クロソイド補間によるコーナ軌跡制御*

仇 時 雨** 牧 野 洋***

Corner Path Control Using Clothoidal Interpolation

Shi-yu QIU and Hiroshi MAKINO

In the continuous path (CP) controlling robots such as welding, painting, sealing and bonding robots, the circular arc interpolation is usually adopted to the rounding of the sharp edges of corners. However, by the discontinuity of curvature at the points connecting lines and arcs, it tends to cause vibration at the points. For the purpose, the authors developed a new method of corner interpolation which uses Clothoid curve. The curve has a continuously changing curvature which is proportional to the length of the curve. This report describes the basic theory and the computing method of the curve and gives the practical data for Clothoidal interpolation.

Key words: clothoid curve, corner interpolation, robot, path control

1. コーナー軌跡制御問題

近年、産業用ロボットの運動制御に対する要求はますます厳しくなり、高速化、高精度化が従来以上に要求されてきている。その中でも溶接、塗装、接着剤・シール剤塗布などの軌跡制御を要する作業においては、塗料の塗着などの作業速度を上げるとともに、非作業区間の移動速度を向上することが要求されている。

これらの作業においては、一般にロボット工具点の軌跡は一定の線速度を保つように制御される。ところが、図1(a)に示すような鋭い角を持つコーナ部においては、工具及びアームの慣性のために正確な軌跡を実現することができず、これを防ぐために、折れ曲がり点で一旦停止させるような加減速を行うと、塗布量などにむらを生ずる欠点がある。このため、図1(b)のように隅部にRをつけて円弧補間を行うことがあるが、この場合、線速度を一定とすると、曲率の変化す

るところで加速度が急激に変化し、振動を発生するおそれがある。高速の制御を行うためには、速度とともに加速度も連続にすることが望ましい。

この点を解決するために、塗装用ロボットにおいて速度、加速度を連続にする曲線を算出した例¹⁾があるが、この方法は移動時の線速度が一定ではなく、また、曲率、軌跡長さ、移動時間などの算出が難しいなどの欠点がある。

(a) Sharp edge corner path (b) Circular interpolation (c) Clothoidal interpolation

Fig.1 Corner path control

* 原稿受付 平成元年10月6日. 昭和62年度精密工学会秋季大会学術講演会(昭和62年10月12日)にて発表

** 学生会員 金沢大学工学部(金沢市小立野2-40-20)

*** 正 会 員 山梨大学工学部(甲府市武田4-3-11)

筆者らは、曲率が曲線の長さに比例して連続的に変化するコルニューのらせん²⁾³⁾を用いて、図1(c)のようにコーナ部の補間をおこなうコーナ軌跡補間法を

開発した(図4参照)。この曲線は曲線の長さを変数として方向や曲率与えられるので、諸種の計算に便利であり、また、インポリュート曲線の場合とは違って曲率ゼロの点を持つので、直線と容易に接続することができるという長所がある。

本報においてはクロソイド曲線の基礎式とその計算法を述べ、これをコーナ補間に適用する場合の適用法と、設計の基礎となる寸法数値データを与えた。

2. コルニユーのらせん(別名クロソイド曲線)

フレネル(Fresnel)の積分関数、

$$C_s(u) = \int_0^u \cos \frac{\pi u^2}{2} du \quad (1)$$

$$S_n(u) = \int_0^u \sin \frac{\pi u^2}{2} du \quad (2)$$

において、 C_s をx軸に、 S_n をy軸にとって描いた曲線はCornuのらせん、あるいはClothoid曲線⁴⁾と呼ばれる(図2)。

Fig. 2 Cornu spiral (Clothoid)

ここで、y軸を虚軸にとり、 $j = \sqrt{-1}$ とすると、曲線Pはuをパラメータとして下式で表される。

$$\begin{aligned} P = x + jy &= \int_0^u \left(\cos \frac{\pi u^2}{2} + j \sin \frac{\pi u^2}{2} \right) du \\ &= \int_0^u e^{j \frac{\pi u^2}{2}} du \end{aligned} \quad (3)$$

これを基本クロソイド曲線または単位クロソイド曲線と呼ぶ。一般のクロソイド曲線は、

$$\begin{aligned} P &= P_0 + ae^{j\phi_0} \int_0^u e^{\pm j \frac{\pi u^2}{2}} du \\ &= P_0 + ae^{j\phi_0} (C_s(u) \pm j S_n(u)) \end{aligned} \quad (4)$$

で表される。ここで、 P_0 はらせんの始点の位置、 a は尺度係数、 ϕ_0 は始点の接線方向を与える角度であり、 j の前の符号が負のときはらせんのねじれ方向は時計回りとなる。

また、図2はuの正の部分について描かれているが、uの負の方向にも拡張することができる。いま、sを曲線の曲線に沿った長さとして、Pをsで微分すると、接線方向 ϕ が下式で与えられる。

$$\frac{dP}{ds} = e^{j\phi} = \frac{dP}{du} \cdot \frac{du}{ds} = ae^{j(\phi_0 \pm \frac{\pi u^2}{2})} \cdot \frac{du}{ds}$$

