研究論文

空間リンク機構の軌道生成に関する研究*

——再帰式を用いた関節加速度の計算法——

重 松 洋 一** 嘉 数 侑 昇***

Studies on Trajectory Planning of a Spatial Link Mechanism
—A Method of Joint Accelerations Calculation—

Yoichi SHIGEMATSU and Yukinori KAKAZU

A method of calculating joint accelerations of a link mechanism is proposed using recursions on Newton-Euler equations. The force and torque vectors exerting from the link $i-1$ to the link i are expressed by linear terms with respect to linear and angular accelerations vectors of the link $i-1$. In case of a link of n degrees of freedom (dof), the numbers of additions and multiplications of the proposed method are $536n$ and $680n$, respectively, while those of the methods proposed by Walker and Orin are of the order n^3 . Numerical experiments show that (1) the computation time of the proposed method becomes less than those of the methods of Walker and Orin when the dof of the link becomes greater than 20, (2) the exact digits of the torque vector of the proposed method is 4-6, while the exact digits of the methods of Walker and Orin are less than those of the proposed method and they decrease as the dof increases.

Key words: link mechanism, force recursion, torque recursion, joint acceleration, Newton-Euler equations, trajectory planning, joint torque, robot

1. 緒 言

歩行ロボットやマニピュレータなどの空間リンク機構の運動を解析するために、リンク機構の運動方程式を用いて計算機内で運動をシミュレートすることが一般的である。

シミュレーションにおいては、少なくとも次の2つの機能が必要と考えられる。

1つは、関節座標 q , 速度 $\dot{q}$, 加速度 $\ddot{q}$ を入力して関節トルク T を計算する機能である。この解法としては、漸化式を用いた Newton-Euler 法¹⁾や Lagrange 法²⁾が計算効率上、最も優れていることが知られている。

もう1つは、時刻 t_0 での初期値 $q_0, \dot{q}_0$, 及びトルクの時間関数 $T(t)$ を入力して、それ以降の関節軌道 q を計算する機能である。軌道計算は $X = (q, \dot{q})$ を状態ベクトルとする正規形をした一階常微分方程式、式(1)に対する初期値問題となるので、状態 X とトル

ク T を入力として、式(1)の右辺 $f(X, T)$ を計算できればよい。従って、 $\dot{q}$ を計算できればよいことになる。

$$\frac{d}{dt} \begin{Bmatrix} q \\ \dot{q} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{q} \\ f(q, \dot{q}, T) \end{Bmatrix} \quad (1)$$

従来、 $\ddot{q}$ の計算法としては、Newton-Euler 法などのトルク計算法を複数回適用して Lagrange 方程式の慣性行列を求め、 $\ddot{q}$ に関する連立一次方程式を解いて $\ddot{q}$ を算出する方法³⁾がある。しかし、この方法を評価する一つの尺度としての計算量を考慮してみると、まずトルク計算法を自由度 n の回数だけ実行し、次に $n \times n$ の慣性行列を分解する操作が必要であるので、計算量が n^3 のオーダーになる。

トルク計算法においては、Lagrange 方程式の各係数を求める従来法⁴⁾では計算量が n^4 のオーダーであったものが、Newton-Euler 式に関する漸化式を用いる方法¹⁾²⁾により、計算量が n のオーダーとなり、計算時間が大幅に低減することが知られている。

Walker と Orin が提案した $\ddot{q}$ の計算法³⁾における計算量が n^3 のオーダーとなるのは、運動方程式における漸化的関係を陽に用いていないからである。従って、運動方程式における漸化的関係を陽に用いること

* 原稿受付 昭和63年12月21日。昭和63年度精密工学会北海道支部大会学術講演会(昭和63年8月31日)にて発表

** 学生会員 北海道大学工学部(札幌市北区北13条西8丁目)

*** 正会員 北海道大学工学部

により計算量のオーダーを低減し、 $\ddot{q}$ の計算を高速化することが必要と考えられる。

ここでは、Newton-Euler 法の漸化式に基礎をおいて $\ddot{q}$ を再帰的に求める一計算法を提案する。この計算法の計算量は n のオーダーになることが期待される。

