知関数を決定するための支配方程式（基礎方程式）は、板の上面と下面での境界条件から導かれる。

4. 板の表面での境界条件と変形の方程式

4.1 板の変形の基礎方程式

板の上面 ($x_3 = -h/2$) と下面 ($x_3 = h/2$) に作用する単位面積当たりの分布荷重の成分を、それぞれ、 X_- , Y_- , Z_- , および、 X_+ , Y_+ , Z_+ とすれば、板の表面での境界条件は次のように書ける。すなわち、 $x_3 = \pm h/2$ で、

$$X_{\pm} = A_{31}, \quad Y_{\pm} = A_{32}, \quad Z_{\pm} = A_{33} \quad (11)$$

式(1)と式(6)を使って式(11)を整理すれば、次の2組の方程式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^3 Ch_k (B_{1,k} + a_1 B_{3,k}) &= \frac{a_{44} X_1 - a_{45} Y_1}{A} \\ \sum_{k=1}^3 Ch_k (B_{2,k} + a_2 B_{3,k}) &= \frac{a_{55} Y_1 - a_{45} X_1}{A} \\ \left(\frac{h}{2} \right) \sum_{k=1}^3 \delta_k^{-2} (Ch_k - Sh_k) (L_u B_{1,k} + L_u B_{2,k} \\ &+ L_w B_{3,k}) = \left(\frac{h}{2} \right) (a_1 X_1 + a_2 Y_1) - Z_2 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{h}{2} \right) \sum_{k=1}^3 Sh_k (L_A^2 A_{1,k} + L_B^2 A_{2,k} + L_H A_{3,k}) \\ &= X_2 \\ \left(\frac{h}{2} \right) \sum_{k=1}^3 Sh_k (L_B^2 A_{1,k} + L_D^2 A_{2,k} + L_J A_{3,k}) \\ &= Y_2 \\ \sum_{k=1}^3 Ch_k (L_H A_{1,k} + L_J A_{2,k} + a_{33} A_{3,k}) &= Z_1 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

ここで、次の記号を導入した。

$$L_u = -(L_A^2 + L_H n_{31}) \alpha_1 - (L_B^2 + L_J n_{31}) \alpha_2$$

$$L_v = -(L_B^2 + L_H n_{32}) \alpha_1 - (L_D^2 + L_J n_{32}) \alpha_2$$

$$L_w = -n_{33} (L_H \alpha_1 + L_J \alpha_2)$$

$$X_1 = (X_- + X_+)/2, \quad Y_1 = (Y_- + Y_+)/2$$

$$Z_1 = (Z_- + Z_+)/2, \quad X_2 = (X_- - X_+)/2$$

$$Y_2 = (Y_- - Y_+)/2, \quad Z_2 = (Z_- - Z_+)/2$$

$$Ch_k = \cosh\left(\frac{h}{2} \delta_k\right), \quad Sh_k = \left(\frac{h}{2} \delta_k\right)^{-1} \sinh\left(\frac{h}{2} \delta_k\right)$$

$$(k=1, 2, 3)$$

式(12)と式(13)は板の変形を支配する基礎方程式であり、いかなる近似も含まない厳密な方程式である。なお、式(6)を参照すれば、式(12)は板の曲げ変形の方程式であり、式(13)は板の横方向への伸び変形の方程式であることが分かる。

