Caustic 実験法の切削応力解析への応用性の検討*

——くさび形平板に不連続分布荷重が作用する場合の特性——

五十君 清司** 小林 史 敏***

Application of Caustic Method to Stress Analysis in Cutting Operation
In Case of Wedge Shape Plane with Discontinuously Distributing Load

Kiyoshi Isogimi and Fumitoshi Kobayashi

In this paper the properties of caustic patterns necessary to apply the caustic experimental method to stress analysis in cutting operations were made clear. Under simplified two dimensional conditions, the object of study is a wedge shape plane with discontinuously distributing oblique load divided into 2 or 3 parts over loading region. Specimens are made of acrylate resin plate of about 3 mm thickness. The caustic patterns formed by reflected lights from the both surfaces of plate are observed and those characteristics with loading conditions are investigated in detail. On the other hand the computational patterns based on optical theory and mapping method are plotted. These two patterns are coincided accurately enough. With gained results the convenient simple formula to evaluate one end vale of external load is proposed.

Key words: caustic experimental method, stress analysis, cutting operation, two dimensional problem, optical theory

1. 結 言

著者らは、Caustic 実験法が接触応力場の解析に非常に有効であることに着目し、切削時に工具および被削材内に誘起される応力を解明して、損傷や寿命との関連性を明らかにする目的で、刃先部や被削材をモデル化したくさび形板や半無限板に、各種の外部荷重が作用する場合の Caustic しま特性や応力分布について詳しく検討を加えてきた^{1)~4)}。

本報では、工具刃先部を近似した開き角 60° のくさび形平板に負荷を加えた場合に、発生する Caustic しまの特性を明らかにしようとした。すなわち、くさびの一辺上の荷重作用域を2あるいは3分割した各領域

にそれぞれ独立した不連続傾斜分布荷重が作用する場合を取り上げ、板の前後面反射光の作る Caustic しまと計算により求めた理論曲線とを比較し、発生しから作用荷重の値を評価する方法や、応力分布の検討を行った。なお本研究で対象にしたような簡単な分割荷重は、そのままの状態が実際の切削場において発生することはほとんどなく、チッピングや損傷が発生した切れ刃で微少切削を行う場合に、比較的類似した状態が発生する可能性があるのみである。しかし、分割数が大きくなると各種の分布荷重状態を表すことが出来るので、ここでは基本的な場合に対し Caustic 実験法の応用性の可否を検討することとした。

2. Caustic 理論式の導出

いま一般的な場合として図1(a)に示すように、開き角 60° のくさび形平板の一辺に、頂点から幅 $2a$ にわたって n 等分された各領域に、不連続分布荷重が境界に立てた法線に対して角度 ϕ 傾いて作用する場合を扱ってみる。ここで、 $P_1, P_2, \dots, P_n$ は、基準作用外力 σ

* 原稿受付 平成元年 4月22日。昭和63年度精密工学会秋季大会学術講演会(昭和63年10月3日)にて発表

** 正会員 三重大学工学部(津市上浜町1515)

*** 正会員 日本板硝子(株)(大阪市東区道修町4-8)

に対する外力強度係数である。

この時、作用荷重関数 $F(t)$ は次式で与えられる。

$$F(t) = \frac{\sigma}{2} (\cos \phi - i \sin \phi) \times \sum_{j=1}^n P_j \left[1 - \frac{|t - \frac{2(n-j+1)}{n} a|}{\{t - \frac{2(n-j+1)}{n} a\}} \frac{|t - \frac{2(n-j)}{n} a|}{\{t - \frac{2(n-j)}{n} a\}} \right] \quad (1)$$

くさび内の点 $Z (=X + iY)$ における状態は、既報³⁾と同様に同図(b)に示すような $(=\xi + i\eta)$ 平面の下半平面に次の関数 $w(\xi)$ により写像される。

$$z = w(\xi) = \xi^{1/3} \quad (2)$$

ここで、 $-\pi/3 \leq \arg(z) \leq 0$, $-\pi \leq \arg(\xi) \leq 0$ である。

文献 5) から ξ 平面内の点に関して次の関係が成立することがわかる。

$$\eta \bar{\eta} + i \xi \bar{\eta} = \Phi(\xi) + \overline{\Phi(\xi)} + \frac{1}{w'(\xi)} \{ \overline{w(\xi)} \Phi'(\xi) + w'(\xi) \Psi(\xi) \} \quad (3)$$