以下、第2節では、従来の関節加速度の計算法について述べ、第3,4節では、各々、本計算法の基本式であるところの、リンク座標系における Newton-Euler 式とリンクの加速度、角加速度について述べる。第5節では本計算法を述べ、第6節でその計算量に関し考察し、第7節で、数値実験の結果を考察する。

2. 従来の関節加速度の計算法

従来、関節加速度 $\ddot{q}$ の計算法としては、Walker と Orin が提案した4つの方法³⁾がある。4方法ともに、Lagrange 方程式を次式のように、 $\ddot{q}$ に関する連立一次方程式とみなし、各係数を求めてから $\ddot{q}$ について解く。

$$M(q)\ddot{q} = T - C(q, \dot{q}) - G(q) \quad (2)$$

ここで、 T は入力トルク、 $C(q, \dot{q})$ はコリオリ力と向心力を表す $\dot{q}$ に関する二次形式、 $G(q)$ は重力項、 $M(q)$ は $n \times n$ 慣性行列である。

式(2)右辺の $C(q, \dot{q}) + G(q)$ は、4方法とも、 $(q, \dot{q})$ を入力ベクトルとし、 $\ddot{q}$ を仮にゼロ・ベクトルとしたときのトルク T として計算する。

また、式(2)左辺の $M(q)$ に関しては、方法1では $M(q)$ の各列ベクトルを逐一計算する。 $M(q)$ の第 i 列めは、 q を入力ベクトルとし、関節速度 $\dot{q}$ と重力加速度 g を仮にゼロ・ベクトルとし、 $\ddot{q} = e_i$ としたときのトルク T として計算する。

方法2,3では、 $M(q)$ の対称性を用いて、各々、 $M(q)$ の上三角行列、下三角行列を計算する。方法4では、式(2)の解き方が他の方法と異なるだけなので方法1~3のいずれの方法を用いて $M(q)$ を計算してもよい。

いずれの方法においても、式(2)のすべての係数を計算する計算量は n^2 のオーダーになる。

方法1~3においては、式(2)を解くために $M(q)$ を LU 分解する。従って、その分解のために n^3 の計算量を要する。また、方法4では、共役傾斜法を用いて式(2)を解くので、その計算量は n^2 になる。

計算量のオーダーに関しては、方法4が最も小さいが $n \leq 30$ に関しては、方法3の計算量が最も少ない。従って、実質的には方法3が4方法の中で最も効率的なものとされている。

Fig. 1 Link parameters

3. リンク座標系における Newton-Euler 式

本計算法では、Newton の式と Euler の式を直接、用いる。記法は文献1)にはほぼ従うが、式の煩雑さを避けるために、リンク i に固定した座標系 ${}^i e$ に関するベクトルを $A_i^0 v_i$ ではなく v_i と表すことにする(図1)。

Newton の方程式より、リンク i に関し次式が成立する。

$$F_i = m_i \ddot{v}_i \quad (3)$$

ここで F_i はリンク i に加わる力、 m_i はリンク i の質量、 $\ddot{v}_i$ はリンク i の重心加速度である。

式(3)左辺はリンク i に加わる力なので、

$$F_i = f_i - A_i^{i+1} f_{i+1} \quad (4)$$

一方、式(3)右辺の $\ddot{v}_i$ に関しては、

$$\ddot{v}_i = \dot{w}_i \times s_i + w_i \times (w_i \times s_i) + \ddot{v}_i \quad (5)$$

が成立する。ここで、 f_i はリンク $i-1$ からリンク i に加わる力、 $\ddot{v}_i$ は座標系 ${}^i e$ の原点 O_i の加速度、 A_i^{i+1} は ${}^{i+1} e$ で表されたベクトルから ${}^i e$ で表されたベクトルへの 3×3 変換行列、 s_i は ${}^i e$ 原点 O_i からリンク i の重心 CG_i へのベクトル、 $w_i, \dot{w}_i$ は各々、リンク i の重心 CG_i まわりの角速度、角加速度である。