4.2 板の変形の近似方程式

さて、式(12), (13)の左辺は式(7)を使って板厚 h のべき級数に展開することができる。本論文では等方性の場合と同様に、式(12), (13)の展開を $h^0 \sim h^{2n+1}$ ($n=1, 2, 3, \dots$) の項で近似したものを第 n 近似方程式とする近似法を採用する。すなわち、第 n 近似方程式は、

$$\left. \begin{aligned} \sum_{r=0}^n \frac{1}{(2r)!} \left(\frac{h}{2} \right)^{2r} (\phi_{1,r} + a_1 \phi_{3,r}) \\ &= \frac{a_{44} X_1 - a_{45} Y_1}{A} \\ \sum_{r=0}^n \frac{1}{(2r)!} \left(\frac{h}{2} \right)^{2r} (\phi_{2,r} + a_2 \phi_{3,r}) \\ &= \frac{a_{55} Y_1 - a_{45} X_1}{A} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{r=0}^{n-1} \frac{2r+2}{(2r+3)!} \left(\frac{h}{2} \right)^{2r+3} (L_u \phi_{1,r} + L_v \phi_{2,r} \\ &+ L_w \phi_{3,r}) = \left(\frac{h}{2} \right) (a_1 X_1 + a_2 Y_1) - Z_2 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{r=0}^n \frac{1}{(2r+1)!} \left(\frac{h}{2} \right)^{2r+1} (L_A^2 \phi_{1,r} \\ &+ L_B^2 \phi_{2,r} + L_H \phi_{3,r}) = X_2 \\ \sum_{r=0}^n \frac{1}{(2r+1)!} \left(\frac{h}{2} \right)^{2r+1} (L_B^2 \phi_{1,r} \\ &+ L_D^2 \phi_{2,r} + L_J \phi_{3,r}) = Y_2 \\ \sum_{r=0}^n \frac{1}{(2r)!} \left(\frac{h}{2} \right)^{2r} (L_H \phi_{1,r} + L_J \phi_{2,r} \\ &+ a_{33} \phi_{3,r}) = Z_1 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

で与えられる。ただし、 $\phi_{i,r}$ および $\psi_{i,r}$ は式(10)を使って6個の未知関数 $\phi_{i,0}$ と $\psi_{i,0}$ ($i=1, 2, 3$) によって表される。

4.3 変位と応力の近似表現

変位成分は式(8)によって板厚方向の座標 x_3 のべき級数に展開されており、これを使えばひずみ成分、応力成分も x_3 のべき級数に展開することができる。第 n 近似方程式を $h^0 \sim h^{2n+1}$ の項で表したのに対応して、変位や応力成分の第 n 近似は、 $x_3^0 \sim x_3^{2n+1}$ の項で表すことにする。変位成分と、応力の例として曲げ応力 A_{11} を書けば次の通りである。

$$\left. \begin{aligned} \xi_i = \sum_{r=0}^n \left\{ \frac{\varphi_{i,r}}{(2r)!} x_3^{2r} + \frac{\psi_{i,r}}{(2r+1)!} x_3^{2r+1} \right\} \\ (i=1, 2) \\ \xi_3 = \sum_{r=0}^n \left\{ \frac{\phi_{3,r}}{(2r)!} x_3^{2r} + \frac{\varphi_{3,r}}{(2r+1)!} x_3^{2r+1} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

$$A_{11} = \sum_{r=0}^n \left\{ \frac{x_3^{2r}}{(2r)!} (L_1 \varphi_{1,r} + L_4 \varphi_{2,r} + a_{13} \varphi_{3,r}) + \frac{x_3^{2r+1}}{(2r+1)!} (L_1 \psi_{1,r} + L_4 \psi_{2,r} + a_{13} \psi_{3,r+1}) \right\} \quad (17)$$

ただし、式(16)、(17)中の $\varphi_{i,r}$ 、 $\psi_{i,r}$ は第 n 近似方程式の解から、式(10)を計算して求められる。

5. 数値計算例 (上面で正弦荷重を受ける異方弾性板)

前章で導出した近似方程式の適用範囲や性質を調べるために、上面で正弦荷重を受ける異方性板の変形問題を扱う。この場合には、等方性板の場合と同様に異方性板についても厳密解が求まり²⁾、数値計算によって近似解の精度を検討することができる。