ここで、 $u=0$ のとき $P=0$ とすると、

$$\begin{aligned} \phi &= \phi_0 \pm \frac{\pi u^2}{2}, & \frac{du}{ds} &= \frac{1}{a}, \\ s &= au \end{aligned} \quad (5)$$

となる。また、曲線の曲率を C_v 、曲率半径を ρ とすると、

$$\begin{aligned} C_v &= \frac{d\phi}{ds} = \frac{d\phi}{du} \cdot \frac{du}{ds} = \pm \frac{\pi u}{a} = \pm \frac{\pi s}{a^2} \\ \rho &= \frac{1}{C_v} = \pm \frac{a}{\pi u} = \pm \frac{a^2}{\pi s} \end{aligned} \quad (6)$$

である。曲率 C_v が始点からの曲線の長さsに比例して変化することがこの曲線の特徴である。また、単位クロソイド曲線においては $a=1$ であり、このときuは曲線の長さを示している。

3. クロソイド曲線の数値計算

数値計算でフレネルの積分(式(1)、(2))を求めるには下記のギルバート(Gilbert)の式³⁾を用いることができる。しかし、問題はパラメータuが大きくなるにつれて、その展開式の中間項の絶対値が大きくなることであり、コンピュータの有効けた数が有限であるので、各項を加算した結果の精度が悪くなるのである。すなわち、コンピュータの有効けた数と必要な精度による決まったパラメータの値を u_s とすると、ギルバートの式は $u \leq u_s$ の時しか用いることができない。倍長精度(64ビット)の演算を行ったとき u_s はほぼ

5.5であった。

この問題を解決するため、著者の一人、仇は、これを修正するギルバート-仇アルゴリズムを開発した。これは、与えられた u を u_a とすれば、 $u_a \leq u_s$ なら、ギルバートの式を用い、 $u_a > u_s$ なら、その値を $0 \rightarrow u_b \rightarrow u_a$ のように二段階に分けて、 $0 \rightarrow u_b$ の部分にはギルバートの式を用い、 $u_b \rightarrow u_a$ の部分には台形積分法則を用いるアルゴリズムである。実際の計算には、台形法則の方が速いので、その u_b をもっと小さくすればよいのである($u_b \leq u_s$)。ただし、フレネルの積分関数の周期が4であるので、 u_b は u_a から1周期ずつ減るような値をとらなければならない。

なお、フレネルの積分を求める式としては、シンプソン則も用いられるが、十分な精度を得ようとする計算に時間がかかる。また、台形法則は計算速度が速いが、周期関数にしか用いることができない。そのため、 u の小さい部分にはギルバートの式を用い、ギルバート式で精度の悪化する $u > u_s$ について台形法則を用いるようにした。

3.1 ギルバートの式

$$C_s(u) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n+2} \frac{u^{4n+5}}{(2n+2)!(4n+5)} \quad (7)$$

$$S_n(u) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n+3} \frac{u^{4n+7}}{(2n+3)!(4n+7)} \quad (8)$$

3.2 ギルバート-仇 アルゴリズム

$$\begin{aligned} C_s(u_a) &= C_{s1}(u_a, u_b) + C_{s2}(u_b) \\ S_n(u_a) &= S_{n1}(u_a, u_b) + S_{n2}(u_b) \end{aligned} \quad (9)$$

ここで、

$$\begin{aligned} C_{s1}(u_a, u_b) &= \sum_{m=1}^m H \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}(u_b + H \cdot m)^2\right) \\ S_{n1}(u_a, u_b) &= \sum_{m=1}^m H \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}(u_b + H \cdot m)^2\right) \\ H &= (u_a - u_b)/m \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} C_{s2}(u_b) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n+2} \frac{u_b^{4n+5}}{(2n+2)!(4n+5)} \\ S_{n2}(u_b) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n+3} \frac{u_b^{4n+7}}{(2n+3)!(4n+7)} \end{aligned} \quad (11)$$

であり、ここで、 $C_{s1}(u_a, u_b)$ 、 $S_{n1}(u_a, u_b)$ は $u_b \rightarrow u_a$ の

部分、 $C_{s2}(u_b)$ 、 $S_{n2}(u_b)$ は $0 \rightarrow u_b$ の部分を表す。 m は分割数である。

ギルバート-仇アルゴリズムのフローチャートを図3に示す。

Fig. 3 Flowchart of Gilbert-Qiu algorithm

4. クロソイド曲線によるコーナ補間

図4のごとく、進行方向が α° 転換するような2直線間をクロソイド曲線で補間する方法を検討する。

Fig. 4 Clothoidal interpolation of angle α
この場合、曲率が0から最大値 C_{vmax} までのクロソイドセグメントを折り返して用い、折り返し点において、接線方向が連続になるようにすればよい。