式(4)、(5)を式(3)に代入して、 $F_i, \ddot{v}_i$ を消去すると、次式を得る。

$$f_i - A_i^{i+1} f_{i+1} = m_i \{ \dot{w}_i \times s_i + w_i \times (w_i \times s_i) + \ddot{v}_i \} \quad (6)$$

一方、Euler の方程式より、リンク i に関し次式が成立する。

$$N_i = J_i \dot{w}_i + w_i \times J_i w_i \quad (7)$$

ここで、 N_i はリンク i に加わる全トルク、 J_i はリンク i の重心 CG_i まわりの慣性行列である。

式(7)左辺はリンク i に加わる全トルクなので、次式が成立する。

$$N_i = n_i - A_i^{i+1} n_{i+1} + f_i \times P S_i + s_i \times A_i^{i+1} f_{i+1} \quad (8)$$

ここで、 n_i はリンク $i-1$ からリンク i に加わるトル

ク, $PS_i = p_i + s_i$, p_i は $i-1$ の原点 O_{i-1} から i の原点 O_i へのベクトルである (図 1)。

式 (8) を式 (7) に代入して N_i を消去すると, 次式を得る。

$$\begin{aligned} n_i - A_i^{i+1} n_{i+1} + f_i \times PS_i + s_i \times A_i^{i+1} f_{i+1} \\ = J_i \dot{w}_i + w_i \times J_i w_i \end{aligned} \quad (9)$$

4. リンクの加速度, 角加速度の漸化式

関節には回転形や直動形などがあるが, ここでは簡単のために, すべての関節は回転形とする。

リンク $i-1$ とリンク i の加速度, 角加速度の関係は次の漸化式で与えられる。

$$\dot{w}_i = A_i^{i+1} (\dot{w}_{i-1} + z_0 \ddot{q}_i + w_{i-1} \times z_0 \dot{q}_i) \quad (10)$$

$$\dot{v}_i = \dot{w}_i \times p_i + w_i \times (w_i \times p_i) + A_i^{i-1} \dot{v}_{i-1} \quad (11)$$

ここで, $z_0 = (0, 0, 1)^T$ である。

なお, 各リンク i の速度 v_i , 角速度 w_i は q と $\dot{q}$ だけから計算できるので, 式 (10), (11) で未知なものは, $\dot{v}_i$, $\dot{v}_{i-1}$, $\dot{w}_i$, $\dot{w}_{i-1}$, 及び $\ddot{q}_i$ だけである。

5. 漸化式を用いた関節加速度の計算法

Newton の式 (6), Euler の式 (9), 及び加速度, 角加速度の漸化式 (10), (11) を基本式として, $\ddot{q}$ を再帰的に求める。

今, f_{i+1} と n_{i+1} が $\dot{w}_i$ と $\dot{v}_i$ の一次式であると仮定する。

$$f_{i+1} = A \dot{w}_i + B \dot{v}_i + k \quad (12)$$

$$n_{i+1} = C \dot{w}_i + D \dot{v}_i + h \quad (13)$$

ここで A, B, C, D は 3×3 定数行列, k, h は定ベクトルである。この仮定は $i=n$ のとき, f_{n+1} と n_{n+1} が定ベクトルで与えられるので成立している。また, 以下に示すように $i=l$ で成立すれば $i=l-1$ でも成立する。従って $i=1 \sim n$ において式 (12), (13) は成立している。

式 (12), (13) を式 (9) に代入し, n_i を $\dot{w}_i$ と $\dot{v}_i$ の一次式で表す。

$$\begin{aligned} n_i = & A_i^{i+1} C \dot{w}_i + A_i^{i+1} D \dot{v}_i + A_i^{i+1} h \\ & + (A_i^{i+1} A \dot{w}_i) \times p_i - m_i (\dot{w}_i \times s_i) \times PS_i \\ & + (A_i^{i+1} B \dot{v}_i) \times p_i - m_i \{ w_i \times (w_i \times s_i) \} \times PS_i \\ & + (A_i^{i+1} k) \times p_i - m_i \dot{v}_i \times PS_i \\ & + J_i \dot{w}_i + w_i \times J_i w_i \end{aligned} \quad (14)$$