異方性板材料としてはグラファイト、エポキシ複合材料を選び、繊維方向は板中央面に平行であるとす。この材料は一種の直交異方性材料であり、そのヤング率、剛性率、ポアソン比は以下の通りである。

$$\begin{aligned} E_L &= 1.73 \times 10^{11} \text{ Pa}, & E_T &= 6.86 \times 10^9 \text{ Pa}, \\ G_{LT} &= 2.74 \times 10^9 \text{ Pa}, & G_{TT} &= 1.37 \times 10^9 \text{ Pa}, \\ \nu_{LT} &= \nu_{TT} = 0.25 \end{aligned}$$

ここで L は繊維に平行な方向を、 T は繊維に垂直な方向を表し、 ν_{LT} は繊維に平行な方向の単軸応力が作用するときの、繊維方向と繊維に垂直な方向のひずみの比を表すポアソン比である。

荷重 p は次式で与えられる。

$$p = q_0 \sin(\pi x_1/L) \quad (q_0: \text{定数}) \quad (18)$$

この場合、 $A_{i,k}$ 、 $B_{i,k}$ 、 $\varphi_{i,r}$ 、 $\psi_{i,r}$ は次式で表される。

$$\left. \begin{aligned} A_{i,k} &= \bar{A}_{i,k} \cos(\pi x_1/L) \\ B_{i,k} &= \bar{B}_{i,k} \cos(\pi x_1/L) \\ A_{3,k} &= \bar{A}_{3,k} \sin(\pi x_1/L) \\ B_{3,k} &= \bar{B}_{3,k} \sin(\pi x_1/L) \end{aligned} \right\} \quad (i=1, 2; k=1, 2, 3) \quad (19)$$

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{i,r} &= \Phi_{i,r} \cos(\pi x_1/L) \\ \psi_{i,r} &= \Psi_{i,r} \cos(\pi x_1/L) \\ \varphi_{3,r} &= \Phi_{3,r} \sin(\pi x_1/L) \\ \psi_{3,r} &= \Psi_{3,r} \sin(\pi x_1/L) \end{aligned} \right\} \quad (i=1, 2; r=1, 2, 3, \dots) \quad (20)$$

また、式(5)は δ_k^2 に関する3次の代数方程式となり、これを解いてこの場合の δ_k が求められる。この δ_k と式(19)を2組の基礎方程式(12)、(13)に代入し $\bar{A}_{i,k}$ 、 $\bar{B}_{i,k}$ ($k=1, 2, 3$)に関する代数方程式を解けば厳密解が求められる。

一方、式(20)を式(10)に代入すれば、 $\Phi_{i,r}$ と $\Phi_{i,0}$ および $\Psi_{i,r}$ と $\Psi_{i,0}$ の間の代数関係式が得られる。した

Fig. 1 Error of deflection vs. h/L ($\theta=60^\circ$)
(C); Classical theory, (A); Ambarutsumyan theory, (L); Lo et al. theory, (EX); Exact solution, (n): n -th order approx. (present theory)

がって、式(20)を第 n 近似方程式、式(14)、(15)に代入してこの関係式を使えば、 $\Phi_{i,0}$ と $\Psi_{i,0}$ に関する2組の代数方程式が得られる。これらの代数方程式を解けば第 n 近似解が求められる。

この方法で求められる近似解を厳密解、および他の近似理論(古典論、変位成分を板厚方向座標(x_3)の多項式に展開するLoら³⁾の理論、および面外せん断応力 A_{31} 、 A_{32} を x_3 の2次式で近似するAmbarutsumyan⁴⁾の理論)による解と比較して、その精度や性質を調べる。