$P_0 = (0, 0)^T$, $\phi_0 = 0$ とすると、

$$\phi_{max} = \frac{\alpha}{2}, \quad u_{max} = \sqrt{\frac{\phi_{max}}{90^\circ}}$$

$$C_{vmax} = \frac{\pi u_{max}}{a} \quad (12)$$

となり、尺度係数 a を適当に選ぶことにより、最大曲率を調節することができる。与えた線速度と最大曲率から最大求心加速度が求められる。

Fig. 5 Change of velocity, acceleration, slope and curvity

Fig. 6 Clothoidal interpolation of angle 90°

図5には $\alpha = 90^\circ$ における速度及び加速度の変化を x 方向および y 方向のそれぞれについて、曲率半径、接線角の変化とともに示す。いずれも始点から、終点まで、その前後を含めて、連続的に変化することが分かる。

Fig. 7 Clothoidal interpolation of angle 180°

Fig. 8 Clothoidal interpolation of angle 240°

Fig. 9 Clothoidal interpolation of angle 270°

図6, 図7, 図8, 図9, 図10, 図11にはそれぞれ $\alpha = 90^\circ, 180^\circ, 240^\circ, 270^\circ, 300^\circ, 360^\circ$ の場合の補間曲線と, 設計上必要となる数値を示す。

5. 代表的作業経路パターン例

溶接, 塗装などのロボット作業において必要となる補間軌跡の代表的な例を図12に示す。

Fig.10 Clothoidal interpolation of angle 300°

Fig.11 Clothoidal interpolation of angle 360°

図12において, 図(a)は内補間の例であり, 角部の内側に曲率が連続的に変化する滑らかな軌跡を作っている。補間部の大きさは任意に決めることができ, 図6に無次元値で示された値から定数倍して必要なデータを得ることができる。

また, 図(b)は外補間の例であり, 例えば塗装作業などにおいて, 角部を厳密に塗ることが要求される場合, 塗装作業経路の外側に迂回部を作り, この間は塗装ノズルを閉じるようにする。図ではこれを点線で表す。この場合にも, 補間部の大きさは任意に選ぶこと

(a) Continuous Clothoidal interpolation of angle 90°

(b) Continuous Clothoidal interpolation of angle 270°

Fig.12 Clothoidal interpolation of corner path

ができ, 線速度に応じて決定すればよい。クロソイド曲線の長さは既知であるので, ノズルの開閉をタイマで制御することも可能である。

図13はさまざまな塗装作業の例を示すものである。図(a)はアーム先端を折り返しながら平行に作業面上を移動させる例であり, コーナ部は図7に示す転向角 α が 180° の補間を用いている。図(b)は作業軌跡が同一平面内において 60° に交わるケースであり, コーナ部は図8に示す転向角 α が 240° の補間であるが, コーナ部においては, クロソイド補間曲線が作業空間外のC点からD点まで回るので, 直線部を追加してある。図(c)は図12(b)に示した作業軌跡が同一平面内で直角に交わるケースであり, コーナ部は図9に示す転向角 α が 270° の補間であるが, クロソイド補間曲線はA点からC点まで回る。AD間およびDC間は正確な直線ではないが, 近似的な直線として利用することができる。図(d)は作業空間の一部 I' (C点から

(a) Application of Clothoidal interpolation of angle 180°

(b) Application of Clothoidal interpolation of angle 240°

(c) Application of Clothoidal interpolation of angle 270°

(d) Application of Clothoidal interpolation of angle 360°

Fig. 13 Examples of spray path

D点まで)に切欠きがあり、別の部分Ⅱ(E点からF点まで)では角度 α (ここでは 90°)の回転を行う例であり、クロソイド補間曲線はそれぞれ図11および図6に示す轉向角 α が 360° および 90° の補間を用いている。

6. 結 言

本研究において以下のことが明らかとなった。

- (1) クロソイド曲線は簡潔な形を持つ数学的に取り扱いやすい曲線である。これを用いることによって、2次微分までが連続な補間曲線を得ることができる。この曲線は直線と円弧との接合に適しており、高速のコーナ軌跡制御に有効に用いることが可能である。

- (2) クロソイドコーナ補間の基礎式と活用法を述べ、クロソイドコーナ補間を用いた場合の寸法関係について基準となるデータを与えた。

参 考 文 献

- 1) 清水勝彦, 長谷川清, 四方田正彦: ロボットの滑らかな加減速制御技術, 神戸製鋼技報, 2 (1987) 39.
- 2) 森口繁一: 数学公式Ⅲ, 岩波書店, (1960) 22.
- 3) マルセル・ボル: 万能数値表, 白水社, (1952) 359.
- 4) 矢野健太郎: 数学ハンドブック, 森北出版, (1985) 110.
- 5) 牧野 洋: 自動機械機構学, 日刊工業新聞社, (1976).