ズーム FFT とかみあい誤差分析への応用*

林 巖** 岩 附 信 行** 胡 曉 光***

Zoom FFT and its Application for Analyzing Gear Transmission Errors

Iwao HAYASHI, Nobuyuki IWATSUKI and Hu Xiaoguang

The calculation formula for zooming FFT, by which zoom FFT analysis can be carried out on a personal computer without any special FFT instruments, was derived by applying the same procedure that the Fast Fourier Transform was derived from discrete Fourier transform. According to the derived formula, a BASIC program of zoom FFT was coded, and was applied for analyzing the gear transmission errors measured on two tested gear pairs. By selecting a zoom ratio equal to the lowest common multiple of their gear- and pinion-tooth number divided by the gear tooth number, their gear- and pinion-low harmonics were distinctly separated and extracted without picket fence effect. And the amplitudes of the pinion low harmonics corresponded well with the hearing noise levels of the tested gear pairs.

Key words: FFT, zoom FFT, data processing, Fourier transformation

1. 緒 言

時間関数を分析し、その周波数成分につき検討するとき、離散フーリエ変換(以下DFTと略する)や高速フーリエ変換(以下FFTと略する)が用いられる。このDFTやFFTは、分析区間を基本周期とするいくつかの周期信号に時間信号を分解する方法であるため、時間関数から切り出したデータに端数を含む次数成分が含まれていると、その成分を正確に抽出することができない。そして、ピケットフェンス効果と呼ばれる現象により、端数を含む次数の両側のいくつかの見かけの整数次成分として、もともと存在する整数次成分に重なって現れる。例えば歯車の場合、小歯車の歯数と大歯車の歯数ができるだけ互いに素になるように選ばれるが、この一對の歯車のかみあい誤差を分析するときに上述の問題が生ずる。

そこで本報では、整数次成分のみならず、ピケットフェンス効果を避けて端数を含む次数成分も正確に求められるように、周波数分解能を向上させるズームF

FTの手法について検討し正確な計算式を導いた。そしてパーソナルコンピュータ(以下PCと略す)上で実施できるプログラムを作成し、ズーム比の選択、時間切り取り窓との関係について検討するとともに、実際の歯車のかみあい誤差分析に応用し、小歯車および大歯車に属するそれぞれの誤差をきわめて明瞭に分離抽出できることを確認した。その結果について報告する。

2. ズームFFT

2.1 DFT, FFTの周波数分解能

図1に示すように、時間信号 $x(t)$ を周波数 f_s で T 秒間サンプリングし、得られたデータ数を N とする。このときの周波数分解能 Δf は、基本波の周波数 f_0 に等しく

$$\begin{aligned}\Delta f &= 1/T \\ &= f_s/N\end{aligned}\quad (1)$$

である。したがって、周波数分解能を高くするには、 f_s を一定とすると N を大きくすればよい。すなわち、分析区間を長くすればよいことがわかる。いま図2のように分析区間を m 倍にすると、そのときの周波数分解能 Δf_m は、

$$\begin{aligned}\Delta f_m &= f_s/(mN) \\ &= \Delta f/m\end{aligned}\quad (2)$$

となる。すなわち周波数分解能が m 倍に向上する。以

* 原稿受付 平成2年5月31日。1990年度精密工学会春季大会学術講演会(平成2年3月28日)にて発表

** 正会員 東京工業大学精密工学研究所(横浜市緑区長津田町4259)

*** 東京工業大学精密工学研究所

後、 m をズーム比と呼ぶこととする。

2. 2 ズームFFTの計算式の導出

ズームFFTについては、その概略が文献1)に述べられているだけで、詳しい計算式は与えられていない。そこでDFTからFFTを導く時間間引き型の誘導過程²⁾³⁾を応用してズームFFTの計算式を導出した。

図2のように分析区間を m 倍にし、周波数分析したい離散データの関数を $x(l)$ ($l=0, \dots, L-1$, $L=mN$)とする。そのDFTは次式で与えられる。

$$X(k) = \frac{1}{L} \sum_{l=0}^{L-1} x(l) \cdot W^{lk} \quad (3)$$

ここに、 k ：成分の次数 ($=0 \sim L-1$)

