CAE データベースのデータの胞複体鎖モデル (第1報)*

——幾何学的モデルの統一化のための基礎——

相 沢 民 王**

A Cell Complex Chain Model of Data for CAE Databases
— A Base for Unification of Geometric Models —

Tamio Aizawa

A new mathematical model, called the cell complex chain, is proposed as a base for unification of different geometric models. The starting point for defining this model is represented by a pair of a subset of a cell complex and a cell sub-complex generated from the subset of a cell complex in homology theory. The data of so-called boundary representations of solid shapes and their manipulations for the shape transformation can be reasonably described semantically and formally in the restricted cell complex chains, called the boundary cell complex chains, and the figure transformation. A formal data model, called abstract cell complex chain, for CAE databases is introduced to make the data of boundary representations correspond to the geometric cell complex chains.

Key words: geometric modeling, computer aided engineering, computer aided design, database, data model, cell complex, homology theory

1. 緒 言

本論文は機械系CAE, その中でも幾何学的なモデルとこれを記述するデータの数学モデルに関するものである。

従来のいわゆるCSG,境界表現などの形状モデル¹⁾の数学的な基礎をホモロジー理論^{2)~4)}に求めるとそれらを統一的な視点からとらえることができる。

ホモロジー理論においては,オイラー・ポアンカレの式の導出する過程で次に示す数学的对象が順に定義あるいは誘導される。

- (1) 胞体 (図形)
- (2) 胞複体
- (3) 胞複体の鎖群
- (4) 胞複体のホモロジー群
- (5) オイラー・ポアンカレの式

胞体はユークリッド空間のコンパクト (有界, 閉集合) な図形で, 正則集合モデル¹⁾はこれに閉じた演算 (正則集合演算と呼ばれる) を定義したものと考えることができる。又, オイラーモデル⁵⁾はオイラー・ポ

アンカレの式が表す対象に演算を定義したもので, その演算は境界表現の内部モデルの操作 (オイラーオペレーションと呼ばれる) に適用されている。

これに対し, 著者はシステムのデータモデル, その中でも特に境界表現の内部モデルに着目し, その数学モデルを研究対象としてとりあげる。又, これを定義するにあたって, 前記の胞複体と胞複体の鎖群の要素である鎖に注目する。しかしながら, いずれの対象も

- (a) 境界表現の内部モデルを十分に記述していない。
- (b) 形状モデルの有用な操作の一つである集合演算的操作を十分に説明できない。

そこで, 本論文ではホモロジー理論をベースにして, 上記の胞複体, 鎖の概念を含み, しかも上記の問題を解決する数学モデルを新たに定義する (この幾何学的なモデルを胞複体鎖, 又このデータを記述する形式的なモデルを抽象胞複体鎖と呼ぶ)。

モデルの有効性を明らかにするにはその閉じた操作 (基本操作) を示す必要がある。本論文では紙面の都合上, モデルの説明のために必要なものを述べるにとどめる。モデルの操作については別途, まとめて報告することにする。

2. 幾何学的モデル

2.1 基本構成

* 原稿受付 昭和62年12月9日。第4回設計自動化学工学会講演会 (昭和61年7月17日), 昭和62年度精密工学会春季大会学術講演会 (昭和62年3月28日) にて発表

** 正 会 員 日立製作所 (土浦市神立町 502番地)

Fig.1 The subset of Euclidean space corresponding to a cell complex chain

幾何学的モデルを以下に示す対象モデル(胞複体鎖)と図形(対象の形状モデル)の組で定義する。又対象モデル(胞複体鎖)に対し、それが表す図形と対応するある規則 F が定められる。図1はこれらの関係を示したものである。

2. 2 胞複体鎖, 境界胞複体鎖

1) 対象モデルの構成条件

ここでは、対象モデル(胞複体鎖)を胞複体をベースにして構成することを考える。そのために、まず胞複体をベースに構成されるモデルを考え、次に対象モデル(胞複体鎖)の構成条件を検討する。

胞複体の部分集合(巾集合の要素)と部分胞複体^{2)~4)}には次のような関係がある。

- (a) 胞複体の部分集合は胞複体を生成し、生成された胞複体はもとの胞複体の部分集合(部分胞複体)である*。
- (b) 一つの胞複体が与えられると、そのすべての部分集合を考えることにより、部分胞複体の空間を定義できる((a)から)。

