平面4節機構の中間節曲線の自動分類*

渡 辺 克 巳** 岡 田 忠 典***

Automatic Classification of Coupler Curves of Planar Four-Link Mechanisms

Katsumi WATANABE and Tadanori OKADA

This paper proves that the double points of the coupler curves of planar four-link mechanisms are determined by solving the sixth order equation respect to the angular displacement of the driving link and they are classified into the nodes and the ordinary intersections by using the relative angular displacement between the coupler and driven links. A method for determining the inflection points, the maximum- and minimum-curvature points and the number of rotation of the coupler curves is proposed. According to the numbers of these characteristic points and the number of rotation, the coupler curves are automatically classified into thirty kinds. These curves are illustrated schematically together with their appearance frequencies.

Key words: mechanism, kinematics, four-bar linkage, coupler curve, node, curvature curve, classification

1. 緒 言

自動生産システムの構成要素および周辺機器としての一時休止機構や搬送機構などの不等速運動機構^{1)~4)}は平面4節機構の中間節曲線を応用して総合される場合が多い。このとき、中間節曲線が自分自身で交わる(結節点をもつ)か否か、曲率半径の変動が小さい部分が長いか短い、曲率半径が無限大の点(変曲点)または零の点(尖点)を含んでいるか否か、さらにそれらの組合せがどのようになっているかによって応用分野が決まる。

小川は平面4節回転揺動機構の中間節曲線を二つのひずみ度係数と形状係数を用いて分類し⁵⁾、中間節曲線の結節点識別条件を与えた⁶⁾。Diziogluは平面4節機構の中間節曲線の理論に関する論文⁷⁾の中で、対称な中間節曲線の分類を行い、二重点を焦点円と直角双曲線の交点として決定した。しかしこれらの手法を原動節が1回転できる平面4節機構の一般的な中間節曲線の自動分類に応用するのは難しいように思われる。

そこで本論文では、中間節曲線の特徴を把握し、高精度の機構の総合を可能にするため、平面曲線の代数学的性質、すなわち結節点、変曲点、曲率の絶対値が極大または極小になる点の数および曲線の回転数によって中間節曲線を自動的に分類する手順を与える。

さらに分類された曲線の相互間の関連について検討する。

2. 結節点の算出

平面4節機構の中間節曲線は三重円的六次曲線であり、原動節が1回転できる場合には、元の機構構成と連節が反転したときの機構構成で創成される二つの閉曲線から成り立っている。中間節曲線の二重点は、図1に示すように、一つの閉曲線自身が交わる場合の二重点と二つの閉曲線の交点としての二重点に分けられる。本論文では前者を結節点、後者を単純交点と呼ぶことにする。

2.1 焦点円

静止直交座標系 $O-xy$ 内に静止対偶点 D および A の座標をそれぞれ $(0, 0)$ および $(a, 0)$ として配置さ

Fig. 1 Double points of the coupler curve of the planar four-link mechanism

* 原稿受付 平成元年4月8日。昭和63年度精密工学会秋季大会学術講演会(昭和63年10月5日)にて発表

** 正 会 員 山形大学工学部(米沢市城南4-3-16)

*** 正 会 員 キヤノン(株)(東京都大田区下丸子3-30-2)

Fig. 2 Kinematic constants and angular displacements of the planar four-link mechanism

れた4節機構 ABCD の機構定数および節角変位を図2に示す通りとする。このとき中間節点 K の座標 (x, y) は次式で与えられる。

$$x = a + b \cos \phi + e \cos(\theta - \alpha) \quad (1)$$

$$y = b \sin \phi + e \sin(\theta - \alpha) \quad (2)$$

または

$$x = d \cos \psi - f \cos(\theta + \beta) \quad (3)$$

$$y = d \sin \psi - f \sin(\theta + \beta) \quad (4)$$

式(1), (2) から ϕ を消去して得られる式および式(3), (4) から ϕ を消去して得られる式は次のように整理される。

$$\begin{aligned} & \{(x-a)\cos\alpha - y\sin\alpha\}\cos\theta \\ & + \{(x-a)\sin\alpha + y\cos\alpha\}\sin\theta \\ & - \frac{(x^2+y^2-2ax+a^2-b^2+e^2)}{2e} = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} & (x\cos\beta + y\sin\beta)\cos\theta - (x\sin\beta - y\cos\beta) \\ & \times \sin\theta + \frac{(x^2+y^2-d^2+f^2)}{2f} = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