W ：位相回転子 ($=e^{-2\pi j/L}$)。

離散関数のデータは、 $x(0)$ から $x(L-1)$ まで L 個ある。これを次のように、

$x(0)$ から m 個ごとに N 個取ったデータ列 $\rightarrow x_0(n)$

$x(1)$ から m 個ごとに N 個取ったデータ列 $\rightarrow x_1(n)$

$\dots$

$x(m-1)$ から m 個ごとに N 個取ったデータ列

$\rightarrow x_{m-1}(n)$

に分けて、新しいデータ列 $x_0(n)$, $x_1(n)$, $\dots$,

Fig.1 Time signal sampled over the period T

Fig.2 Time signal sampled over the period mT

$x_{m-1}(n)$, $n=0 \sim N-1$ を定義する。新しいデータ列 $x_p(n)$ は次式で与えられる。

$$x_p(n) = x(p + nm) \quad (4)$$

ここに、 $n=0 \sim N-1$

$p=0 \sim m-1$ 。

この新しいデータ列を用いて式(3)を書き直すと次式が得られる。

$$\begin{aligned} X(k) &= \frac{1}{L} \left[W^{0k} \sum_{n=0}^{N-1} x_0(n) \cdot W^{nmk} \right. \\ &\quad + W^{1k} \sum_{n=0}^{N-1} x_1(n) \cdot W^{nmk} + \dots \\ &\quad \left. + W^{(m-1)k} \sum_{n=0}^{N-1} x_{m-1}(n) \cdot W^{nmk} \right] \\ &= \frac{1}{L} \sum_{p=0}^{m-1} \left\{ W^{pk} \left[\sum_{n=0}^{N-1} x_p(n) \cdot W^{nmk} \right] \right\} \end{aligned} \quad (5)$$

一方、新しいデータ列 $x_p(n)$ に対するDFTは次式で与えられる。

$$X_p(q) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_p(n) \cdot W'^{nq} \quad (6)$$

ここに、 q ：成分の次数 ($=0 \sim N-1$)

W' ：位相回転子 ($=e^{-2\pi j/N}$)。

位相回転子 W' は、もとの位相回転子 W を用いると次の式で与えられる。

$$\begin{aligned} W' &= e^{-2\pi j/L} (L/N) \\ &= W^m \end{aligned} \quad (7)$$

式(7)を式(6)に代入すると次式が得られる。

$$X_p(q) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_p(n) \cdot W^{mnq} \quad (8)$$

ここで、 k を N で割った剰余を $k \bmod(N)$ と書き、

$$q = k \bmod(N) \quad (9)$$

とすると、 $W^{mN} = 1$ であるから、

$$W^{nmk} = W^{mnq} \quad (10)$$

となる。式(10)を式(5)に代入し、さらに式(8)を用いて整理すると、次式が得られる。

$$X(k) = \frac{1}{m} \sum_{p=0}^{m-1} \left[W^{pk} X_p(q) \right] \quad (11)$$

式(11)の次数 k は、図2の m 倍に拡大した分析区間に対する次数であるから、その m 次成分が元の図1の分

析区間の1次成分に対応する。すなわち次数 k を m で割った値が図1の分析区間に対する次数となる。よって、 $n_z = k/m$ として式(11)を元の次数の式に直すと次式が得られる。

$$X(n_z) = \frac{1}{m} \sum_{p=0}^{m-1} [W^{pk} X_p(q)] \quad (12)$$

ここに、 $n_z = k/m$, $k = 0 \sim L-1$, $L = mN$,
 $q = k \bmod (N)$.

この式(12)がズームFFTの計算式である。

ズーム分析したい元の次数の範囲を n_s 次 $\sim$ n_o 次とすると、次数の対応関係から式(12)で

$$k = m n_s \sim m n_o. \quad (13)$$

と置いて $X(n_s) \sim X(n_o)$ を求めれば、周波数分解能が m 倍に拡大された結果が得られる。

2. 3 ズームFFTの計算手順

式(12)の導出に従って、ズームFFTの計算手順を以下にまとめる。

ズーム比を m とし、図1のように元のサンプリング区間を T 、サンプリング周波数を f_s とする。

(1) m 倍に拡大した区間 mT のデータを、同じ周波数 f_s でサンプリングする。データ列を、 $x(l)$,
 $l = 0 \sim L-1$, $L = mN$ とする。

(2) データ列 $x(l)$ から、 m 個ごとに取った新しいデータ列 $x_p(n)$, $p = 0 \sim m-1$ をつくる(式(4)).