関数 $\Phi(\xi)$, $\Psi(\xi)$ の性質を考慮すれば、結局、次式を得る。

$$\Phi(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N + iT}{t - \xi} dt \quad (4)$$

$$\Psi(\xi) = \frac{-1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N + iT}{t - \xi} dt - \Phi(\xi) - 3\xi \Phi'(\xi) \quad (5)$$

図 1 (b) で負荷範囲が $\xi = 0 \sim 2b (=8a^3)$ であること、および式 (2) の関係から次式を得る。

$$\Phi(z) = \frac{-\sigma}{2\pi} (\sin \phi + i \cos \phi) \times \sum_{j=1}^n P_j \ln \left[\frac{z^3 - \{ \frac{2(n-j+1)}{n} a \}^3}{z^3 - \{ \frac{2(n-j)}{n} a \}^3} \right] \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \Psi(z) = & \frac{\sigma \sin \phi}{\pi} \sum_{j=1}^n P_j \left\{ \ln \left[\frac{z^3 - \{ \frac{2(n-j+1)}{n} a \}^3}{z^3 - \{ \frac{2(n-j)}{n} a \}^3} \right] + \frac{3z^3 \{ \frac{2a}{n} \}^3 \{ (n-j+1)^3 - (n-j)^3 \}}{2[z^3 - \{ \frac{2(n-j+1)}{n} a \}^3][z^3 - \{ \frac{2(n-j)}{n} a \}^3]} \right\} \\ & + \frac{i \sigma \cos \phi}{2\pi} \times \sum_{j=1}^n P_j \frac{3z^3 \{ \frac{2a}{n} \}^3 \{ (n-j+1)^3 - (n-j)^3 \}}{[z^3 - \{ \frac{2(n-j+1)}{n} a \}^3][z^3 - \{ \frac{2(n-j)}{n} a \}^3]} \end{aligned} \quad (7)$$

発生 Caustic 曲線を与える一般方程式は、基礎理論より次式となる¹⁾。

$$\begin{aligned} \vec{W} &= z\lambda + 4C\overline{\Phi'(z)} \\ |4C\Phi''(z)/\lambda| &= 1 \end{aligned} \quad (8)$$

式中の C は素材の光学定数、 λ は像の拡大率である。式 (6), (8) より Caustic の発生条件式、Caustic 曲線の方程式および式 (8) 中の各値 C^* , S_n , r , r' , Θ , Θ' は次式のように与えられる。

$$\begin{aligned} & \left| \frac{3a^5 \sigma r C^*}{4S} \sum_{j=1}^n P_j \left(\frac{2a}{n} \right)^3 \{ (n-j+1)^3 - (n-j)^3 \} \right. \\ & \quad \times \left[4r^6 e^{i\Theta} - \left(\frac{2a}{n} \right)^3 \{ (n-j+1)^3 + (n-j)^3 \} r^3 e^{i\Theta} - 2 \left(\frac{2a}{n} \right)^6 (n-j+1)^3 (n-j)^3 \right] / r^2 r'^2 \left. \right| = 1 \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} X &= \lambda r \left[\cos \theta - \frac{6 a^5 r \sigma |C^*|}{n^3 S_n} \times \sum_{j=1}^n P_j \left[\frac{\{ (n-j+1)^3 - (n-j)^3 \} \sin(\phi - 2\theta + \Theta + \Theta')}{r r'} \right] \right] \\ Y &= \lambda r \left[\sin \theta - \frac{6 a^5 r \sigma |C^*|}{n^3 S_n} \times \sum_{j=1}^n P_j \left[\frac{\{ (n-j+1)^3 - (n-j)^3 \} \cos(\phi - 2\theta + \Theta + \Theta')}{r r'} \right] \right] \end{aligned} \quad (10)$$

$$C^* = 8CS_n / (\pi \lambda a^2) \quad (11) \quad r = r^6 - 2 \left\{ \frac{2(n-j+1)}{n} ar \right\}^3 \cos 3\theta + \left\{ \frac{2(n-j+1)}{n} a \right\}^6$$

$$S_n = \frac{\sigma}{n} \sum_{j=1}^n P_j \quad (12) \quad r' = r^6 - 2 \left\{ \frac{2(n-j)}{n} ar \right\}^3 \cos 3\theta + \left\{ \frac{2(n-j)}{n} a \right\}^6 \quad (13)$$