中間節曲線の二重点には、図3に示すように二つの節角変位が対応する。これは、 $\cos\theta$ と $\sin\theta$ に関する二元連立方程式(5), (6)の解が不定になる場合である。よって二重点に対する必要条件として次式が得られる。

$$\begin{vmatrix} (x-a)\cos\alpha - y\sin\alpha & (x-a)\sin\alpha + y\cos\alpha \\ x\cos\beta + y\sin\beta & -x\sin\beta + y\cos\beta \end{vmatrix} = 0 \quad (7)$$

式(7)を展開して整理すると周知の焦点円の方程式が得られる。

$$x^2 + y^2 - ax + a \cot(\alpha + \beta)y = 0 \quad (8)$$

2.2 二重点の条件式

中間節曲線の二重点は式(8)と中間節曲線の交点として決定される。中間節点Kが二重点と一致するときの原動節角変位 ϕ の値を決定するため、式(1), (2)を式(8)に代入すれば次式が得られる。

$$R_1 \cos\theta + S_1 \sin\theta = T_1 \quad (9)$$

ここに

Fig. 3 Double point configurations of the planar four-link mechanism

$$\left. \begin{aligned} R_1 &= \frac{a \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} + 2b \cos(\phi + \alpha) \\ S_1 &= \frac{a \cos \beta}{\sin(\alpha + \beta)} + 2b \sin(\phi + \alpha) \\ T_1 &= -\frac{(b^2 + e^2)}{e} - \frac{ab}{e} \{ \cos \phi \\ & \quad + \cot(\alpha + \beta) \sin \phi \} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

式(9)の ϕ と θ は、4節機構の原動節と中間節の節角変位関係

$$R_2 \cos\theta + S_2 \sin\theta = T_2 \quad (11)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} R_2 &= a + b \cos \phi \\ S_2 &= b \sin \phi \\ T_2 &= -\frac{(a^2 + b^2 + c^2 - d^2)}{2c} - \frac{ab}{c} \cos \phi \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

を満足しなければならない。よって式(9)と(11)が二重点位置に関する必要十分条件となる。

式(9)と(11)は $\cos\theta$ および $\sin\theta$ について次のように解かれる。

$$\cos\theta = \frac{T_1 S_2 - T_2 S_1}{R_1 S_2 - R_2 S_1} \quad (13)$$

$$\sin\theta = \frac{R_1 T_2 - R_2 T_1}{R_1 S_2 - R_2 S_1} \quad (14)$$

式(13)と(14)から θ を消去して得られる ϕ に関する条件式

$$(T_1 S_2 - T_2 S_1)^2 + (R_1 T_2 - R_2 T_1)^2 = (R_1 S_2 - R_2 S_1)^2 \quad (15)$$

は、式(10), (12)を代入して整理すると次のようになる。

$$\begin{aligned} & h_1 \cos^3 \phi + h_2 \cos^2 \phi \sin \phi + h_3 \cos^2 \phi \\ & + h_4 \cos \phi \sin \phi + h_5 \cos \phi + h_6 \sin \phi + h_7 = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