従って、一つの胞複体が与えられるとこれをベースにして次に示すモデルとその空間を考えることができる。

(m1) 胞複体の部分集合

(m2) 部分胞複体

(m3) 胞複体の部分集合とそれから生成される部分胞複体の組

これに対し、ここでは次の条件を満たすモデルを考える。

- (i) 集合演算(和, 差, 積)ができる**。
- (ii) モデルの構成要素(胞体)のすべての辺胞体^{2)~4)}をその構成要素にもつ。
- (iii) モデルの構成要素(胞体)は向き付けられている*。

(m1) は条件 (ii), (iii) を, (m2) は条件 (i) **, (iii) を, (m3) は条件 (iii) を満たし

* 胞体, 胞複体の定義より, 胞複体の部分集合の要素(胞体) $|c_1|$ から生成された胞複体 $K(|c_1|)$ の和集合 $\bigcup K(|c_1|)$ は胞複体の条件を満たし, 又もとの胞複体の部分集合になることが示される。

ていない。

そこで、以下では (m3) を基本モデルとして、条件 (iv) を満たすモデル(胞複体鎖)を定義する。

2) 胞複体鎖 $A(E)$

胞複体鎖は以下に示すように内部表現, 外部表現の二つの形式で表される。図2はその例を示したものである。

(a) 内部表現 (E, I)

胞複体鎖の内部表現を以下に示す外部鎖 E とそれから生成される内部鎖 $I(E)$, 境界サイクル鎖 $B(E)$ の組 $(E, (I, B))$, あるいは (E, I) で定義する。そのために、まずベースとなる内部鎖 I , 境界サイクル鎖 B を定義し、次に外部鎖 E と E から生成される $I(E)$, $B(E)$ を定義する。

(a1) 内部鎖 I , 境界サイクル鎖 B

胞複体 K に属する胞体 $|c|$ に任意の向きを定め、これを $\dot{c}$ と書く。これらのすべての集合を内部鎖と呼び、 I で表す。式で書くと、

$$I = \{\dot{c}_k; |\dot{c}_k| \in K\} \quad (1)$$

ここで、 k は向き付けられた胞体 $\dot{c}$ の添数、又 0 胞体 $\dot{c}_k$ には向きがないとする。

式(1)の内部鎖 I の要素 $\dot{c}_k$ が表す r 胞体 $|c_k|$ の $r-1$ 辺胞体 $|c^{r-1}|$ ($|c^{r-1}| < |c_k|$ と書く) に $\dot{c}_k$ の向きから自然に定まる向き^{2)~4)} を与えたものの集合を $\dot{c}_k$ の境界サイクルと呼び、 $\partial \dot{c}_k$ と書く。このとき、 $\partial \dot{c}_k$ の集合を境界サイクル鎖と呼び、 B で表す。式で書くと、

$$B = \{\partial \dot{c}_k; \dot{c}_k \in I\} \quad (2)$$

$$\partial \dot{c}_k = \{\underline{c}^{r-1}; |\underline{c}^{r-1}| < |\dot{c}_k|, [\dot{c}_k, \underline{c}^{r-1}] = 1\} \quad (3)$$

ここで、式(3)の L は $\dot{c}_k$ の向き付けられた $r-1$ 辺胞体 $\underline{c}^{r-1}$ の添数、 $[\dot{c}_k, \underline{c}^{r-1}]$ は $\dot{c}_k$ と $\underline{c}^{r-1}$ の結合係数で、⁴⁾ $\partial \dot{c}_k$ は空集合とする。又、式(3)の境界サイクルの要素 $\underline{c}^{r-1}$ を次式で表す。

$$\underline{c}^{r-1} = \varepsilon_{k(L)} \dot{c}_{k(L)} \\ (\dot{c}_{k(L)} \in I, |\dot{c}_{k(L)}| = |\underline{c}^{r-1}|) \quad (4)$$

式(4)の $\dot{c}_{k(L)}$ は $\underline{c}^{r-1}$ と同じ図形を表す内部鎖 I (式(1))の要素で $k(L)$ はその添数、 $\varepsilon_{k(L)}$ は $\dot{c}_k$ と $\dot{c}_{k(L)}$ の結合係数である ($\dot{c}_{k(L)}$ と $\underline{c}^{r-1}$ の向きが等しいとき $\varepsilon_{k(L)}$ を $+1$, 逆向きのとき -1)。

