はかり用の一体型平行ばね機構の変位特性 (第5報)*

——最小板厚に寸法誤差のある4個の円弧ばねの場合——

吉 村 靖 夫** 天 田 勝 正*** 赤 坂 隆†

Displacement Characteristics of One-piece Parallel Spring Movement
for Balance (5th Report)

—On Four Circular Springs with Dimensional Errors in the Minimum Thickness—

Yasuo YOSHIMURA, Katumasa AMADA and Takashi AKASAKA

There is an ideal point with constant translational displacement in the parallel spring movement comprised of the springs which are symmetric with respect to an axis passing through its midpoint. Compared with the leaf springs, the circular springs can be, from the view point of machinability, made easily with high accuracy, because only boring is needed. Authors studied the effect of the dimensional error of the minimum thickness of the springs on the error rate of displacement of the moment. The paper may be summarized as follows; (1) Around fifty percent of the dimensional error of the minimum thickness contributes to the error rate of the displacement. This leads directly to the error of mass to be measured by the movement as balance, (2) There exists no difference in the effects of the dimensional errors on the error rate of displacement, between two springs of the upper or lower side, (3) Owing to the mutual compensation, the dimensional errors of the upper and lower springs brought by boring a circular hole through a blank cause no the error rate of displacement, and (4) the existence of the reinforcing plate attributes to improve the sensitivity of the movement as balance and reduce the error rate of displacement.

Key words: parallel spring moment, circular spring, balance, error rate of displacement, dimensional error in the minimum thickness

1. はじめに

一体型平行ばね機構には理想点がある。すなわち、これを構成するばねに寸法誤差があっても、それらの左右対称性が保たれる限り、ばね形状や荷重点の位置に無関係に理想点での変位が一定となる。原理的にはこの理想点の変位が測定したい質量に比例するので、はかりやロードセルなどに応用されている。著者らは本研究第3報¹⁾において、真直板ばねよりも加工が容易な円弧ばねを取り上げ、最小板厚に寸法誤差のある

2個の円弧ばねからなる一体型平行ばね機構の変位特性について報告した。

そこで本報では、はかりとしての感度の向上と変位誤差の低減化の両方の役目を果たすことのできる4個の円弧ばねからなる平行ばね機構を取り上げ、加工によるばねの寸法誤差が変位に及ぼす影響を理論解析とFEM数値解析により調べ、同時に実験値との比較を行う。

2. 理論解析

2.1 寸法誤差比

図1(a)は4個の円弧ばね①～④からなる一体型ばね素子を示す。上下2個ずつのばねはそれぞれ剛性の高い平板部分(以下強化平板と呼ぶ)Aにより一体で結ばれている。また円弧ばね②、④は移動台Bに結ばれている。寸法誤差が変位に及ぼす影響はばねが上下対称であるから、いずれか一方だけについて調べればよい。いま、ばね③、④には寸法誤差がなくこ

* 原稿受付 昭和63年3月29日。昭和62年度精密工学会中国四国支部広島地方講演会(昭和62年11月15日)および東北支部仙台地方講演会(昭和63年3月12日)にて発表

** 正会員 東京工業高等専門学校(八王子市梶田町1220-2)

*** 正会員 機械振興協会技術研究所(東久留米市八幡町1-1-12)

† 正会員 中央大学理工学部(東京都文京区春日1-13-27)

$$\begin{aligned} R_0 &= 5 \text{ (mm)} & t_{m2} &= t_{m0} + \Delta t_{m2} \\ t_{m0} &= 2 & \Delta t_{m2} &= 0.1 \\ L_0 &= 12 & L_s &= 2.5, 5 \\ b_0 &= 4.6 & E &= 205 \text{ GPa (S45C)} \end{aligned}$$

(a) Element with four circular springs

Compliances;
 $C_{P0}, C_{M0}, C_{My0}, C_{Q0}, C_{Qy0}$
 for springs ①, ③, ④
 $C_P, C_{M0}, C_{My}, C_{Q0}, C_{Qy}$
 for spring ②

