ばね-はりモデルによるねじ締結体の応力解析*

——締付線図への応用——

田 中 稔** 北 郷 薫***

The Stress Analysis of Bolted Joint with Model using Spring-Beam Elements
—Application to the Force-Deformation Diagram of Bolted Joint—

Minoru TANAKA and Kaoru HONGO

The force-deformation diagram has been used to understand the mechanical behavior of a bolted joint. There are, however, no report on the force-deformation diagram of multi-bolted joint. In this paper the author's finite element method using spring-beam elements is applied to construct the force-deformation diagram of multi-bolted joint as well as single-bolted joint. The force-deformation diagram of multi-bolted joint is expressed as the relationship between the sum of axial tension in each bolt and the expansion of a bolt. Using this diagram, not only the relationship between axial tension and expansion of each bolt but also the relationship between compression and reaction in the contact surface produced by the lever action can be obtained for any applied load.

Key words: fixing element, force-deformation diagram, spring-beam element, multi-bolted joint, finite element method

1. 結 言

ねじ締結体において、ボルトで被締結体を締め付けるとボルト及び被締結体に弾性変形が生じ、この弾性変形の復元力によって締付け力が保持される。この締結体に外力が作用すると、弾性変形の様子が変化する。このような締結状態の力学を理解しやすくするために締付線図がよく用いられている。一般に用いられている締付線図は外力の着力点がボルト軸線上のボルト・ナット座面直下にある場合について表したものが多く、しかし、実際の場合は外力の作用点がボルト軸線から離れ、かつ被締結体の表面から外れた所にあるのが普通であるが、このような状態の締付線図を表している例は少ない。これは、被締結体に外力が作用したときの着力点の違いによるばね定数の変化の決定や接合面の分離を考慮した場合の被締結体のばね定数の決定など理論的に計算することが難しい問題があるためである。筆者らは、外力を受けるねじ締結体のボルトの応力挙動を簡単に求めることを目的に、ばね-はりモデルによる解析法を提案^{1)~3)}している。この解析法

によるとボルトの追加軸力や接合面の圧縮力の減少分を簡単に求めることができる。そこで、本研究では、まず、このばね-はりモデルによる解析法を利用して単一ボルト締結体の締付線図を作図する方法を示す。更に、従来、発表されていない複数ボルト締結体の締付線図を作図する方法を提案する。

2. ねじ締結体のモデル化と解析方法

ねじ締結体に外力が作用するとき、被締結体における外力の作用平面の位置によって内力係数が変化することが知られている⁴⁾⁵⁾。これは、外力の作用平面の位置によって被締結体のばね定数が変化するためと考えられる。そこで、図1(a)に示すように nH ($n < 1$)の位置に外力の作用平面があるとし、前報^{1)~3)}と同様に被締結体の圧縮領域を外力の作用平面で座面側及び接合面側に分離し、各々を円筒に置き換えると、各円筒の直径は次式で表される。

$$\left. \begin{aligned} D_c &= 2nH \tan \alpha + d_s \\ D_t &= 2H \tan \alpha + d_s \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

座面側円筒を m 個のばね要素にモデル化するとそのばね定数は次式で表される。

$$\left. \begin{aligned} k_{cl} &= k_c / m \\ k_c &= A_c E / (nH) \\ A_c &= \pi (D_c^2 - d_o^2) / 4 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

* 原稿受付 昭和62年5月6日。昭和61年度精密工学会春季大会学術講演会(昭和61年3月30日)にて発表

** 正 会 員 室蘭工業大学(室蘭市水元町27-1)

*** 正 会 員 工学院大学(東京都新宿区西新宿1-24-2)

Fig. 1 Bolted joint and spring-beam model

また、接合面側円筒を M 個のばね要素にモデル化するとそのばね定数は次式で表される。

$$\left. \begin{aligned} k_u &= A_u k_t / A \\ k_t &= AE / \{2(1-n)H\} \\ A &= \pi(D_t^2 - d_0^2) / 4 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