** 対応する図形の演算に置き換えると、いわゆる図形の集合演算的操作が定義できる。

+ ユークリッド空間の中の r 胞体 $|c^r|$ を含む r 次元部分空間の向きを、 $|c^r|$ の向きと呼ぶ⁴⁾。

++ 部分胞複体は差演算に対して閉じない。

Fig.2 The generation process of internal and external representation of a cell complex chain

(a2) 外部鎖 E , 内部鎖 $I(E)$, 境界サイクル鎖 $B(E)$

K に属する胞体 $|c_i|$ に向きと整係数 a を与え, これを $a c_i$ と書く (ただし, c_i と逆向きの胞体を $-c_i$ とし, $-a_i \cdot -c_i = a_i c_i$ と $a_i c_i$ を同視する). $a c_i$ の全体を考え, その部分集合を外部鎖と呼び, E で表す. 式で書くと,

$$E = \{a_i c_i; a_i \in \mathbb{Z}, |c_i| \in K, -a_i \cdot -c_i = a_i c_i, a_i R c_i\} \quad (5)$$

ここで, i は向き付けられた胞体 c_i の添数, $\mathbb{Z}$ は整数, R は a_i と c_i の関係を表す. 又, 式 (5) の c_i を次式で表す.

$$c_i = \varepsilon_{k(i)} \dot{c}_{k(i)} \\ (\dot{c}_{k(i)} \in I, |\dot{c}_{k(i)}| = |c_i|) \quad (6)$$

式 (6) の $\dot{c}_{k(i)}$ は c_i と同じ図形を表す内部鎖 (式 (1)) の要素で, $k(i)$ はその添数である. 又 c_i と $\dot{c}_{k(i)}$ の向きが等しいとき $\varepsilon_{k(i)}$ を $+1$; 逆向きのとき -1 と定め, これを c_i と $\dot{c}_{k(i)}$ の結合係数と呼ぶ.

外部鎖 E から生成される部分胞複体 $K(E) (= \cup K(c_i))$ の各要素にもとの内部鎖 I の要素と同

じ向きを与えると, 内部鎖 I の部分集合が生成される. これを E から生成される内部鎖と呼び, $I(E)$ で表す. 式で書くと,

$$I(E) = \{\dot{c}_k; \dot{c}_k \in I, |\dot{c}_k| \in K(E)\} \quad (7)$$

又, 式 (7) の $I(E)$ から生成される境界サイクル鎖 B の部分集合を E から生成される境界サイクル鎖と呼び, $B(E)$ で表す.

図2 (a) は Π^2 (二次元ユークリッド空間) 上の半空間 $\{h_k^1(p) \geq 0\}$ から生成される胞体 $|c_i^1|$, 又, 図2 (b) は胞体 $|c_i^1|$ から生成される胞複体 $K(|c_i^1|)$ を示したものである.

図2 (c) は胞複体鎖の内部表現で, その外部鎖 E は胞複体 $K(|c_i^1|)$ の部分集合 $\{|c_i^1|, |c_i^2|\}$ を考え, それらの要素に向きと整係数 a_1, a_2 を与えたもので, 内部鎖 $I(E)$ は外部鎖 E の構成要素 c_i^1, c_i^2 から生成される部分胞複体 $K(E) (K(|c_i^1|) \cup K(|c_i^2|))$ で, 図2 (b) の胞複体 $K(|c_i^1|)$ と同じ) のすべての要素にもとの内部鎖 I の要素と向きを与えたものである.

図2 (c) の外部鎖の要素の c_i^1 と内部鎖の要素 $\dot{c}_i^1$ の結合係数 ε_i^1 はこれらの向きが等しいから 1 である (式 (5)). 又内部鎖の要素 $\dot{c}_i^1$ と内部鎖の要

素 $c_{1/2}$ の結合係数 $\varepsilon_{1/2}$ は、 $c_{1/2}$ の境界サイクルの要素 c_1 と $c_{1/2}$ の向きが異なるから -1 である (式 (3)).
(b) 外部表現 (E, B')

胞複体鎖の外部表現を外部鎖 E, E から生成される境界サイクル鎖 B' (E) と内部鎖 I (E) の組 ((E, B'), I), あるいは (E, B') で定義する.