ここに

$$\begin{aligned}
 h_1 &= p_1 p_3 + q_1 q_4 - r_1 r_4 + r_2 r_5 \\
 h_2 &= p_1 p_4 + q_2 q_4 - r_1 r_5 - r_2 r_4 \\
 h_3 &= p_1 p_5 + p_2 p_3 + q_1 q_5 + q_3 q_4 - r_1 r_6 + r_2 r_7 \\
 &\quad - r_3 r_4 - s_1^2 + s_2^2 \\
 h_4 &= p_1 p_6 + p_2 p_4 + q_2 q_5 - r_1 r_7 - r_2 r_6 - r_3 r_5 - 2s_1 s_2 \\
 h_5 &= p_1 p_7 + p_2 p_5 + q_1 q_6 + q_3 q_5 - r_1 r_8 - r_2 r_5 \\
 &\quad - r_3 r_6 - 2s_1 s_3 \\
 h_6 &= p_2 p_6 + q_2 q_6 - r_2 r_8 - r_3 r_7 - 2s_2 s_3 \\
 h_7 &= p_2 p_7 + q_3 q_6 - r_2 r_7 - r_3 r_8 - s_2^2 - s_3^2 \\
 p_1 &= 2ab \\
 p_2 &= a^2 + b^2 \\
 p_3 &= \left(\frac{a^2 b^2}{e^2} \right) \{1 - \cot^2(\alpha + \beta)\} \\
 p_4 &= 2 \left(\frac{a^2 b^2}{e^2} \right) \cot(\alpha + \beta) \\
 p_5 &= 2(b^2 + e^2) \left(\frac{ab}{e^2} \right) \\
 p_6 &= 2(b^2 + e^2) \left(\frac{ab}{e^2} \right) \cot(\alpha + \beta) \\
 p_7 &= \frac{(b^2 + e^2)^2}{e^2} + \left(\frac{a^2 b^2}{e^2} \right) \cot^2(\alpha + \beta) \\
 q_1 &= 4ab \\
 q_2 &= 4ab \cot(\alpha + \beta) \\
 q_3 &= \frac{a^2}{\sin^2(\alpha + \beta)} + 4b^2 \\
 q_4 &= \frac{a^2 b^2}{c^2} \\
 q_5 &= (a^2 + b^2 + c^2 - d^2) \left(\frac{ab}{c^2} \right) \\
 q_6 &= \frac{(a^2 + b^2 + c^2 - d^2)^2}{4c^2} \\
 r_1 &= ab \left\{ 2 \cos \alpha + \frac{\sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} \right\} \\
 r_2 &= -ab \left\{ 2 \sin \alpha - \frac{\cos \beta}{\sin(\alpha + \beta)} \right\} \\
 r_3 &= \frac{a^2 \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} + 2b^2 \cos \alpha \\
 r_4 &= \frac{2a^2 b^2}{ce} \\
 r_5 &= 2 \left(\frac{a^2 b^2}{ce} \right) \cot(\alpha + \beta) \\
 r_6 &= (a^2 + 3b^2 + c^2 - d^2 + 2e^2) \left(\frac{ab}{ce} \right) \\
 r_7 &= (a^2 + b^2 + c^2 - d^2) \left(\frac{ab}{ce} \right) \cot(\alpha + \beta)
 \end{aligned}$$

$$r_8 = (a^2 + b^2 + c^2 - d^2) \frac{(b^2 + e^2)}{ce}$$

$$s_1 = ab \left\{ 2 \sin \alpha + \frac{\cos \beta}{\sin(\alpha + \beta)} \right\}$$

$$s_2 = ab \left\{ 2 \cos \alpha - \frac{\sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} \right\}$$

$$s_3 = \frac{a^2 \cos \beta}{\sin(\alpha + \beta)} + 2b^2 \sin \alpha$$

式(16)は $t = \tan(\phi/2)$ とおくことにより t の6次方程式に帰着させて解くことができる。得られた実根を式(13), (14)に代入すれば二重点位置における中間節角変位 θ の値が求まり, 式(1), (2)から二重点の座標が決定される。

一つの二重点に ϕ の二つの値が対応するから, 条件式(16)が2, 4または6個の実根をもつ場合に, 二重点がそれぞれ1, 2または3個存在することになる。この条件式は実在する二重点のみを決定することができるので Dizioglu の条件式よりも有用である。

2.3 結節点の識別

式(16)の偶数個の実根の中で同一の二重点を与える二つの値を (ϕ_i, ϕ'_i) ($i=1, 2$ または 3) とし, これらに対応する θ および ψ の値をそれぞれ (θ_i, θ'_i) および (ψ_i, ψ'_i) とする。

4節機構の中間節と従動節が反転しているか否かはそれらの節のなす角の正弦の符号で調べることができる。すなわち, 二重点に対する機構の二つの位置は, 条件

$$\sin(\theta_i - \psi_i) \sin(\theta'_i - \psi'_i) > 0 \quad (17)$$

が成立する場合(図3の(a))には同一の機構構成に属することになり, この場合の二重点は一つの閉曲線自身の交点(結節点)である。そして条件

$$\sin(\theta_i - \psi_i) \sin(\theta'_i - \psi'_i) < 0 \quad (18)$$

が成立する場合(図3の(b))には, 二重点に対する機構の二つの位置が異なる機構構成に属することになり, この場合の二重点は二つの閉曲線の交点(単純交点)である。

3. 変曲点, 曲率極大点および曲率極小点の算出

3.1 曲率曲線

4節機構ABCDに関してボビリアの定理を適用する。図4において, 直線DAとCBの交点をPとし, 直線ABとCDの交点をQとする。点Qを通り直線QKと $\angle BQP$ に等しい角をなす直線と直線CKの交点をFとし, 直線DFとQKの交点をGとすれば, 中間節点Kが描く曲線の曲率半径は2点K, G間の距離で与えられる。