ここで、 E は縦弾性係数、 d_0 はボルト穴の直径、 A_u は A を M 分割した時の分割部¹⁾の面積である。

図1(b)は(a)のねじ締結体について、ボルトと被締結体全体をばね要素、被締結体の圧縮領域をばね要素として組み立てたばね-はりモデルを示す。解析は(b)のモデルをばねとはり要素とする有限要素法により行う。ばね要素およびはり要素は、各々骨組構造に使われている平面トラス要素および平面ラーメン要素に対応している。

計算過程では、外力が増加すると接合面側のばね要素は、初期締付け力による圧縮力が開放される。圧縮力が完全に開放されたばね要素は構成要素から分離する。さらに、片持ちはり形のねじ締結体の場合には、てこ作用により接合面に分布反力が生ずる。この分布反力は、外力の増加により材端側に移動する。この状態を表すために、ボルト中心より材端側の被締結体に相当するはり要素に初期締付け力により生じた変位を与えることにより拘束し、この節点反力を接合面に生ずる反力に対応させる。また、同時に2節点まで拘束することにより分布反力に対応させている。支点となる拘束節点の反力が負になる場合は、支点が移動すると考えて拘束条件を解き、自由節点とし、次に材端側の節点を拘束する。支点となる拘束節点は材端に相当

Fig. 2 The relationship between load and axial tension

する節点まで移動し、最終的には材端のみが支点となる。

3. 単一ボルト締結体の締付線図

ボルトのばね定数は比較的簡単に計算できるので、ばね-はりモデルによる解析結果から山本の式⁵⁾を用いてボルトの伸びを求める。

3.1 対称な外力を受けるねじ締結体

図2は文献4)を参考に計算した、外力の作用平面の位置をパラメータとしたボルトの軸力と外力の関係を示す。図は座標軸を無次元化して表している、また、図中の一点鎖線は接合面が完全に分離し外力と軸力の増加が等しくなる点を示す。外力の作用平面の位置が座面側にある場合の軸力の増加は大きい、接合面が完全に分離するまでの外力も大きくなっていることがわかる。解析結果は折れ線として表されている。これは、計算過程において接合面側ばね要素の圧縮力が零になったものを構成要素から分離するようにしているが、ばね要素が分離するまでは外力と軸力が比例関係にあるため、この区間は直線となる。ばね要素が構成要素から分離すると、構造が変化するため直線の勾配が変わる。従って、解析結果は、ばね要素が分離する点から勾配が変わる折れ線として表される。しかし、実際の場合は曲線になると考えられる。図3に $n=0.5$ の場合の締付線図を示す。OA はボルトの軸力と伸びの関係を表し、BF は外力がボルト・ナット座面直下にある場合、BCDE は外力の作用平面が $n=0.5$ の場合の被締結体の圧縮力と縮みの関係を表す。外力が表面に作用する場合の圧縮力と縮みの関係は直線となるが、外力が表面から離れた面に作用する時にはこの関係が曲線になると考えられる。ここで、BC は接合面が全面的に接合している区間で、CDE は両端で接合面が分離している区間である。E および F で接合面は完全に分離する。接合面が完全に分離した後では外力とボルト軸力が等しくなる。

Fig. 3 Force-deformation diagram of single bolted joint

Fig. 4 Bolted joint subjected to an eccentric load

Fig. 5 The relationship between load and axial tension

3.2 偏心外力を受けるねじ締結体

図4は偏心外力を受けるねじ締結体を示す。この場合、外力が増加すると接合面は分離するが、この作用により接合面に反力が発生し、この反力の位置が外力の増加とともに材端に移動する。接合面が完全に分離しても、最終的にはこの作用により材端が支点となるため、外力と軸力の増加が等しくなることはない。図5は $n=0.5$ として解析した外力と軸力の関係を示す。ここで、ボルトはM12、軸部長さ18mmの植込みボルトとして計算し、座標軸は無次元化して表している。図6はこの場合の締付線図である。OAは図3と同様にボルト軸力と伸びの関係を示し、B、B'は初期締付状態を表している。また、BCDEおよびB'C'E'は被締結体の圧縮力と縮みの関係を示す。OFは接合面が材端のみで接触している時のボルトの伸びと反力の関