5.1 板の変形

一例として、繊維軸が x_1 軸と成す角 θ が 60° の場合について、各近似理論から得られる板のたわみ(板中央面の板厚方向の変位)の厳密解に対する誤差の絶対値の板厚による変化を比較したものが図1である。ただし、板厚は代表的な長さ(正弦荷重の半波長 L)で除して無次元化した。どの近似理論の場合にも、板厚の増加に対して誤差は単調に増加するという単純な性質があることが分かる。古典論(C)の誤差は、 h/L の増加に対して直線的に増加し、 $h/L=0.2$ においてすでに30%を越えている。Ambarutsumyanの近似理論(A)は、 $h/L=0.7$ 程度までは誤差は10%以下と小さい。しかし、 h/L が増加すると誤差は急激に増加する。Loらの近似理論(L)は精度が高く、 $h/L=2.5$ 以下では誤差は15%以下であり、我々の第4近似(4)あるいは第5近似(5)に匹敵する精度となっている。我々の近似理論(1)~(6)では近似の次数を上げるに従って誤差の増加割合は減少し、精度が向上して行くことが分かる。

ところで、式(18)で与えられた荷重の下では、板の変形や応力分布は繊維軸の方向(θ の値)によって変

Fig. 2 Error of deflection vs. θ ($h/L=1.0$)
Symbols are same as Fig. 1

化する。すなわち、繊維軸方向が x_1 軸方向に一致する場合 ($\theta=0^\circ$) に板は最も強い異方性を示し、繊維軸方向が x_2 軸方向に一致する場合 ($\theta=90^\circ$) には等方性に近い状態となる。そこで、 $h/L=1$ の場合について、 θ の変化に対するたわみの誤差の変化を求めた結果が図2である。いずれの近似理論においても誤差は異方性の強い $\theta=0^\circ$ の場合に最大で、 θ の増加に伴って誤差は減少し、等方性に近い $\theta=90^\circ$ で最小となる。この傾向は板厚が変化しても変わらない。ただし、板厚が大きい程誤差は大きく、 θ に対する誤差の変動の幅も大きくなっている。

板中央面のたわみについて述べてきたことがらは、変位の板厚方向分布、したがって板の全体としての変形についても当てはまる。

5.2 板の応力

応力の例として板の曲げ応力 A_{11} について考察する。図3に $\theta=60^\circ$ 、 $h/L=1.5$ の場合の曲げ応力の板厚方向分布を示す。応力分布の基本的な性状は前報¹⁾

で述べた等方性の場合と同じである。すなわち、古典論 (C)、および Ambarutsumyan の理論 (A) は、それぞれ、原点を通る直線、および3次曲線で、ともに板中央面に関して反対称な分布を与え、厳密解 (EX) が示す中央面に関して非対称な分布とは大きく異なっている。これに対して Lo らの近似理論 (L) は厳密解に比較的近い非対称な分布を与えている。我々の近似理論 (1)~(3) も中央面に関して非対称な分布を与え、しかも、近似の次数を高めることによって中央面近傍から厳密解 (EX) に漸近していくことが分かる。

曲げ応力の代表的な値として実用上重要と思われる最大曲げ応力の誤差の絶対値を計算した結果を図4に示す。いずれの近似理論による結果においても、誤差は板厚の増加に伴って単調に増大する。これらの結果をたわみの場合と比較すると、古典論 (C) の精度はたわみの場合に比較して著しく低い。Ambarutsumyan の理論 (A) では、最大曲げ応力の精度は $h/L \leq 1.2$ ではたわみの場合と同程度であるが、 h/L の増加に伴ってたわみの場合よりも精度は高くなる。一方、Lo らの理論 (L) では、最大曲げ応力の精度はたわみの精度に比較して低く、たわみでは我々の第4近似あるいは第5近似と同程度の精度であったのに対し、最大曲げ応力では第3近似 (3) あるいはそれ以下の程度の精度であることが分かる。我々の近似理論 (1)~(6) でも、たわみの場合に比較して最大曲げ応力の精度はかなり低くなっている。ただし、これらの結果は $\theta=60^\circ$ の場合についてのものであり、後述のように精度は θ の値によって変わってくる。