(a) z -plane

(b) ξ -plane

Fig. 1 Wedge shape plane mapped on to half plane

Fig. 2 Theoretical patterns

Fig. 3 Experimental patterns

$$\Theta = \tan^{-1} \left[\frac{r^3 \sin 3\theta}{r^3 \cos 3\theta - \left\{ \frac{2(n-j+1)}{n} a \right\}^3} \right]$$

$$\Theta' = \tan^{-1} \left[\frac{r^3 \sin 3\theta}{r^3 \cos 3\theta - \left\{ \frac{2(n-j)}{n} a \right\}^3} \right] \quad (14)$$

なお領域を2および3分割する外力が作用する場合には、これらの式で $n=2$ または 3 を代入することにより求められる。

3. 実験方法

使用した荷重装置および実験方法は既報⁴⁾とまったく同様である。試験片素材には厚さ約3mmのアクリル樹脂板を用い、機械加工で開き角度60°のくさび形試験片に仕上げた。なお、式(8)および(11)中に含まれるアクリル樹脂の光学定数 C の値は、静的引張り試験の結果 $C=0.195 \text{ mm/MPa}$ と得られた。

負荷条件は、2分割負荷時には領域全体に作用する外力値を一定に保ち、強度比を1:3, 1:2, 2:3, 1:1, 3:2, 2:1 および 3:1 と変化させ、外力の傾斜角を $\phi = -30^\circ, -15^\circ, 0^\circ, 15^\circ$ および 30° と変化させた。他方3分割負荷時には、各領域での外力の強度係数を0.3, 0.5, 0.7, 1, 1.5, 2.0 および 3.0 と変え、傾斜角を $\phi = -30^\circ, -15^\circ, 0^\circ, 15^\circ$ および 30° と変えて系統的な特性を得るように選んだ。

4. 結果と考察

実験は前述の全条件下で行ったが、ここでは3分割不連続負荷時を例にとり考察する。図2(a)~(c)、および図3(a)~(c)には、一例として拡大率 $\lambda=2.78$ 、荷重傾斜角 $\phi=0^\circ$ 、 $C^*=0.3$ 、荷重作用幅 $2a=6.2 \text{ mm}$ 一定で、外力強度比 2:1:2, 1:1:1 および 1:2:1 の場合の理論曲線および Caustic しまを示す。両者の特性は同一負荷条件下ではよく一致していることがわかる。まず、前面反射光の作る Caustic 曲線(図2の曲線 I)では、外力比が変化しても左右方向の全体寸法はあまり変化がない。しかし形状は著しく変化する。中央部分の強度比が両側に等しくなるまでは、2つのしみが次第に離れていき、中央部が両側より大きくなると、中間に下に凸な第3のしみが現れ、これが下方へ張り出して行くことがわかる。他方後面 Caustic 曲線(図2の曲線 II)では、始め左右2つの上に尖った連続しりであったものが、中央部で分離し上方へ伸び独立した2本のしりになる。中央部の強度比が両側より大きくなると、新たに中央に上に尖ったしりが発生し、次第に上方に大きく成長してゆく。

図4(a)および(b)は、荷重傾斜角 ϕ の影響を強度比 2:1:2 の場合について示したものである。それぞれ $\phi = -30^\circ$ および 30° に対する曲線である。図2(a)の $\phi = 0^\circ$ の場合を参照すると、前面 Caustic しりまは荷重

(a) $\phi = -30^\circ$ (b) $\phi = 30^\circ$
Fig. 4 Effects of inclined angle

(a) 1:1:2 (b) 2:2:1
Fig. 5 Example of loading (No. 1)

(a) 2:1:1 (b) 1:2:2
Fig. 6 Example of loading (No. 2)

(a) Theoretical (b) Experimental
Fig. 7 Example of 2 parts dividing load

Fig. 8 Relationships between L , D_y and P_2

Fig. 9 Relationship between P_1 and D_x

作用線の傾いた方向側で下方に大きく張り出し、他方では小さく縮んでくる。これに対して後面反射光の作る Caustic しまは、前面とは逆に外力の傾斜側のしまが縮み、他方のしまは下方へ張り出している。また両方のしまともに外力作用線の方へ傾いていることがわかる。