外部鎖 E と内部鎖 I (E) は内部表現で定義されたものと同じである.

c^r の境界サイクル (式 (3)) の各要素に c^r の整係数 a を与えた $\{a c^{-1}\}$ を $a c^r$ の境界サイクルと定め、 $a \partial c^r$ と書く. 外部鎖 E の要素 $a_i c_i$ の境界サイクル $a_i \partial c_i^{-1}$, $a_i \partial c_i$ のすべての要素が生成する境界サイクル $a_i \partial c_i^{-1}$, $\dots, a_i \partial c_{i-1}^{-1}$, $\dots$, $\bigcup_{L_1} a_i \partial c_{L_1}^{-1}$ のすべての要素が生成する境界サイクル $a_i \partial c_i^{-2}$, $\dots, a_i \partial c_{i-2}^{-2}$, $\dots$, $\dots$ を順次生成し、生成されたすべての境界サイクル $\{a_i \partial c_i^{-1}\} \cup \{a_i \partial c_{i-1}^{-1}\} \cup \{a_i \partial c_{i-2}^{-2}\} \cup \dots$ を $B' (a_i c_i)$ と書く. このとき、外部鎖 E の各要素から生成される境界サイクルの和集合 $\bigcup_i B' (a_i c_i)$ を境界サイクル鎖と呼び、これを次式で表す.

$$B' (E) = \{a_i \partial c_i^j\} \quad (8)$$

$$a_i \partial c_i^j = \{a_i c_i^{-1}; |c_i^{-1}| < |c_i^j| |c_i^{-1}, c_i^j| = 1\} \quad (9)$$

ここで、式 (8)、式 (9) の j は外部鎖 E から生成される境界サイクル $a_i \partial c_i^j$ の添数で、又 $a_i \partial c_i^j$ は空集合とする. このとき、式 (9) の c_i^{-1} は内部表現の構成要素を用いて、次のように表すことができる.

$$c_i^{-1} = \varepsilon_{k(L)} \partial c_k(L) \\ (\partial c_k(L) \in I, |c_k(L)| = |c_i^{-1}|) \quad (10)$$

$$\varepsilon_{k(L)} = \varepsilon_{k(i)} \varepsilon_{k(L_1)} \varepsilon_{k(L_2)} \dots \varepsilon_{k(L_k)} \quad (11)$$

式 (10) の $\partial c_k(L)$ は c_i^{-1} と同じ図形を表す内部鎖の要素で、 $k(L)$ はその添数である. 又 $\varepsilon_{k(L)}$ は式 (6)、式 (3)、式 (4) から誘導される式 (11) で表され、これを c_i^{-1} と $\partial c_k(L)$ の結合係数と呼ぶ ($\varepsilon_{k(L_1)}$ は $\partial c_{k(i)}$ と $\partial c_{k(L_1)}$ 、 $\varepsilon_{k(L_2)}$ は $\partial c_{k(L_1)}$ と $\partial c_{k(L_2)}$ 、 $\dots$ 、 $\varepsilon_{k(L_k)}$ は $\partial c_{k(L_{k-1})}$ と $\partial c_{k(L_k)}$ の結合係数).

図 2 (d) は胞複体鎖の外部表現で、境界サイクル鎖 B の生成では、まず外部鎖 E の構成要素 c_i の境界サイクル ∂c_i ($= \{c_1, \dots, c_4\}$)、そのすべての要素の境界サイクル $\partial c_{1/2}$ ($= \{c_1, c_2\}$)、 $\dots$, $\partial c_{1/4}$ を順次生成し、生成されたすべての境界サイクルの要素にもとの外部鎖の構成要素 c_i の整係数 a_i を与える (破線枠). 次に外部鎖 E の構成要素 $c_{1/2}$ の境界サイクル $\partial c_{1/2}$ を生成し、 $\partial c_{1/2}$ の各要素に $c_{1/2}$ の整係数 a_2 を与える. 境界サイクル鎖は生成された

すべての境界サイクルの集合 $\{a_1 \partial c_i, a_1 \partial c_{1/2}, \dots, a_1 \partial c_{1/4}, a_2 \partial c_{1/2}\}$ (点線枠) で表される.

図 2 (c) の部分内部鎖 I (E) の要素 $c_{1/2}$ と図 2 (d) の境界サイクルの要素 c_1 の向きは異なるから、これらの結合係数 $\varepsilon_{1/2}$ は -1 である.