ここに、 $n = 0 \sim N-1$ である。

(3) データ列 $x_p(n)$ を、それぞれフーリエ変換する。
 (4) ズーム分析したい次数範囲、 n_s 次 $\sim$ n_o 次を決め、 $k = m n_s \sim m n_o$ として $X(n_s) \sim X(n_o)$ を求める(式(12)).

以上に示した手順を、PC上でプログラムすることにより専用測定器を必要としないでズームFFTを実行できる。また、必要に応じて大型計算機も活用できるので、膨大なデータ処理も可能である。さらに、PCまたは大型計算機の倍精度演算機能を用いることにより、より計算精度の高い分析結果が得られる等の利点が得られる。なお、手順(3)のフーリエ変換では、データ数 N が2の累乗に等しいときはFFTを、等しくないときはユニバーサルFFT⁴⁾を用いる。

3. 歯車かみあい誤差分析への応用

3. 1 ズーム比の選択

式(12)に従って、PC上で実施できるプログラムを作成し、1.2次成分(大きさ1.0)の例について、ズーム比 m を1, 3, 5, 7, 9, 10に選んだ分析結果を図3(A)~(F)に示す。

この図から明らかなように、ズーム比が5, 10のとき正しい結果が得られている。すなわち、端数を持つ次数が整数となるズーム比 m を選べばよい。また、ズーム比が10のときの結果は、ズーム比が5のとき

Fig.3 Effect of zoom ratio (Ref.signal: 1.2th & amp.=1.0)

の結果と全く同じであるから、いたずらにズーム比を大きくとっても意味はなく、端数を含む次数が整数となる最も小さいズーム比 m を選択すればよい。

以上の点から、歯車かみあい誤差の分析では、大歯車1回転を基準の分析区間として、小歯車歯数を z_1 、大歯車歯数を z_2 とすれば、次のように選べばよい。

$$m = \text{L.C.M.}(z_1, z_2) / z_2 \quad (14)$$

ここに、 $\text{L.C.M.}(z_1, z_2)$ は、 z_1, z_2 の最小公倍数である。すなわち、大歯車の成分と小歯車の成分の両者とも整数次の成分となる最小の大歯車回転数をズーム比 m として選べばよい。

3. 2 時間切り取り窓との関係

時間切り取り窓がどのような影響をもつかを調べるため、例として正しい結果が得られたズーム比 $m=5$ の場合について、サイドローブが小さくかつ減衰が速いハニング窓を用いた分析結果を図4に示す。図3(C)

場合について、サイドローブが小さくかつ減衰が速いハニング窓を用いた分析結果を図4に示す。図3(C)

Fig.4 Effect of window
(Ref. signal: 1.2th & amp.=1.0)

Fig.5 Transmission error and analyzed harmonics of the tested gear pair(A)

と比較すると明かなように、1.2次成分の直前と直後、すなわち1次と1.4次のところに1.2次成分の1/2の大きさの成分が現れた。これらの成分はハニング窓を用いたために現れた成分である。したがって、ズームFFTにより周波数分解能を上げてそれぞれの成分を正確に求められる場合には時間切り取り窓を用いない方がよい。

3. 3 歯車かみあい誤差の分析

対象とした歯車対は、小歯車歯数 $z_1=9$ 、大歯車歯数 $z_2=48$ の自動車スターター減速機用の歯車対二対で、聴感検査で通常レベルの騒音と判定されたA歯車対と、やや大きくて好ましくない騒音と判定されたB歯車対である。

図5にA歯車対の一歯面かみあい誤差の測定値と周

波数分析結果を、図6にB歯車対についての一歯面かみあい誤差の測定値と周波数分析結果を示す。それぞれの図(A)が一歯面かみあい誤差で、その2~3回転目の部分が、式(14)にしたがってズーム比 $m=3$ として余分に測定した部分である。大歯車1回転分のサンプリングデータ数は533点で、図(A)のそれぞれの一歯面かみあい誤差は1599点のサンプリングデータからなる。また、それぞれの図(B)が大歯車1周期についての周波数分析結果を、図(C)が低次の1次~15次成分の範囲についてズーム分析した結果を示す。図7には、A歯車対とB歯車対について1歯ごとの成分の大きさをみるために、高次の45次~50次までの成分についてズーム分析した結果を示す。ちなみに図(C)のズーム分析時間は、ユニバーサルFFTを用