図 5 (a), (b) および図 6 (a), (b) は $\phi = 0^\circ$ で左右それぞれの側の強度比のみを変化させた場合の例である。とくに前面 Caustic しまで明確な特徴が現れ、強度比が他の領域より小さい時には 3 つの Caustic しまで形成されるが、他の部分と同等以上の比となると左右に分かれた 2 つのしまに変わる。そして大きな外力の作

用する側の Caustic しまが一層拡大している。

図 7 (a), (b) は境界に 2 分割荷重が作用する場合の一例を、 $C^* = 0.75$, $\phi = 15^\circ$, $2a = 4.2 \text{ mm}$, 外力比 1:2 について示したものである。この時も両者の特性はよく一致していることがわかる。

本実験法は、実際場で形成される Caustic しまから境界に作用する外力状態を知って内部での応力解析をする手法である。このため負荷条件と発生 Caustic しまの特性との関連性をあらかじめ十分明らかにする必要がある。そこで、本実験およびくさび形板に対するこれまでの研究³⁾で扱った各負荷条件と前面反射光の作る Caustic しまの寸法や発生位置との関係を系統

Table 1 Values of m_i, n_i

Dimensions mm		Theoretical values		Practical values	
		i=1	i=2	i=1	i=2
L	m_i	0.957	41.313	-0.193	42.603
D	n_i	-1.334	14.337	-1.683	16.309

Table 2 Values of l_1, l_2

ϕ°	l_1	l_2
-30	3.48	-21.79
-15	3.57	-22.11
0	3.71	-22.76
15	3.85	-23.25
30	4.09	-24.40

づけて調べてみた。測定対象には、図8、9中に示すようにx軸に平行に計った全体の最大寸法しおよび最大距離 D_x 、y軸上で計った原点からの距離 D_y を採用した。

図8には一例として $\phi = 15^\circ$ 、 $2a = 6.2$ mm、 $C^* = 0.3$ 一定下で、中央部の外力強度係数 P_2 と最大寸法しおよび距離 D_y との関係を同時に示す。これらの諸結果を整理すると次のようになる。

$$L = m_1 P_2 + m_2 \quad (15)$$

$$D_y = n_1 P_2 + n_2 \quad (16)$$

また図9には、3分割負荷時に右側の領域に作用する荷重値 P_1 が、発生 Caustic しまのx軸方向の最大値座標値 D_x と密接な関係を持つことを、各傾斜角の場合について示す。 D_x の値は中央および左側に作用する外力値 P_2, P_3 を本研究で扱った荷重条件に対して独立に変えた場合の平均値で示しているが、この時寸法 D_x 値の変動は最大4%に過ぎずばらつきは極めて少ない。なお2分割負荷時にも、左側の値に関係なく右側の荷重値のみにより Caustic しまの寸法 D_x が3分割時同様の形で一義的に求められることがわかった。結局これらの関係は次式で与えられる。

$$D_x = l_1 P_1 + l_2 \quad (17)$$

上式(15)～(17)中の各係数 m_i, n_i 、および l_i の値を表1および2にまとめて示す。

表3には、各種の荷重条件のもとで実際に発生している Caustic しまの寸法 D_x を測定して、この値を式(17)に代入することによって算出した外力値と、この時右側の領域に実際に作用する外力値とを比較して示す。両者の値は最大9%の誤差でよく一致しており、

Table 3 Evaluation of external loads

Load conditions	Length D_y mm	Loading angles ϕ°	External loads		
			Calculated values MPa	Practical values MPa	Ratios
2-parts divided	29.1	15	10.34	9.5	1.09
3-parts divided	43.2	-15	15.58	15.4	1.01
	39.2	0	7.04	7.2	0.98
	42.7	15	17.58	16.4	1.07

この方法が非常に有効であることがわかった。

図8～10および式(15)～(17)に示した諸関係は、本実験で扱った他の負荷条件の場合においてもまったく同様であった。以上の結果から、作用外力比と全体寸法および深さとの間には、簡単な関係があること、また Caustic しまのx軸方向の最大値が右側の作用外力値のみにより定まり、その関係もまた簡単な式で表されることがわかった。