上述のように胞複体鎖の外部鎖 E を与えると、E とそれから生成される I (E), B (E), B' (E) でその内部表現、外部表現を生成することができる. そこで、これを A (E) で記述する. 又、胞複体鎖 A (E) を外部鎖の各要素 $a_i c_i$ から生成される胞複体鎖 $a_i A (c_i)$ の集合と同一視し、これを次式で表す.

$$A (E) = \{a_1 A (c_1), a_2 A (c_2), \dots, a_n A (c_n)\} \quad (12)$$

このように定義された胞複体鎖はその構成法から次のような性質がある.

- (i) 外部鎖、内部鎖の部分集合はそれを外部鎖とする胞複体鎖を生成する.
- (ii) 境界サイクルの部分集合はそれを外部鎖とする胞複体鎖を生成する.

この性質は胞複体鎖の空間での閉じた演算 (後述の境界演算 ∂^* など) を定義するのに役立つ.

3) 境界胞複体鎖 $\partial^* A (E)$

次に胞複体鎖の性質 (2) の (ii)) を用いて境界胞複体鎖を定義する.

胞体 c^{r+1} の r 境界サイクル ∂c^{r+1} を外部鎖とする胞複体鎖を r 境界胞複体鎖と呼び、 $\partial^* A (c^{r+1})$ と書く (∂^* は胞複体鎖から境界胞複体鎖を生成する演算で、境界演算と呼ぶ).

2. 3 胞複体鎖が表す図形

胞複体鎖 A (E) はその構成法から、それが表す胞複体、図形に一意に変換することができる.

(a) 胞複体 K (E)

A (E) の外部表現から胞複体 K (E) への変換は、まず A (E) からその内部鎖 I (E) を作成し、次に作成された内部鎖 I (E) の要素を図形とみなすことにより胞複体 K (E) を生成する. 式で書くと、

$$I (E) = \{\partial c_{k(i)}\} \cup \left\{ \bigcup_j \partial c_{k(j)} \right. \\ \left. (\partial c_{k(j)} = \{\partial c_{k(L)}\}) \right\} \quad (13)$$

$$K (E) = \{|c_k|; c_k \in I (E)\} \quad (14)$$

ここで、式 (13) の $\{\partial c_{k(i)}\}$ 、 $\partial c_{k(j)}$ は外部鎖 (式 (5)、式 (6))、境界サイクル (式 (9)、式 (10)) に対応する内部鎖の部分集合を表す. 又、構成要素を図形 (向きのない胞体) とみたときの外部鎖と境界サイクルの集合和で生成することもできる. すなわち、

$$K(E) = \{ |c_i^r| \} \cup \left(\bigcup_j \partial^* c_j^s \right) \\ (\partial^* c_j^s = \{ |c_l^{s-1}| \}) \quad (15)$$

(b) 図形 $|A(E)|$

$A(E)$ が表す図形 $|A(E)|$ は, $K(E)$ の要素の集合和である^{2)~4)}. 式で書くと,

$$|A(E)| = \bigcup_k |c_k| \\ (|c_k| \in K(E)) \quad (16)$$

図2(d)の外部表現の外部鎖 ($\{a_1 c_1^r, a_2 c_1^s\}$) とすべての境界サイクル ($a_1 \partial c_1^r, a_1 \partial c_1^s, \dots, a_1 \partial c_1^s, a_2 \partial c_1^s$) に対応する内部鎖の部分集合の集合和をとると, 図2(c)の内部表現の内部鎖 $I(E)$ が得られる (式(13)). 又, 得られた内部鎖 $I(c_1^r)$ のすべての要素の向きをとると, 図2(b)の部分胞複体 $K(|c_1^r|)$ が得られる (式(14)).

図2(d)の外部表現 (E, B) の外部鎖 ($\{a_1 c_1^r, a_2 c_1^s\}$) とすべての境界サイクルの要素の整係数と向きをとり, 又それらの集合和をとる (共通要素を除く) と直接的に図2(b)の胞複体 $K(|c_1^r|)$ が得られる (式(15)).

このようにして得られた胞複体 $K(|c_1^r|)$ のすべての要素の和集合をとると, 図2(a)に示すように胞複体鎖が記述するユークリッド空間の図形が得られる (式(16)).