Fig.6 Transmission error and analyzed harmonics of the tested gear pair(B)

Fig.7 Zoom-analyzed 45th-50th harmonics(m=3)

いて、16ビットPC(クロック16MHz)のBASICコンパイラで約3.5分であった。

A歯車対の大歯車1回転について分析した図5(B)の結果では、1次～11次のかみあい誤差成分があるように見える。しかし、ズーム分析した図(C)の結果では、1次、2次、3次、そして $5 \cdot 1/3$ 次と $10 \cdot 2/3$ 次のかみあい誤差成分があることが明瞭に現れている。すなわち、5次と6次の成分は実際にはない見かけの成分であり、ビケットフェンス効果により $5 \cdot 1/3$ 次成分が分離して現れたもの、同様に10次と11次の成分も実際にはなく、 $10 \cdot 2/3$ 次成分が分離して現れたものであることがわかる。そして、これらの $5 \cdot 1/3$ 次成分と $10 \cdot 2/3$ 次成分は、小歯車と大歯車の回転数の関係から小歯車が原因であるかみあい誤差成分で、小歯車の偏心と回転軸への傾斜取付けによって生じたかみあい誤差成分であろうと推定される。

同様にB歯車対についてみると、図6(B)の結果では、2次を除いて、1次から13次までかみあい誤差成分があるように見える。しかし、ズーム分析した図(C)の結果では、1次、3次、そして $5 \cdot 1/3$ 次と $10 \cdot 2/3$ 次のかみあい誤差成分があることが明瞭に現れている。この $5 \cdot 1/3$ 次と $10 \cdot 2/3$ 次の二つの成分については、A歯車と同様に小歯車に起因するかみあい誤差成分である。

また、A、B歯車対とも、図(B)の48次のところにかみあい誤差成分があるようにみえる。確かめるためにズーム分析した結果の図7(A)、(B)とも、小歯車と大歯車の相対歯形誤差による48次成分のみ現れ、他の次数成分は現れなかった。

以上、分解能が不足するために現れた見かけの成分が、ズーム分析することによりすべて解消され、正しい次数の成分が得られることが確認できた。

次に、図5(C)と図6(C)のズーム分析した各成分の大きさの比較から明らかなように、2次成分を除

いた他の成分はすべてB歯車対の方が大きく、特に小歯車の $5 \cdot 1/3$ 次成分がA歯車対に比較して+34%の大きさ、 $10 \cdot 2/3$ 次成分が+84%の大きさとなっている。したがって、聴感検査でB歯車対の音が大きくて好ましくないと判定された原因の一つは、回転数が大歯車より高いこの小歯車のかみあい誤差成分が大きいことであると言える。

4. 結 言

以上、パーソナルコンピュータや大型計算機で実行可能な、周波数分解能を向上させるズームFFTの計算式を導き、歯車かみあい誤差の分析に応用した。得られた主な結果は次のとおりである。

- (1) 離散フーリエ変換から高速フーリエ変換を導く導出法を応用して、必要な次数(または周波数)範囲の周波数分解能を高くして分析できるズームFFTの計算法を導いた。
- (2) 歯車かみあい誤差の低次成分の分析において、ズーム比を大小歯車の歯数の最小公倍数と大歯車歯数との比に等しく選ぶことにより、大歯車および小歯車に属するかみあい誤差成分を明瞭に分離抽出でき、導いたズームFFTの計算法が有効であることがわかった。

東京工業大学精密工学研究所 林 輝 教授には日頃本研究に関し、貴重なご助言をいただいている。記して謝意を表する。

参 考 文 献

- 1) R.B.Randall: Frequency Analysis, K.Larsen & Son A/S, Denmark (1987) 165.
- 2) 安居院 猛, 中嶋正之: FFTの使い方, 秋葉出版(1987) 65.
- 3) 宮川 洋, 今井秀樹: 高速フーリエ変換, 科学技術出版(1985) 166.
- 4) 林 蔵, 岩附信行: ユニバーサルFFTとその応用, 精密工学会誌, 56, 9 (1990) 1677.