(b) Generalized four spring system

Equivalent spring

Equivalent compliances and free sketch body

(c) Equivalent springs and compliances

Fig. 1 Equivalent springs and compliances

れらを基準円弧ばね（基準最小板厚 t_{m0} ，半径 R_0 ，板幅 b_0 ）と呼ぶことにする。一方，ばね①，②に寸法誤差があるとした場合，それらの各寸法誤差が変位に及ぼす影響は同じである。このことは本研究第4報²⁾で扱った4個の真直板ばねからなる平行ばね機構の場合の解析結果にもとづくものである。そこでばね②が最小板厚寸法 t_{m2} を持ち，基準最小板厚よりも Δt_{m2} だけ最小板厚寸法誤差があるものとして理論解析を進

める。最小板厚の寸法誤差と基準最小板厚との比を以後，単に寸法誤差比と呼ぶことにする。他のばね①，③，④の寸法誤差比が変位に及ぼす影響はばね②の結果を重ね合わせればよい。

加工時の寸法誤差には最小板厚のほかに，穴直径の誤差と穴の中心のずれがあり，これらは上下それぞれ2個のばねの中心間距離の誤差をもたらす。しかし，前者は加工を同時に行う際すべてのばねに共通に生ずる寸法誤差であるため変位に対する影響は相殺される。また後者の寸法誤差の変位に対する影響は最小板厚の寸法誤差のそれに比べ実際上，十分小さいことが分かっているのでここでは無視する。

2.2 コンプライアンス

図1(b)はばねを一般化したものである。 $C_{P0}, C_{M0}, C_{My0}, C_{Q0}, C_{Qy0}$ は一端固定，他端自由の基準円弧ばねの自由端でのコンプライアンスである。すなわちそれらはそれぞればねの自由端に作用する単位軸力による x 方向の変位，単位曲げモーメントおよび単位横荷重による角変位と y 方向変位である。本研究第3報によれば，各コンプライアンス間には $C_{My0} = C_{Q0} = R_0 C_{M0}$ ， $C_{Qy0} = k_0 R_0^2 C_{M0}$ の関係がある。なお， k_0 の値は数値計算によればおよそ $k_0 = 1.14$ である。

同様に寸法誤差を持つばね②のコンプライアンスは $C_P, C_{M0}, C_{My}, C_{Q0}, C_{Qy}$ で表され，各コンプライアンス間には $C_{My} = C_{Q0} = R_0 C_{M0}$ ， $C_{Qy} = k_0 R_0^2 C_{M0}$ の関係がある。

円弧ばねにおける $C_{P0}, C_P, C_{M0}, C_{M0}$ とそれらの相互関係は， $m_0 = -(1 + t_{m0}/R_0)$ ， $m = -(1 + t_{m2}/R_0)$ と置くと，

$$C_{P0} = \frac{-1}{Eb_0} \left(\pi + \frac{4m_0}{\sqrt{m_0^2 - 1}} \tan^{-1} \sqrt{\frac{m_0 - 1}{m_0 + 1}} \right)$$

$$C_P = \frac{-1}{Eb_0} \left(\pi + \frac{4m}{\sqrt{m^2 - 1}} \tan^{-1} \sqrt{\frac{m - 1}{m + 1}} \right)$$

$$C_{M0} = \frac{12}{Eb_0 R_0^2} \cdot \frac{1}{(m_0^2 - 1)^2} \left\{ 2m_0 + \frac{1}{m_0} + \frac{3m_0}{\sqrt{m_0^2 - 1}} \left(\frac{\pi}{2} + \tan^{-1} \frac{1}{\sqrt{m_0^2 - 1}} \right) \right\}$$

$$C_{M0} = \frac{12}{Eb_0 R_0^2} \cdot \frac{1}{(m^2 - 1)^2} \left\{ 2m + \frac{1}{m} + \frac{3m}{\sqrt{m^2 - 1}} \left(\frac{\pi}{2} + \tan^{-1} \frac{1}{\sqrt{m^2 - 1}} \right) \right\}$$