3. 抽象胞複体鎖

3.1 境界胞複体鎖と境界表現の内部モデル

1) データ記述

図3は境界胞複体鎖 $\partial^+ A(c^3)$ の内部表現のデータの構造を表形式で示したものである. 従来の境界表現の内部モデル (データ構造) のデータはこの形式に変換できる. 各表の名称と記号は境界胞複体鎖の内部表現の構成要素の名称で, 各表に格納されるデータの意味を表す (ここでは, 内部鎖のすべての r 胞体を要素とする集合を r 内部鎖, r 内部鎖のすべての要素の境界サイクルの集合を内部鎖の r 境界サイクル鎖と呼び, それぞれを別々の表にしている). 又 () 内の名称は従来から名付けられている表の名称で $\langle * \rangle$ は胞複体鎖の構成要素 $*$ から幾何学的な意味をとり除いた単なる記号 (各表の一つの行を示す) でその操作は胞複体鎖の規則に従うものとする. このとき, 境界胞複体鎖の構成要素, 例えば r 胞体 c_k^r (内部鎖の要素) のデータを次のように考える.

* 向きのデータは冗長である¹⁾. c_k^r の向きは c_k^r から誘導される c_l^{r-1} の向きから定めることができる.

2-BCC Chain: 2-Boundary Cell Complex Chain
E. Chain: External Chain
I. Chain: Internal Chain or Sub-chain
BC Chain: Boundary Cycle Chain
•: Pointer to →

Fig.3 An example of the internal model of a 2-boundary cell complex chain

(i) まず, すべての胞体 $\langle c_k^r \rangle$ にその幾何学的意味とは無関係に $|c_k^r|$ を含む空間 Π_k^r と c_k^r の向きのデータ (記号) $*$ を対応させる.

(ii) 次に, $c_k^r (\Pi_k^r)$ と $c_k^{r-1} (\Pi_k^{r-1})$ の向きに合わせて c_k^r の境界サイクル $\{\epsilon_k^{r-1} c_k^{r-1}\}$ の ϵ_k^{r-1} のデータを定義し, $\langle \epsilon_k^{r-1} \rangle$ に対応させる.

このように考えると, 胞体 $\langle c_k^r \rangle$ は前述の定められた規則に従って胞体 c_k^r を含む空間 Π_k^r ($\langle c_k^r \rangle$ に対応するデータ) と Π_k^r 上の半空間 $\{h_k^{r-1}(p) \geq 0\}$ ** のデータ ($\langle c_k^r \rangle$ の境界サイクル $\langle \epsilon_k^{r-1} \rangle$ に対応する $\{\Pi_k^{r-1}\}$ とそれらの要素の向きのデータ) をもつことになり, 胞体 $\langle c_k^r \rangle$ に対して向き付けられた胞体 c_k^r という幾何学的な意味を与えることができる.

同様に, 他の境界胞複体鎖 (境界表現) の要素についても幾何学的な意味をもつデータを定義することが

** 胞体 c_k^r をそれを含む空間 Π_k^r と Π_k^r 上の境界サイクル $\{\epsilon_k^{r-1}\}$ で再定義しても同様の議論が成り立つ.

できる。

2) 形状モデルへのデータ変換

(a) ワイヤフレームモデル

境界胞複体鎖 (境界表現) からワイヤフレームモデルへのデータ変換では、例えば

(i) まず、2境界サイクル鎖表の各要素 $\{ \dot{e}_k, \dot{c}_k \}$ とこれに対応する1境界サイクル鎖表の $\{ \dot{e}_k, \dot{c}_k \}$ のデータ ($\dot{c}_k$, $\dot{c}_k$ はポイントで記述) から1境界サイクル $\{ \dot{e}_k, \dot{e}_k, \dot{c}_k \}$ のデータを生成する (式 (9), 式 (10), 式 (11))。

(ii) 次に、各1境界サイクル $\{ \dot{e}_k, \dot{e}_k, \dot{c}_k \}$ ($\dot{c}_k$ はポイントで記述) に対応する1内部鎖表の $\{ \dot{c}_k \}$ のデータを検索し、それらの集合和 (共通要素を除いたもの) のデータを生成する (式 (13) で1境界サイクルのみに制限したもの)。