5. 応力分布の検討

図1に示したような、n分割不連続荷重が作用する場合の応力成分を求める。この時、くさび形平面内にある任意の点Zでの応力状態を与える関数 $\Phi(z)$ および $\Psi(z)$ は式(6)、(7)で表される。

点Zにおける応力成分を $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ で表すと、一般に次の関係が存在する。

$$\sigma_x + \sigma_y = 4 \operatorname{Re} \Phi(z) \quad (18)$$

$$\sigma_y - \sigma_x + 2i \tau_{xy} = 2 \{ \Phi'(z) + \Psi(z) \} \quad (19)$$

式(6)、(7)を代入して計算すると、応力成分は次式で与えられる。

$$\sigma_x = \frac{\sigma}{\pi} \sum_{j=1}^n P_j \left\{ (\Theta - \Theta') \cos \phi - 2 \sin \phi \left(-\frac{r}{r'} \right) + \frac{24a^3 r^3 \{ (n-j+1)^3 - (n-j)^3 \} \sin \theta}{n^3 r' r} \cos(\phi - 2\theta + \Theta + \Theta') \right\} \quad (20)$$

$$\sigma_y = \frac{\sigma}{\pi} \sum_{j=1}^n P_j \left\{ (\Theta - \Theta') \cos \phi + \frac{24a^3 r^3 \{ (n-j+1)^3 - (n-j)^3 \} \sin \theta}{n^3 r' r} \cos(\phi - 2\theta + \Theta + \Theta') \right\} \quad (21)$$

Fig.10 Example of stress distributions

$$\tau_{xy} = \frac{\sigma}{\pi} \sum_{j=1}^n P_j \left\{ (\Theta - \Theta') \sin \phi + \frac{24a^3 r^3 \{ (n-j+1)^3 - (n-j)^3 \} \sin \theta}{n^3 r r'} \sin(\phi - 2\theta + \Theta + \Theta') \right\} \quad (22)$$

図10(a)～(c)には、3分割負荷の一例として全体に作用している荷重の和 180 N, 各領域の外力比 1:2:1, 荷重傾き角 $\phi = 15^\circ$, 荷重作用幅 $2a = 6.2$ mm の場合の応力 σ_x , σ_y , τ_{xy} の分布を示す。

生位置)が決まってくるので、逆にこの値を実際に測定すれば右端に作用している荷重値を求めることができる。

参 考 文 献

6. 結 言

Caustic 法を切削時の応力解析へ応用する目的で、くさび形平板に傾斜不連続分布荷重が作用する場合に発生する Caustic しまの形状および寸法特性を明らかにした。以上の結果をまとめると次のようになる。

- (1) 計算によって得られた Caustic 曲線と実験結果とはよく一致しており、実験の精度が十分に高いことが証明された。
- (2) 3分割不連続分布荷重が作用する時は、一方の端の作用力が他の部分より小さい時は、全体が3つの Caustic しまとなり、逆に他より大きいときは2つのしまとなる。しかし中央の作用力が両側より小さい時は2つに、大きい時は3つの部分からなるしまが生じる。
- (3) 外力強度比と Caustic 曲線の各部の寸法との関係はいずれも簡単な近似式で示される。とくに負荷分割数によらず、一番右側の作用力の大きさのみによって、発生 Caustic の横方向の最大値(発

- 1) 五十君清司ほか：切削時における工具内応力の Caustics 法による測定に関する基礎研究 — Caustics 実験法の原理と基本特性, 精密工学会誌, 52, 9 (1986) 102.
- 2) 五十君清司ほか：金属表面反射型 Caustics 法による工具内応力の測定に関する基礎研究, 精密工学会誌, 53, 5 (1987) 776.
- 3) 五十君清司ほか：Caustics 実験法の工具内応力解析への適用性に関する基礎研究 — くさびに等分布荷重が作用する場合, 精密工学会誌, 54, 2 (1988) 390.
- 4) 五十君清司ほか：Caustics 実験法の応力解析への応用性について — 半平板に負連続分布荷重が作用する場合の特性, 精密工学会誌, 54, 11 (1988) 131.
- 5) N. I. Muskhelishvili: Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity, Nordhoff Int. Publ., Netherlands, (1977).