ここで E は材料の縦弾性係数である。なお，

$$C_P = \alpha_P C_{P0}, \quad C_{M0} = \alpha_M C_{M0}$$

とすれば，

$$\alpha_P = \frac{C_P}{C_{P0}} = 1 - \frac{1}{2} \frac{\Delta t_{m2}}{t_{m0}} + \frac{1}{4} \frac{\Delta t_{m2}}{R_0}$$

$$\alpha_M = \frac{C_{M\theta}}{C_{M\theta 0}} \approx 1 - 2 \frac{\Delta t_{m2}}{t_{m0}} - 3 \frac{\Delta t_{m2}}{R_0}$$

で近似的に表すことができる。

上下のばねは強化平板 $2L_s$ を挟んで直列であるから解析の簡単化のために本研究第4報²⁾と同様な考え方で上下のばねを各1個のばねに置き換える。下側の2個のばねはいずれも基準円弧ばねであるから、これらを1個のばねに置き換えた（図1(c)）ものを基準等価ばねと名づける。この自由端bでの基準等価コンプライアンスを2つの基準円弧ばねのコンプライアンス、 C_{P0} 、 $C_{M\theta 0}$ で表すと、

$$C_{Pb} = 2C_{P0}, \quad C_{M\theta b} = 2C_{M\theta 0},$$

$$C_{Myb} = C_{Q\theta b} = 2R_0 C_{M\theta 0} \left(2 + \frac{L_s}{R_0} \right)$$

$$C_{Qyb} = 4R_0^2 C_{M\theta 0} \left\{ 2 + 2k_0 + 3 \frac{L_s}{R_0} + \left(\frac{L_s}{R_0} \right)^2 \right\}$$

となる。

次に上側の2個の円弧ばねを1個のばねに置き換えたものを等価ばねと名づけ、その自由端aでの等価コンプライアンスを C_{Pa} 、 $C_{M\theta a}$ で表すと次式となる。

$$C_{Pa} = C_{P0}(1 + \alpha_P), \quad C_{M\theta a} = C_{M\theta 0}(1 + \alpha_M)$$

$$C_{Mya} = C_{Q\theta a} = R_0 C_{M\theta 0} \left(3 + \alpha_m + 2 \frac{L_s}{R_0} \right)$$

$$C_{Qya} = 4R_0^2 C_{M\theta 0} \left\{ 2 + k_0(1 + \alpha_m) + 3 \frac{L_s}{R_0} + \left(\frac{L_s}{R_0} \right)^2 \right\}$$

2.3 釣合い方程式と条件式

図1(c)において荷重点sと変位測定点xの原点を基準等価ばねの中央に定め、移動台Bの下部の平板上Eに荷重Fを作用させた時の上部平板Dの任意点xでの変位 δy を求める。いま、自由端a, bに軸力P, 曲げモーメント M_a, M_b , 横荷重 Q_a, Q_b が働くことと仮定すれば移動台に働く力とモーメントは、

$$Q_a + Q_b - F = 0 \quad (1)$$

$$M_a + M_b + L_0 P + (s - L_s - 2R_0) F = 0 \quad (2)$$

点a, bでのy方向変位 $\delta y_a, \delta y_b$ がほぼ等しく、また角変位 θ_a, θ_b が等しいこと、さらに移動台の傾きはばねの軸力にもとづく伸縮によるものであるから、

$$\begin{aligned} \delta y_a &= C_{Qya} Q_a - C_{Mya} M_a \\ &\approx C_{Qyb} Q_b - C_{Myb} M_b = \delta y_b \end{aligned} \quad (3) \nearrow$$

$$\lambda_0 / t_{m0} = \frac{1 - \sin^{-1} \left(\frac{\sqrt{m_0^2 - 1}}{m_0} \right) / \sqrt{m_0^2 - 1}}{(2m_0^2 + 1) / \{m_0(m_0 - 1)\} + 3m_0 \sin^{-1} \left(\frac{\sqrt{m_0^2 - 1}}{m_0} \right) / \{(m_0 - 1)\sqrt{m_0^2 - 1}\}}$$