Fig. 4 Bobillier's construction

中間節曲線の曲率 x の絶対値は曲率半径の逆数で与えられる。曲率には文献 8) の手順で符号を付ける。中間節曲線の長さ L を用いて実際の曲率 x を $\bar{x} = Lx/2\pi$ と標準化し、 ϕ を横軸に、 $\bar{x}$ の逆正接を縦軸にとって描いた曲率の変化状況を表す曲線を曲率曲線と呼ぶことにする。この曲線は、中間節曲線の自然方程式の曲線に相当する曲線であり、中間節曲線を特徴付ける点の決定に有効である。中間節曲線とそれの曲率曲線の例を図 5 に示す。図中の記号 $\circ$, $\bullet$, $+$ および $\square$ はそれぞれ曲率極大点、曲率極小点、変曲点および結節点を表している。

3.2 変曲点

曲率曲線が ϕ 軸と交わる点として決定される。実際には ϕ の値を 0° から 360° まで ϕ_n ずつ変化させて曲率の符号が変わる区間を求め、区間縮小法により変曲点の位置を決定する。

3.3 曲率極大点および曲率極小点

曲率の絶対値 $|x|$ が極大になる点および極小になる点をそれぞれ曲率極大点および曲率極小点と呼ぶことにする。これらの点は x が正の場合の曲率曲線の極大および極小値点、または x が負の場合の曲率曲線の極小および極大値点として求められる。実際には、 ϕ の値を 0° から 360° まで ϕ_n ずつ変化させて曲率の差分の符号が変わる区間を求め、曲率の符号を知り、区間縮小法により曲率極大点および曲率極小点の位置を決定する。

4. 中間節曲線の分類

4.1 中間節曲線の探索

静止節長 a を単位長さとする。原動節長 b 、中間節長 c および従動節長 d は、 $b = Z_1$, $c = Z_2$, $d = Z_3$ とするとき、区間 $[0, 1]$ 内の値をとる一様乱数 u_i ($i = 1 \sim 3$) から次式で決定される値とする。

Fig. 5 Examples of the coupler curve and the curvature curve

$$Z_i = \begin{cases} 1.6u_i + 0.2 & (0 \leq u_i < 0.5) \\ 8u_i - 3 & (0.5 \leq u_i < 1) \end{cases} \quad (19)$$

$(i = 1 \sim 3)$

式 (19) により節長 b, c および d は区間 $[0.2, 1]$ 内の値と $[1, 5]$ 内の値を同確率でとることになり、この結果、回転揺動機構と 2 重回転機構をほぼ同確率で発生させることができる⁹⁾。

対偶点 C を原点、直線 CB を ξ 軸、それと直交する軸を η 軸とする直交座標系 $C-\xi\eta$ 内における中間節点 K の座標を (ξ, η) とする。中間節上での中間節点の位置は、区間 $[0, 1]$ 内の値をとる一様乱数 u_4, u_5 を用いて次式で決定する。

$$\left. \begin{aligned} \xi &= 10Z(u_4 - 0.5) + 0.5c \\ \eta &= 10Z(u_5 - 0.5) \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

ここで Z は平均節長 $(a + b + c + d)/4$ である。

式 (20) により、中間節点 K は中間節の代表線分 $\overline{BC}$ の中点を中心とする一辺が $10Z$ の正方形内に決定され、機構定数 e, α および f, β は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} f &= \sqrt{\xi^2 + \eta^2} \\ \beta &= \text{ATAN} 2(\eta, \xi) \\ e &= \sqrt{c^2 + f^2 - 2cf \cos \beta} \\ \alpha &= \text{ATAN} 2(\eta, c - \xi) \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

5 つの乱数の組 $(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)$ を多数発生させ、式 (19)~(21) を用いて 4 節機構を決定して中間節曲線を探索する。

4.2 曲線の回転数

一つの結節点をもつ閉曲線は、図 6 に示すように、輪ゴムを 1 回ひねった形の曲線 (a) と 2 重輪にした形の曲線 (b) に分けられる。これらは変曲点、曲率極大点および曲率極小点の数のみでは識別することができない。そこで、閉曲線の長さを L とし、曲率 x を弧長 s の関数と見なすとき、積分

$$m = \frac{1}{2\pi} \int_0^L K(s) ds \quad (22)$$

で与えられる曲線の回転数¹⁰⁾を導入する。図 6 の (a)

