立体表現・干渉における位相管理*

——コホモロジー群の局所拡大による非多様体モデリング——

村 端 晋 一** 東 正 毅***

Topological Manipulations for Shape Representation and Interference
—Non-Manifold Geometric Modeling Based on Locally Extended Cohomology Group—

Shin-ichi MURABATA and Masatake HIGASHI

This paper describes a unified method for topological manipulations of shapes. The method is based on the duality between a vertex and a face in the B-reps model. Local structures of traditional face loops are extended into vertex and edge cycles. Their non-manifold Euler operations are realized by utilizing similarity of “kfmrh” and “kemr” for face loops. Furthermore, a surface model is treated as a degenerated solid. The method has enabled to manage the intermediate states of set operations between two solids and surface operations such as connecting surfaces and making two solids from a closed surface.

Key words: B-reps model, Euler operation, non-manifold, homology and cohomology

1. は じ め に

従来、立体に対する集合演算では、交線ループ作成と位相構造更新の2ステップに大きく分けられ、両者の間に複雑で個別的な一時情報を演算テーブルとして介在させることが多い。このため従来の集合演算の処理過程では、局所情報と大域情報の論理の一貫性を保つのが難しく、また後戻りなど制御の柔軟性に欠け、ソリッドシステムの不安定の一因となっている。

近年、ハーフエッジ構造¹⁾に代表されるように、局所操作による一貫した位相管理を行う方法が提案されてからは、位相を扱う部分はオイラー演算として整理され、局所変形操作や、集合演算の位相構造更新部などで実用化されている。ただし、この適用の範囲は、頂点や稜線で接することのない多様体モデルの枠内に限られ、集合演算の交線作成過程の表現や、単一面が稜線接続されたフィンを持つ形状には適用できない。一方、頂点や稜線で立体が接する非多様体に対しては、データ構造やオイラー演算の新しい提案²⁾³⁾が幾つか行われているが、統一性、論理性という点で、十分

な議論が尽くされているとは言えない。また、これに関する数学的な理論体系も整備されていない。

本研究では、非多様体を、ある多様体の縮退過程による極限結果とみなし、既に体系化されている多様体の理論に論拠を置きながら、動的な過程でこれをとらえる。具体的には、面分と頂点の双対性を基に、従来のハーフエッジ構造とそのオイラー演算に対し、面分のループ構造とそれに対する演算を頂点、稜線へと拡張する。この結果、面分の接続以外に、稜線接続、頂点接続が可能となる。これを利用すると、先の集合演算の二つのステップは一つにまとまり、途中の過程を局所的な非多様体オイラー演算で記述できる。

次に、ハーフエッジの類推よりハーフフェースを考え、曲面モデルを3次元領域が一面に縮退したソリッドとして扱うことを提案する。これにより、面演算は、非多様体演算で扱うことになる。例として、幾つかの面の接続と、閉曲面モデルのソリッド化を示す。

最後に、以上の処理において重要となる基本ルーチンのうち、切断サイクルチェックとシェル分離トレースの二つのアルゴリズムを示す。

2. 非多様体の考え方

数学では、多様体に関して理論的体系が整備されているが、非多様体については体系化されていない。そこで、非多様体をある多様体の縮退過程による極限結果とみなし、面分と頂点の双対性に着目し、組合せト

* 原稿受付 平成元年12月8日。1989年度精密工学会春季大会学術講演会(平成元年3月24日)および1989年度精密工学会秋季大会学術講演会(平成元年11月5日)にて発表

** 正 会 員 豊田工業大学(現、トヨタ自動車(株);豊田市トヨタ町1)

*** 正 会 員 豊田工業大学(名古屋市天白区久方2-12-1)

Fig. 1 Duality between vertex and face

ボロジの観点でコホモロジー群の局所構造を整理し、オイラー・ポアンカレの式の拡張を行う。

通常、至るところ局所的にユークリッド空間と同じと見なせるもの（位相空間）を多様体という。組合せトポロジー的には、面分で周囲に稜線・頂点と交互に巡回する1個の環状ループを持ち、稜線で2個の側面と2個の端点を持ち、頂点で稜線・面分と交互に巡回する1個の放射状ループを持つものが多様体である。以上の条件に外れる場所を特異部と呼び、特異部を持つものを非多様体と定義する。

2.1 面分と頂点の双対性

図1における平面において、頂点を結んで三角形分割（実線）を考えた場合、同時に面分を結んだ六角形分割（破線）が考えられる。この三角形分割と六角形分割は以下に示すように同じ論理構造を持つ。

面分 f の境界は……環状に巡回する稜線群

稜線 e の境界は……両端点

頂点 v の境界は……なし

頂点 v を境界とする……放射状に巡回する稜線群

稜線 e を境界とする……両側面

面分 f を境界とする……なし（実は3次元領域）となる。ここで「……の境界は……」の命題群と「……を境界とする……」の命題群は、「面分」と「頂点」、「環状」と「放射状」、「端」と「側」などの字句を入れ換えた双対関係⁴⁾にある。通常の境界概念では、

面分→稜線→頂点→なし

と、次数の降順で推移し、双対的な境界概念では、

頂点→稜線→面分→なし

と、次数の昇順で推移する。なお面分を境界とするものは、実際には3次元領域であるが、ここではB-repsモデルを対象にしており、なしと考える。以上の議論は、代数学⁴⁾におけるホモロジー群とコホモロジー群の双対性に対応する。