λ_0 は円弧の半径 R_0 と最小板厚 t_{m0} に関係して変化することがわかる。図2(b)は基準円弧ばねにおいて軸力Pが作用する位置と傾きとの関係を3つの荷重

$$\begin{aligned} \theta_a &= C_{Q\theta a} Q_a - C_{M\theta a} M_a \\ &= C_{Q\theta b} Q_b - C_{M\theta b} M_b = \theta_b \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \theta_a &= (C_{Q\theta a} Q_a - C_{M\theta a} M_a) \\ &= (C_{Pa} + C_{Pb}) \frac{P}{L_0} \end{aligned} \quad (5)$$

ここで式(5)の右辺の L_0 について検討する。 L_0 は両ばねに軸力が作用しても傾きが発生しないと仮定する時の荷重点間の距離である。真直板ばねの場合は中立線は板厚の中間にあり、この線上に軸力が作用する限り板ばねの自由端は傾かず平衡状態となる。すなわち、中立線が傾きに関する平衡位置となる。次に円弧ばねの場合、最小板厚部分について考えてみると真直板ばねの場合に相当する平衡点の位置は最小板厚の半分よりもやや円弧中心側に位置する。

基準円弧ばね又は寸法誤差のある円弧ばねのこれらの平衡点の上面からの距離をそれぞれ λ_0, λ とすれば、上下ばねの有効間隔 L_0 は次式で表される。

$$L_0 = H - (\lambda_0 + \lambda)$$

ここで、 H は移動台のみかけの高さである。厳密な解析を行うには、上式で与えられる L_0 を式(5)の右辺に代入する必要がある。

なお、 λ_0 は次のようにして求める。図2(a)の基準円弧ばねにおいて、上端から λ_0' の位置Dに力Pが作用すれば任意点における曲げモーメント M_x は t_x を任意点xにおける板厚とする時、

$$\begin{aligned} M_x &= P \left(\frac{t_x}{2} - \lambda_0' \right) \\ &= P \left[\frac{t_{m0} + R_0 \{1 - \sqrt{1 - (1 - x/R_0)^2}\}}{2} - \lambda_0' \right] \end{aligned}$$

となる。なお、モーメント M_x は任意板厚 t_x の中心線に関するものである。任意点xでの断面二次モーメント I_x は、

$$I_x = \frac{b_0}{12} [t_{m0} + R_0 \{1 - \sqrt{1 - (1 - x/R_0)^2}\}]^3$$

となる。片持ちはりに対してたわみ方程式、 $EI_x y'' = -M_x$ を境界条件： $x=0$ で $dy/dx=0$ のもとで解き、さらに $x=2R_0$ において $dy/dx=0$ とおけば $\lambda_0' = \lambda_0$ が求まる³⁾。

点に付きFEM数値解析により調べたものである。基準最小板厚2mm、半径20mmの円弧ばねにおいては上面から1.28mmの位置に軸力Pが作用する時の

Fig. 2 Applied point of P where no rotational displacement occurs

み、自由端は傾かないことがわかる。 λ についても同様にして求めることができる。

図2(c)は λ_0/t_m と t_m/t_{m0} の関係を示す。最小板厚比 t_m/t_{m0} が小さくなるほど比率 λ_0/t_m が大きくなり、一方、大きくなる程、すなわち円弧ばねが真直板ばねに近づく程0.5に近くなる。

ここで式(5)まで記述を戻す。式(1)~(5)を解いて Q_a , M_a を求めれば自由端aでの y 方向変位と角変位 δy_a , θ_a が得られる。任意点 x における変位 δy は、

$$\delta y = \delta y_a + (x - L_s - 2R_0)\theta_a \quad (6)$$

で表される。

すべてのばねに寸法誤差がない場合の $s=0$ での変位 δy_0 ははかりにおいては真の質量に相当する変位であり、

$$\delta y_0 = 4FR_0^2 C_{M00} \left\{ k_0 + \frac{1}{2} \frac{L_s}{R_0} + \frac{1}{4} \left(\frac{L_s}{R_0} \right)^2 \right\} \quad (7)$$