Fig. 6 Examples of closed curves having one node

および(b)の曲線の回転数はそれぞれ0および2である。回転数は結節点の数が2以上の閉曲線の基本形状の分類にも有効である。

4.3 分類結果

乗数、法および初期値をそれぞれ23, 8 388 609 および7 046 007とする乗算合同法で得られる一連の乱数を用いて原動節が1回転できる10万個の機構を発生させる。それらの機構の原動節角変位の値を 0° から 360° まで 1° ずつ変化させて結節点、変曲点、曲率極大点および曲率極小点の数、さらに曲線の回転数を算出し、それらの組合せで中間節曲線を分類した。

曲率極小点の数は曲率極大点の数から変曲点の数を引いた数に等しい。中間節曲線の形状は、結節点等の数および回転数が同一であっても、機構が回転揺動形であるか2重回転形であるかによって著しく異なる。そこで本論文では、回転揺動機構または2重回転機構の中間節曲線であることを表すCまたはDの英字と、結節点の数、曲線の回転数、曲率極大点および変曲点の数をこの順に並べた英数字の組合せを曲線の識別記号とする。

図7はC 1066, D 0154 およびD 3230の曲線例とそれらを創成する機構である。分類された中間節曲線の模式図と各曲線間の関連を図8に示す。

4.4 考 察

回転揺動機構および2重回転機構の基本的な中間節曲線はそれぞれC 0132, C 1022 およびD 0120,

Fig. 7 Some complex coupler curves generated by planar four-link mechanisms

D 1210の2種類で、他の曲線はそれらから次の変化を数回行って得られる。

- (a) 曲率極大点と曲率極小点が1組となって増加する。
- (b) 曲率極小点の一つ減少または増加し、二つの変曲点と曲率極大点の1組となって増加または減少する。
- (c) 二つの結節点の1組となって増加する。

図8の各曲線間に記入してある「 $\rightarrow$ 」, 「 $\leftrightarrow$ 」および「 $\Rightarrow$ 」はそれぞれ上記の(a), (b) および(c)の変化を表している。

5. 結 言

原動節が1回転できる平面4節機構の中間節曲線の自動分類について検討した。得られた結果を要約すれば次の通りである。

- (1) 中間節曲線の結節点は原動節角変位に関する6次方程式を解いて決定される。これは結節点の最大数が3であることを解析的に証明している。
- (2) 回転揺動機構の中間節曲線は20種類に、2重回転機構の中間節曲線は10種類に分類される。
- (3) 回転揺動機構および2重回転機構の中間節曲線はそれぞれC 0132, C 1022 およびD 0120, D 1210が基本的である。他の曲線はそれらから一定の規則で変化し、基本的曲線からの変化の段階が多くなるに従って曲線の出現度数が小さくなる。

図面作成に協力された本学部近野誠技官に感謝の意を表す。

文 献

- 1) W. Ihme : Entwicklung von Totlagenrastgetrieben aus der Kinematischen Kette nach Stephenson, Maschinenbautechnik, 33, 1, (1984) 29.
- 2) K. Hain : Vereinfachte Bestimmungsgleichungen für

Fig. 8 Schematic diagram of the coupler curves of thirty kinds

- Bewegungs-Weiterleitungen von Koppelkurven mit Spizen, Mech. Mach. Theory, 18, 2, (1983) 139.
- 3) K. Hain : Erzeugung von Rastperioden durch Gelenkgetriebe, VDI-Forsch.-h., 597, (1980) 28.
 - 4) 下嶋 浩, 小川 深, 藤原彰彦, 佐藤 治 : 可調整機構の搬送機への応用, 日本機械学会論文集 (C編), 48, 429 (1982) 723.
 - 5) 小川 深 : リンク機構の総合 (Synthesis) について, 日本機械学会論文集, 25, 154 (1959) 510.
 - 6) 小川 深, 下嶋 浩 : 曲線創成平面4節機構の総合 (特異点について), 日本機械学会論文集, 37, 293 (1971) 169.
 - 7) B. Dizioglu : Die Theorie der Koppelkurven, VDI-Forsch.-h., 369, (1987) 15.
 - 8) 渡辺克巳 : ワット形平面6節機構の中間節曲線の自動分類 (第1報, 結節点および曲率曲線), 日本機械学会論文集 (C編), 54, 508 (1988) 3133.
 - 9) R. E. Garrett and A. S. Hall, Jr. : Optimal Synthesis of Randomly Generated Linkages, ASME, Ser. I, 90, 3, (1968) 475.
 - 10) 小林昭七 : 曲線と曲面の微分幾何, 裳華房 (1978) 15.