漸化式 (10), (11) を用いて式 (14) を $\dot{w}_{i-1}$, $\dot{v}_{i-1}$, $\ddot{q}_i$ で表す。

$$n_i = W \dot{w}_{i-1} + V \dot{v}_{i-1} + u \ddot{q}_i + r \quad (15)$$

ここで W, V は 3×3 定数行列, u, r は定ベクトルである。

Fig. 2 General flow of the proposed method

トルク τ_i に関して次式が成立している。

$$\tau_i = (A_i^{i-1} z_0)^T n_i \quad (16)$$

従って, 式 (15) の左から $(A_i^{i-1} z_0)^T$ をかけて, $\ddot{q}_i$ について解くと次式を得る。

$$\ddot{q}_i = \frac{\tau_i - (A_i^{i-1} z_0)^T (W \dot{w}_{i-1} + V \dot{v}_{i-1} + r)}{(A_i^{i-1} z_0)^T u} \quad (17)$$

式 (17) を式 (15) に代入すると n_i は $\dot{w}_{i-1}$ と $\dot{v}_{i-1}$ の一次式になる。同様に f_i も $\dot{w}_{i-1}$ と $\dot{v}_{i-1}$ の一次式になる。

式 (17) から明らかなように, $\dot{w}_{i-1}$ と $\dot{v}_{i-1}$ が既知のとき, $\ddot{q}_i$ を計算できる。特に $i=1$ のとき, 式 (17) は次式になる。

$$\ddot{q}_1 = \frac{\tau_1 - (A_1^0 z_0)^T (W \dot{w}_0 + V \dot{v}_0 + r)}{(A_1^0 z_0)^T u} \quad (18)$$

ここで, $\dot{w}_0$ と $\dot{v}_0$ は与えられるので, $\ddot{q}_1$ を計算できる。従って, 漸化式 (10), (11) を用いて $\dot{w}_i$ と $\dot{v}_i$ を計算できる。

以下, 式 (17) と漸化式 (10), (11) を再帰的に用いて $\ddot{q}_i$ ($i=1 \sim n$) を計算できる。

以上のゼネラルフローを図 2 に示す。

以上, 本計算法を要約すると, $i=1 \sim n$ に関し, 式 (19)~(21) を用い, 組 $(\ddot{q}_i, \dot{w}_i, \dot{v}_i)$ を逐一求めていることになる。

$$\ddot{q}_i = Q(\dot{w}_{i-1}, \dot{v}_{i-1}) \quad (19)$$

$$\dot{w}_i = R_1(\dot{w}_{i-1}, \dot{v}_{i-1}) \quad (20)$$

$$\dot{v}_i = R_2(\dot{w}_{i-1}, \dot{v}_{i-1}) \quad (21)$$

Table 1 Comparison of number of computations

	Multiplications Additions
Method 1 calculates full inertia matrix	$\frac{1}{6}n^3 + 75\frac{1}{2}n^2 + 114\frac{1}{3}n - 22$ $\frac{1}{6}n^3 + 55n^2 + 82\frac{5}{6}n - 11$
Method 2 lower triangle	$\frac{1}{6}n^3 + 38\frac{1}{2}n^2 + 151\frac{1}{3}n - 22$ $\frac{1}{6}n^3 + 28n^2 + 109\frac{5}{6}n - 11$
Method 3 upper triangle	$\frac{1}{6}n^3 + 13\frac{1}{2}n^2 + 192\frac{1}{3}n - 49$ $\frac{1}{6}n^3 + 8n^2 + 165\frac{5}{6}n - 64$
Method 4 conjugate gradient	$76\frac{1}{2}n^2 + 120n - 21$ $56n^2 + 87n - 6$
Proposed method	$680n$ $536n$

Fig. 3 Comparison of number of additions

6. 計算量に関する考察

本計算法から明らかなように、各 i ($i=1 \sim n$) に関し、 f_i , n_i , $\dot{q}_i$ の計算回数は自由度 n に依存しない 1 のオーダーである。従って、 $\dot{q}$ を n のオーダーで計算できる。Walker と Orin の提案した 4 方法³⁾ と本計算法の加算回数と乗算回数を表 1 に示す。また、そのグラフを図 3, 4 に示す。