Fig. 6 Force-deformation diagram of bolted joint subjected to an eccentric load

Fig. 7 Multi-bolted joint

係を示す。更に、図中の破線は接合面の反力を表している。EおよびE'点は接合面が材端まで分離した点で、これ以後は材端が支点となる。OFと横軸のなす角 θ は次式で表される。

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{(b-a)k_b}{b} \right) \quad (4)$$

ここで、 k_b はボルトのばね定数である。

この図より、外力 W が作用した時、ボルトの軸力増加分 dF_s 、残留圧縮力 F_R 、この作用による反力 R が求められる。

4. 複数ボルト締結体の締付線図

図7に直列に並ぶ複数ボルト締結体を示す。これは図4の偏心外力を受けるねじ締結体のボルトを2本にしたもので、 $n=0.5$ として解析している。図8は初期締付け力が各々等しい場合の外力と軸力の関係を示す。ここで、ボルトはM12、軸部長さ18mmの植込みボルトとして計算している。この場合ボルト軸力は着力点に近いボルト1の増加が大きくボルト2の増加は非常に少ない。すなわち、外力の増加に対するボルト軸力の増加は各々のボルトで異なっている。従って、複数ボルトでは各々のボルトについて締付線図が作図されることになる。しかしこの場合、外力が作用すると接合面には初期締付け力による圧縮力のほかにこの作用による反力が発生する。この反力を各々のボルト

Fig. 8 The relationship between load and axial tension

Fig. 10 The relationship between load and axial tension

Fig. 9 Force-deformation diagram of multi-bolted joint

に分配することは難しい。ばね-はりモデルによる解析法では各々のボルト軸力および接合面の圧縮力が簡単に得られる。そこで、本研究では各ボルト軸力の和とボルトの伸びの関係として締付線図を表し、この線図から各々のボルトの状態を推定する方法を提案する。

4.1 ボルトのばね定数が各々等しい場合

図9は図8の関係を締付線図で表したものである。横軸はボルトの伸びで縦軸はボルト軸力である。CGDはボルト1,2の軸力の和に対するボルト1の伸びの関係を示し、CEFは接合面における圧縮力と反力の和に対するボルト1の伸びの関係を示している。また、図中の破線は接合面の反力を表す。外力Wが作用した時の残留圧縮力は F_R 、てこ作用による反力はRとして求められる。

CGDおよびCEFから任意の外力に対するボルト1および2の状態を推定する方法を示す。原点Oからボルト1およびボルト2の軸力と伸びの関係を示すOA, OBを引く。この場合はボルトのばね定数 k_{b1} , k_{b2}

が各々等しいのでOA, OBと横軸とのなす角は等しく、ボルトのばね定数を k_{b1} とすると、 $\theta_1 = \tan^{-1} k_{b1}$ となる。ここではボルト2の伸びを符号を変えて表すことにする。C点はボルト1が初期締付け力により伸びた位置で、軸力はボルト1,2の初期締付け力の和であるから、C点から横軸に垂線を下ろしOAおよび横軸との交点をP, Qとすると、PQ, CPは各々ボルト1および2の初期締付け力になっている。また、C点からOAに平行にCHを引き、H点で横軸に垂線を立て、OBとの交点をIとするとHIおよびOHはボルト2の初期締付け力および伸びを表す。CD上の任意の点Gで各ボルトの状態を知るには、C点から横軸に平行にCMを引き、OAに平行にCLを引く。更にG点から横軸に垂線を下ろしCL, CM, CFとの交点を各々g, m, Eとする。GE, Gg, gmは各々外力、ボルト2およびボルト1の追加軸力を表す。またCmはボルト1の追加伸びを表す。ボルト2の伸びはGからOAに平行なGJを引くと横軸上のHJとして追加伸びが求められる。またJ点で横軸に垂線を立てOBとの交点をK、I点から横軸に平行線を引きJKとの交点をiとするとKiはボルト2の追加軸力を表す。CFとCMの交点をnとすると、ボルト1の追加伸びがCn以上になるとボルト1と2の追加軸力の和が外力より大きくなる。これは、てこ作用により接合面に生ずる反力が大きくなるためである。