板の異方性の強さ、すなわち θ の変化に対する最大曲げ応力の誤差の変化を求めた結果の例が図5である。古典論 (C) と我々の近似理論 (1)~(6) では、たわみの場合と同様に、異方性の強い $\theta=0^\circ$ で誤差は最

Fig. 3 Distribution of bending stress for $h/L=1.5$ and $\theta=60^\circ$

Fig. 4 Error of maximum bending stress vs. h/L ($\theta = 60^\circ$)
Symbols are same as Fig. 3

Fig. 5 Error of maximum bending stress vs. θ ($h/L = 1.0$)
Symbols are same as Fig. 4

大で、 θ の増加に伴って誤差は減少し、等方性に近い $\theta = 90^\circ$ で誤差は最小となる。ただし、古典論および第1近似の誤差は60%を越えるので図には示されていない。最大曲げ応力とたわみの誤差を比較すると、どの θ の値に対しても最大曲げ応力の誤差はたわみの誤差よりも大きく、この傾向は異方性の強い θ の小さな場合に著しい。Loらの結果(L)は、我々の近似理論と同様に θ の増加に対して誤差は単調に減少する。また、先のたわみの誤差と比較すると、最大曲げ応力の誤差は著しく大きく、Loらの近似理論(L)はたわみに対しては精度が高いが、応力に関しては精度があまり高くないことが分かる。Ambarutsumyanの結果(A)では、 θ の小さな領域での誤差は比較的小さく、異方性の弱い θ の大きな領域での誤差が大きくなっている。ただし、この結果はここで取り上げたグラフィット・エポキシに対するものであり、他の弾性定

数を与えた場合には θ の増加に対して誤差が単調に減少することもある。Loらの理論についても、 θ や板厚(h/L)に対する誤差の変動の仕方は弾性定数に依存している。

これに対して我々の理論ではどのような弾性定数の場合にも、異方性が強く、板厚が大きいくほど誤差は大きくなるという単純な性質があり、しかも近似の次数を上げていけば変位も応力分布も厳密解に一樣に漸近する。このような性質は最大曲げ応力についてだけでなく、他の応力成分についても当てはまる。

6. 結 言

本論文で得られた結果を要約すれば次の通りである。

- (1) 任意の厚さをもつ異方弾性板の変形問題に対して、未知関数の数は一定のままで任意の精度の近似方程式を組織的に導出することのできる近似理論を提出した。
- (2) 表面で任意分布荷重を受ける異方性厚板の変形に関して、具体的に一般的な第 n 近似の方程式を導出した。
- (3) 上面で正弦分布荷重を受ける異方性板の変形問題を解き、数値計算によって解の精度を調べて、提出した近似方程式およびその解が次のような性質をもつことを明らかにした。
 - (3-1) 近似方程式の解は近似の次数を高めることによって厳密解に一樣に漸近する。
 - (3-2) 近似解の精度は異方性が強い程低く、また、板厚の増加に伴って単調に低下する。したがって、異方性が強く、板が厚い程高次の近似方程式が必要となる。
 - (3-3) 与えられた板材に対して本論文で示した数値計算をあらかじめ行っておけば、許容誤差を指定して近似方程式の適用範囲(h/L の上限)を推定したり、あるいは逆に板厚(h/L)を指定して各近似方程式による解の誤差を推定することが比較的容易に行える。

参 考 文 献

- 1) 五十嵐 悟：厚板の変形に関する近似理論(第1報)——等方性厚板の場合，精密工学会誌，**53**，11(1987)1733。
- 2) N. J. Pagano: Exact Solution for Composite Laminates in Cylindrical Bending, J. Composite Materials, **3**, (1969) 398。
- 3) K. H. Lo, R. M. Christensen and E. M. Wu: A High-Order Theory of Plate Deformation, Part 2: Laminated Plates, J. Appl. Mech., **44**, (1977) 669。
- 4) S. A. Ambarutsumyan (神谷紀生訳)：異方弾性板の理論，森北出版(1975) 19-54。