表 1 より Walker と Orin の 4 方法の計算回数は n^2

Fig. 4 Comparison of number of multiplications

$\sim n^3$ のオーダーであるが、図 3, 4 より、 $n \leq 30$ においては、4 方法のグラフの傾きが 1.7~1.9 であるので、実質的には、 n^3 よりも低次の項が支配的である。ここで、方法 3 は Walker と Orin の提案した 4 方法の中で最も速い方法である。

図 3, 4 より、本計算法の計算回数は $n \geq 30$ において 4 方法より少なくなることがわかる。

7. 数値実験の結果と検討

本計算法と方法 1, 3 に関してプログラムを作成し、各 n に関して比較実験を行った。ここで、使用言語は最適化 Fortran 77、使用計算機は HITAC M-682 H である。その結果を図 5, 6 に示す。

図 5 (a), 図 6 (a) に示すリンク機構を対象とした CPU 時間が、各々図 5 (b), 図 6 (b) である。また、得られた関節加速度から逆算したトルクと入力トルクとの一致けたが、各々図 5 (c), 図 6 (c) である。これらを用いて各方法の計算精度を評価する。実験値は $n \leq 30$ の主要な各 n に対し、3~5 点ずつ採った。

図 5, 6 より以下のことがわかる。

(1) CPU 時間に関しては、 $n \geq 4$ で本計算法の方が方法 1 より短くなる。また、 $n \geq 20$ で本計算法の方が方法 3 より短くなる。

計算回数からの予想よりも小さい n において、本計算法の計算時間が他の方法の計算時間よりも

Fig. 5 Numerical experiment (1)

Fig. 6 Numerical experiment (2)

短くなったのは、計算回数以外のオーバーヘッドの影響と考えられる。すなわち、図7に示すように、図5(b)、図6(b)の回帰直線の傾きの方が計算回数の回帰直線の傾きよりも緩やかであるの

で、計算回数以外の、 n^3 よりも低次の項が存在する。

(2) 計算精度に関しては、本計算法における一致けたが $n=2 \sim 30$ 全般において4~6けたであり、

Fig. 7 Comparison of CPU time (ms) and number of multiplications

比較的良好。一方、図5(a)の場合には、 n の増加に伴って、方法1,3ともに同じ傾向で計算精度が低下していく。また、図6(a)の場合には、方法3の計算精度が著しく低下する。

図6(a)と同様の機構において $n=2$ とし、方法1,3を用いて解くと、両方法とも、慣性行列の条件数が 10^2 程度になっている。方法3ではこの悪条件の影響が強く現れ計算精度が低下したものと考えられる。

8. 結 言

以上より、次のことが結論できる。

- (1) Newton-Eulerの式を再帰的に用いることにより計算回数が自由度 n の一次のオーダーである計算法を提案した。
- (2) 本計算法の計算回数は、 $n \geq 30$ において、WalkerとOrinの方法の計算回数より少なくなる。
- (3) 数値実験の結果、本計算法の計算時間は、 $n \geq 20$ において、WalkerとOrinの方法1,3より速くなる。
- (4) 数値実験の結果、本計算法の計算精度は、4~6けたであり、WalkerとOrinの方法1,3より良い。

なお、現在、広く用いられているマニピュレータは $n \leq 6$ のものが主であるが、歩行ロボットなどの多自由度空間リンク機構を対象とする場合、本方法が有効になるものと考えられる。

参 考 文 献

- 1) J. Y. S. Luh, M. W. Walker and R. P. C. Paul : On-line Computational Scheme for Mechanical Manipulators, in *Robot Motion : Planning and Control*, M. Brady et al. eds., The MIT Press, (1982) 89-106.
- 2) J. M. Hollerbach : A Recursive Lagrangian Formulation of Manipulator Dynamics and a Comparative Study of Dynamics Formulation Complexity, *ibid.*, pp. 73-88.
- 3) M. W. Walker and D. E. Orin : Efficient Computer Simulation of Robotic Mechanism, *ibid.*, pp.107-126.
- 4) R. P. C. Paul : Robot Manipulators : Mathematics, Programming, and Control, The MIT Press, (1981) Ch. 6.