$(\delta y - \delta y_0)/\delta y_0$, すなわち変位誤差比を考えるとこれは質量測定誤差比を意味し、その近似式は、

Fig. 3 Arrangement of experimental apparatuses

$$\frac{\delta y - \delta y_0}{\delta y_0} \approx -\frac{1}{2} \frac{\Delta t_m}{t_{m0}} + \left\{ \frac{1}{k_0 + (1/2)(L_s/R_0) + (1/4)(L_s/R_0)^2} \right\} \times \frac{C_{P0}}{L_0^2 C_{M00}} \frac{s}{R_0} \frac{x}{R_0} \quad (8)$$

となる。ここで $\Delta t_m = \Delta t_{m2}$ である。第1項は寸法誤差比の約半分が常に変位誤差比となることを示す。第2項は荷重点 s と変位測定点 x に関するものでいずれかが原点にあれば0となる。また、強化平板の長さ $2L_s$ が大きくなると変位誤差比が減少することが分かる。以上、ばね②の寸法誤差の変位誤差比への影響を述べたが、ばね①の場合も同様となることを後述のFEM数値解析により確認した。

3. 実験装置と実験方法

図3は装置の配置図である。寸法誤差比 $\Delta t_m/t_{m0} = \pm 0.05, 0$ を持つばね素子の1個の左側を固定し $s/R_0 = \pm 4, 0$ の中の1点に荷重 $F=63.7 \text{ N}$ を作用させた。また平板Cに対し $x/R_0 = \pm 4.25, 0$ の位置にギャップセンサを置く。変位に比例した電圧を変換器T、マルチメータMに取り込み、マイコンMCでデータ処理した後変位誤差比をプロッタPに出力する。図4,5は装置の外観と素子の例を示す。

4. FEM数値解析

図6はFEM数値解析のためにアイソパラメトリック平板要素を用いて、図1(a)に示したばね素子を自動分割したものである。節点数426、要素数338である。図7はFEM数値解析による各種の寸法誤差比に対する変位の相違を示す。変位はすべて x, y 方向に1500倍に拡大して示してある。各図において Δt_{m1} , Δt_{m2} は①, ②の寸法誤差である。また荷重 $F=63.7 \text{ N}$ とした。図(a)~(c)と図(d)~(f)は荷重が原点に作用する場合のばね①, ②のそれぞれの寸法誤差比

Fig. 4 Appearance of equipment

Fig. 5 Samples of element

Fig. 6 Automatically divided flat plate elements for FEM. The number of nodes and elements are 426 and 338

の違いが変位に及ぼす影響を表す。 $\delta y'_0$, δy_0 , $\delta y''_0$ はそれぞれ $\Delta t_{m1}/t_{m0} = \Delta t_{m2}/t_{m0} = 0.05$, 0 , -0.05 における原点の変位である。

2つのばね①, ②の寸法誤差 Δt_{m1} と Δt_{m2} がそれぞれ同じ場合は変位の差 $\Delta \delta y'_0$ ($= \delta y'_0 - \delta y_0$) と $\Delta \delta y''_0$

($= \delta y''_0 - \delta y_0$) も等しいことから、ばね①, ②の寸法誤差が変位誤差に与える影響は同じであることがわかる。図(g)~(i)は寸法誤差がない場合の荷重点の変化による変位の相違を示す。また、図(j)~(l)はばね①, ②にそれぞれ、寸法誤差比 $\Delta t_{m1}/t_{m0} = -0.05$, $\Delta t_{m2}/t_{m0} = 0.05$ の場合の変位を表す。荷重点はそれぞれ $s/R_0 = -4, 0, 4$ の3点である。図(j)~(l)よりばね①, ②に寸法誤差があっても変位に対する影響が相殺しあって、寸法誤差がない場合と同じとなることから、平行平板に穴あけした場合の上下のばねに生ずる寸法誤差ははかりにおいて変位誤差比に影響しないと見ることができる。これは穴あけした時、ばね①と③ならびにばね②と④はそれぞれ寸法誤差の影響を相殺し合うからである。