4.2 初期締付け力が各々異なる場合

実際の場合、各ボルトの初期締付け力が均一とならない場合があると考えられる。初期締付け力が各々異なる場合においても外力と各ボルトの軸力の関係が求められると同様の方法で締付線図を表すことができる。

図10は初期締付け力がボルト1,2で異なる場合の外力と軸力の関係を示す。この場合は着力点に近いボルト1の初期締付け力が材端側のボルト2の初期締付け力よりも低くなっている。図8と比較すると、ボルト2の初期締付け力が図8の場合より高いにもかかわらず

Fig. 11 Force-deformation diagram of multi-bolted joint

Fig. 13 Force-deformation diagram of multi-bolted joint

Fig. 12 The relationship between load and axial tension

らずボルト 1 の軸力増加はほとんど同じ位であることがわかる。この関係を図 9 と同様の方法で締付線図に表したものが図 11 である。図中の記号は図 9 と同じであり、各ボルト軸力の和とボルト 1 の伸びの関係を表す CGD および接合面における圧縮力と反力の和に対するボルト 1 の伸びの関係を表す CEF が求められると、図 9 と同様に任意の外力に対するボルト 1 および 2 の軸力および伸びが推定できる。

4.3 ボルトのばね定数が各々異なる場合

複数ボルト締結の場合には同一寸法のボルトを使用するのが一般的であるが、締付作業や締結部の機能、締結体の形状などによって、ボルトの寸法が各々異なる方が合理的な場合もある。そのような場合にはボルトのばね定数は各々異なった値を持つ。図 12 は着力点に近いボルト 1 のばね定数が材端側のボルト 2 より低いばね定数の場合の外力と軸力の関係を示す。ここで、ボルト 2 は M 12、軸部長さ 18 mm の植込みボルトで、ボルト 1 はボルト 2 の軸部直径を 10 mm として計算している。この図は図 8 とほとんど同様の傾向

を示している。ボルトのばね定数が各々異なっている場合にもばね定数が各々等しい場合と同様の方法で締付線図を表すことができる。図 13 は図 9 と同様の方法で図 12 の関係を締付線図で表したものである。この場合も図 9 と同様の方法で各々のボルトの状態を推定することができる。図中の記号は図 9 と同じであるが、ボルト軸力と伸びの関係を表す OA, OB はばね定数が各々異なるので OA および OB と横軸とのなす角 θ_1, θ_2 は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \theta_1 &= \tan^{-1} k_{b1} \\ \theta_2 &= \tan^{-1} k_{b2} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

また、CH と横軸とのなす角を θ_2 とすることにより、初期締付状態におけるボルト 2 の軸力および伸びが各々 IH, OH として求められる。任意の点 G における各ボルトの状態は GJ を CH に平行に引くことにより図 9 と同様の方法で求めることができる。

以上の方法により複数ボルトの場合には各ボルト軸力の和を表す CGD を適当に仮定できるならばボルト 1 の状態からボルト 2 の状態を推定できる。また、接合面に発生する反力が求められると残留締付け力も推定できる。

5. 結 論

本研究で得られた主な結論は以下のとおりである。

- (1) ボルト軸力の増加や接合面の圧縮力、反力が簡単に計算できるばね-はりモデルによる解析法を用いて、従来から例の少ない偏心外力を受けるねじ締結体の締付線図を作図するとともに、従来から例のない複数ボルトの締付線図として、直列に並ぶ 2 本ボルト締結体を例に、各ボルト軸力の和

とボルトの伸びの関係として締付線図を表す方法を提案した。

- (2) てこ作用により接合面に生ずる反力とボルトの伸びの関係を締付線図の中に作図することにより、締付線図から、ある外力に対する各ボルトの追加軸力、追加伸びが推定でき、残留締付け力も推定できる。