(iii) 次に、生成された内部鎖の部分集合 ($\{ \dot{c}_k \}$ の集合和) の各要素 $\dot{c}_k$ が表す胞体 $| \dot{c}_k |$ のデータ、すなわち $| \dot{c}_k |$ を含む空間 Π_k (稜線を表す方程式) と半空間 $\{ h_k(p) \geq 0 \}$ (端点) のデータを生成する (式 (14))。

(iv) 次に、生成された $\{ | \dot{c}_k | \}$ のデータを、例えばCRTに表示するためのデータに変換する (式 (16))。

(b) ソリッドモデル

境界胞複体鎖 (境界表現) からソリッドモデルへのデータ変換では、例えば

(i) まず、境界胞複体鎖 $\partial^+ A(c^3)$ (境界表現) のデータから胞複体鎖 $A(c^3)$ のデータ (図3に示すデータに3外部鎖表, 3内部鎖 (中実体) 表に格納されるデータを加えたもので、この操作を拡大演算と呼ぶ) を生成する。

(ii) 次に、(a) のワイヤフレームの場合と同様の操作で胞体 $| \dot{c}_k |$ のデータ、すなわち $| \dot{c}_k |$ を含む空間 Π_k (三次元ユークリッド空間) のデータと空間 Π_k 上の半空間 $\{ h_k(p) \geq 0 \}$ のデータを生成する。

境界胞複体鎖 $\partial^+ A(c^3)$ (境界表現) の要素のデータを用いて、直接的にユークリッド空間の半空間 $\{ h_k(p) \geq 0 \}$ のデータを生成することもできる。

3. 2 抽象胞複体鎖

胞複体鎖からその幾何学的な意味を取り除いた (抽象化した) モデル* の立場から胞複体鎖をとらえると、このモデルは胞複体鎖のデータをよく記述する。この

* 胞複体鎖の内部表現の構成要素の整係数、向きを除いたものである (前述の胞複体の部分集合とそれから生成される部分胞複体の組に演算を定めたもの)。

形式的で一般化されたデータモデルを幾何学的意味をもつ胞複体鎖と区別し、抽象胞複体鎖と呼ぶ。

4. 幾何学的モデルの統一化

図形と胞複体鎖からなる幾何学的モデル、およびこれに抽象胞複体鎖を加えたモデル構成は従来の幾何学的モデルの枠組みを広げ、またそれらを統一化する。

複数の向き付けられた3胞体あるいは2胞体を外部鎖の要素にもつ胞複体鎖とその図形変換で、非多様体ソリッド、モービウス曲面²⁾⁻⁴⁾ を記述できる。

向き付けられた1, 2, 3胞体を外部鎖の要素にもつ胞複体鎖とその図形変換で、ワイヤフレーム、サーフェス、ソリッドの組合せ図形を記述できる。

胞複体鎖 (幾何学的) モデルの要素とその属性のデータの組を抽象胞複体鎖の要素に対応させることにより、形状に物性、境界・拘束条件などを与えた設計対象モデル (例えば有限要素解析用モデル) を記述できる。

5. 結 言

CAEで用いられる種々の幾何学的モデルを統一化するための基礎付けとして図形 (ユークリッド空間の部分集合で形状の数学モデル) と胞複体鎖 (対象の数学モデル) からなる幾何学的モデルとこれを記述するデータの数学モデル (抽象胞複体鎖) を定義した。また、これらのモデル構成が、

(1) いわゆる境界表現の内部モデルとその形状モデルへのデータ変換を良く説明する

(2) 非多様体形状、これに物性、境界・拘束などの属性を与えた設計対象モデルを記述する

ことを示した。

今後、CAEシステムの一層の大規模化、あるいは既存システムの統合化が進められると考えられる。そのためには、常にそこにたちもどってシステムを再構成するための立脚点となる数学モデルの研究は不可欠であり、またこれらの統一モデルの理論的探求はその達成の有効なアプローチであると考えられる。今後、本モデルの一層の拡大、展開を図っていく所存である。

参 考 文 献

- 1) A.G.Requicha: Representation for Rigid Solids: Theory, Methods and Systems, Computing Surveys, 12,4, (1980) 437.
- 2) 松本幸夫: 4次元トポロジー, 日本評論社 (1979).
- 3) 田村一郎: トポロジー, 岩波書店 (1972).
- 4) 河田敬義: 位相幾何学, 岩波書店 (1965).
- 5) B.G.Baumgart: Geometric Modeling for Computer-vision, Stanford Artificial Lab., SAN-CS-463, (1974) 589.