5. 結果と考察

図8は s/R_0 をパラメータとして変位測定点比 x/R_0 に対する変位誤差比について理論値と実験値を比較(図(b)はFEM数値解析値も含む)したものである。(a)は強化平板の長さが変位誤差比に与える影響を寸法誤差が無い場合について調べたもので理論値と実験値はほぼ一致する。 L_s が小さい限りは、 L_s にほぼ反比例して変位誤差比が変化することがわかった。(b)~(e)は各ばねの寸法誤差比の影響を示す。各図とも実験値と理論値は原点ではほぼ一致するが x, s が

Fig. 7 Comparison of displacements due to the dimensional errors of the minimum thickness of springs ① and ②, and the loading positions
($F = 63.7$ N, $\delta y_0 = 27.7$ μ m, $\delta y'_0 = 27.01$ μ m, $\delta y''_0 = 28.39$ μ m, $\Delta \delta y'_0 = -0.7$ μ m, $\Delta \delta y''_0 = 0.7$ μ m)

Fig. 8 Error rate of displacement due to the length of the reinforcing plate and the error rate of the minimum thicknesses. By $F=63.7\text{ N}$ applied on the origin, the theoretical and experimental values of δy_0 yield 28.5, 40 μm for $L_s/R_0=0.5$, and 49.5, 62 μm for $L_s/R_0=1$, respectively. Dimensions are given in Fig. 1 (a)

大きくなると差が増大する。(b)より $\Delta t_{m2}/t_{m0} = -0.05$ の場合において原点でこの誤差比の約半分の変位誤差比が認められる。FEM 数値解析との比較も示したが実験値、解析値ともよく一致している。(c)は $\Delta t_{m2}/t_{m0} = -0.05$, $t_{m4}/t_{m0} = 0.05$ の時で寸法誤差の影響が相殺しあい原点における変位誤差比がほぼ 0 となる。(d)は $\Delta t_{m1}/t_{m0} = \Delta t_{m2}/t_{m0} = -0.05$ で、この場合は寸法誤差比の影響が相乗したため変位誤差比が寸法誤差比の約 2 倍、5% となる。(e)は $\Delta t_{m1}/t_{m0} = \Delta t_{m2}/t_{m0} = -0.05$, $\Delta t_{m3}/t_{m0} = \Delta t_{m4}/t_{m0} = 0.05$ で、全部のばねに寸法誤差があっても変位誤差比は 0 となる。

6. 結 論

- (1) 荷重点や変位測定点位置に無関係に最小板厚の寸法誤差比の約半分が変位誤差比となる。
- (2) 4 個の各ばねの寸法誤差比が変位誤差比に与える影響は同じである。したがって、相互に最小板厚寸法を補正しながら変位誤差比を 0 に近づけることが容易である。
- (3) 平行平板に穴あけすると両側に寸法誤差を生ずるが変位誤差に対する影響が相殺し合って 0 となる。
- (4) 強化平板は原点での変位を増大させ、また変

位誤差比はその長さに反比例して変化する。これははかりにおいて感度の向上と質量測定誤差の低減を意味する。

7. お わ り に

第 1 報の寸法誤差のない場合の真直板ばねに始まり、本報の 4 個の寸法誤差のある円弧ばねをもって平行移動機構を構成するばねの寸法誤差が変位誤差、すなわち質量測定誤差に及ぼす影響に関する一連の報告を終了したい。これらの基礎的研究結果を足場にして、次の段階として、切欠きによる寸法誤差の修正方法について検討したい。ばねの長さに沿って分布する寸法誤差を一樣に修正することは不可能であるから、その代わりばねの一部を集中的に加工することによって変位誤差比を 0 に近づける手法は重要であろう。

参 考 文 献

- 1) 吉村靖夫, 天田勝正, 赤坂 隆: はかり用の一体型平行ばね機構の変位特性 (第 3 報), 精密工学会誌, 54, 10 (1988) 1915.
- 2) 吉村靖夫, 天田勝正, 赤坂 隆: はかり用の一体型平行ばね機構の変位特性 (第 4 報), 精密工学会誌, 55, 4 (1989) 748.
- 3) 吉村靖夫, 天田勝正: 真直板ばねと円弧ばねのコンプライアンスの相互関係の対比, 日本設計工学会誌, 24, 4 (1989) 139.