最後に、本研究を進めるに当たり御助言を頂いた室蘭工業大学星野悟教授に深く感謝いたします。

参 考 文 献

- 1) 田中 稔：ばね-はりモデルによるねじ締結体の応力解析——単一ボルト締結体の場合，精密機械，**51**，12 (1985) 2265.
- 2) 田中 稔，北郷 薫：ばね-はりモデルによるねじ締結体の応力解析——偏心外力を受ける場合，精密工学会誌，**52**，4 (1986) 655.
- 3) 田中 稔，北郷 薫：ばね-はりモデルによるねじ締結体の応力解析——複数ボルトによる締結体の場合，精密工学会誌，**53**，4 (1987) 664.
- 4) 吉本 勇，丸山一男，沢 俊行，西口信幸：ねじ締結体の内力係数，日本機械学会論文集，**42**，359 (1976) 2174.
- 5) 山本 晃：ねじ締結体の理論と計算，養賢堂 (1975) 58.

(p. 1727 より続く)

3. 動剛性についてどの部門で研究しているか

メーカーの場合，最も多いのが研究・開発部門 (56.0%) である。次いで設計部等の現場 (40.0%) である。しかし，気になることは，「外部に委託して」，「研究していない」，「その他」の回答が合わせて 14.7% もあることである。約 15% が自社内で動剛性について研究していないことになる。これは，問 7 の試験装置の設備状況と対応している。これがユーザになると，「外部に委託して」，「研究していない」，「その他」の回答が合わせて 29.4% にもなる。

4. 動剛性と工作機械の性能との間に関係はあるか

動剛性と工作機械の性能の関係について，76.0% が大いに関係するとしている。これは，いままでの動剛性について問題になったことがあるか否かの質問とも関連した質問であるが，ユーザ，メーカー共にその重要性を認めている。

5. 動剛性の改善例

メーカーで最も多い改善例は，リブヤスターを多くした (57.3%) 静剛性を高くした (52.0%)

である。これはリブヤスターを多くして静剛性を上げて，動剛性を改善したと理解して良いであろう。

高減衰材を使って動剛性を改善した例も 26.7% に上るが，その内，具体的な対策として

- (1) ベッドやベースをコンクリート充てん構造に
- (2) 従来鋼板溶接構造を高減衰鋳物構造に
- (3) その他

の 3 つの方法がとられている。

構造上，主軸や案内面は工作機械の創成運動，切削能力を支配する重要な要素であるが，動剛性向上対策としては，主軸軸受の予圧を高くする方法 (38.7%) が比較的多くとられている。この予圧を高くするのも，結果的には主軸系の静剛性を高くすることと同じである。

ここで興味ある結果は，案内面の構造を変更したと回答した中で，転がり案内面から滑り案内面に変えて動剛性を改善した例が多いことである。滑り案内面の場合でも摩擦力を低減する目的でふっ素樹脂貼付案内面に変えているものが多い。

6. 動剛性を改善するのに最も効果の大きいものは何か

最も回答の多かったものを順番に 5 項目上げると，表 5.2 のようになっている。これがユーザになると順位が入れ替わり，ユーザの手で修正が施せそうなジグ・取付具が上位になっている。

5.2 動剛性改善対策を施した箇所

メーカ		ユーザ	
(1) 主軸	(57.3%)	(1) ベッド・コラム	(58.8%)
(2) ベッド・コラム	(53.3%)	(2) 軸受	(47.1%)
(3) 軸受	(45.3%)	(3) ジグ・取付具	(35.3%)
(4) 案内面	(44.0%)	(4) 主軸	(35.3%)
(5) ジグ・取付具	(32.0%)	(5) 送り駆動機構	(29.4%)

7. 動剛性試験装置の設備状況

メーカーでは既に設備している，設備する予定であるのいずれかであるものが 69.4% にも上る。ユーザは逆に設備する予定はないが 64.7% もあり，対照的である。その設備の大半は衝撃加振法に対応でき，手軽に試験の行える圧電式インパクトハンマ (84.9%)，圧電式加速度計 (96.2%)，FFT アナライザタイプの伝達関数解析装置 (92.5%) である。そして，解析結果の表示は，コンプライアンス伝達関数 (69.8%)，イナータンス伝達関数 (39.6%) で表示しており，開発レベルでは，多点の伝達関数を測定し，実験モード解析まで 34.0% もが行っている。

(服部 敏夫)