2.2 局所構造

頂点、稜線の周りの非多様体の局所構造を、頂点、面分の双対性に基づき、ホモロジー群、コホモロジー群の局所表現により一般化する。

従来の面分が複数個の内部ループを持つ場合、面分

Fig. 2 Local structure

Fig. 3 Transition of Euler characteristic

を取り囲む境界は、図2に示すように、環状に頂点・稜線と交互に巡回する複数個のループで構成される。これに対して、先の頂点と面分の双対性による論理の入れ換えを行うと、頂点を取り囲む双対境界は、放射状に面分・稜線と交互に巡回する複数個のループとなり、稜線を取り囲む境界は、頂点・面分を2回繰り返す複数個のループとなる。これらのループによる局所構造は、代数的には、各要素におけるホモロジー群と、これに双対なコホモロジー群の局所表現とみなせる。この考え方によれば、面分の内部ループは非多様体とみなすことができる。各要素のループを、中心要素の周りを周回する実体としてサイクル⁴⁾と総称し、このうち、中心要素と元の形状との局所的な連結性を破るものをバウンダリー⁴⁾と総称する。バウンダリーは、中心となる幾何要素に対して一意に定まるため、頂点、稜線、面分そのものと同一視する。

2.3 オイラー・ポアンカレの公式の拡張

非多様体を、ある多様体の縮退過程の結果と考えて、多様体のオイラー・ポアンカレの公式を拡張する。多様体に関するオイラー標数の公式は、多様体を構成する頂点総数を V 、稜線総数を E 、面分総数を F とすると式(1)である。 S はシェル数で、 H はホール数である。

$$V - E + F = 2(S - H) \quad (1)$$

面分がループを持つ場合、従来、稜線数からループ数を引いて式(2)を導いている。これは、前節の議論より、面内のループ間に1本稜線を渡すことで多様体化し、式(1)を満足するように拡張していると考えられることができる(図3①)。

$$V - (E + 1) + F = 2(S - H) \quad (2)$$

面に内部ループを L 個もつ場合が従来の公式で(3)となる。

$$V - E + F - L = 2(S - H) \quad (3)$$

Fig. 4 Hierarchy of data structure

頂点, 稜線の場合も同様に考えると, 稜線が縮退してできた特異部に対し, 稜線を1本追加して特異性を1個除き, 多様体化が図れる. 頂点の場合は, 図3②に示すように, 面分と同じ形となる. 稜線の場合には, 図3③のように稜線を1本追加すると1個のホールができるため, 式(4)になる. 図3の矢印の横の数字は, オイラー標数の変化分を示す.

$$V-(E+1)+F=2(S-(H+1)) \quad (4)$$

以上を一般化して頂点、稜線、面分のそれぞれの総数(バウンダリー数)を V_b, E_b, F_b , 特異性の総数(サイクル数-1)をそれぞれ V_r, E_r, F_r とすると、非多様体の一般式(5)が導かれる。

$$(V_b - V_r) - (E_b - E_r) + (F_b - F_r) = 2(S - H) \quad (5)$$

多様体の場合、 H は正值で幾何的なホール数を意味するが、非多様体の場合は負値も取り、ホールの幾何的な意味は不明りょうになる。これは、想定する非多様体形状への縮退過程が一意でないためであり、その表現は多価性を持つ。

3. データ構造と基本オイラー演算

多様体を表現するデータ構造と、そのデータ構造を操作するためのオイラー演算を実現するために、Mantyla¹⁾により確立された多様体に関するハーフエッジ構造とオイラー演算を拡張する.

3.1 データ構造

曲面モデルを含む非多様体を表現するために、従来のハーフエッジ構造に頂点と稜線回りのサイクル管理の機能とハーフフェースの概念を導入する。

ハーフエッジ構造では、面分の外部ループ、内部ループのみを取り扱っていたが、これを面バウンダリー (Fb)、面サイクル (Fc) とし、非多様体を扱うため、頂点バウンダリー (Vb)、頂点サイクル (Vc) と稜線バウンダリー (Eb)、稜線サイクル (Ec) を追加する。このデータ構造をサイクル構造と呼ぶことにする。これにより、図4に示すように、従来のハーフエッジ構造に対しサイクル構造では、階層構造の対称性が得られる。

next He
Fc
Ec
Vc
mate

Fig. 5 Half edge

Fig. 6 Cycles and boundaries

next Ec
Eb
He1
He2
edge

Fig. 7 Cycle

next Vc
Vb
No. of He
He

vertex

next Fb
Sh
No. of Fc
Fc
mate
F
Fc (outer loop)

Fig. 8 Face boundary

Vb, Eb, Fb は、2.2 節で述べたように幾何要素の頂点、稜線、面分と対応づけることができ、この下のサイクルを通して従来のハーフエッジ (He) の持つポインタにより、局所的な連結がとられる。図 5 は、ハーフエッジの持つポインタを示している。このハーフエッジは、逆に Vc, Ec, Fc よりポインタで指され、それぞれのサイクルは、バウンダリーよりその一つが指される。この関係の例を示したのが図 6 であり、①は従来の面ループを、②は三つの頂点が一つに縮退した場合の断面図を、③は三つの稜線が一つに縮退した場合の断面図を示す。稜線サイクルの正の向きは、稜線の幾何的な正の向きに対して右回りとする。図 7 に、新しく追加した Vc, Ec 要素の持つポインタ構成を示す。

各サイクルに対する組合せトポロジーの認識は、次のように行われる。面分サイクルは、ハーフエッジの巡回リストを next ポインタで環状に稜線・頂点を交互に外から見て左周りにたどる。頂点サイクルは、ハーフエッジの持つ mate ポインタと next ポインタで放射状に稜線・面分を交互に右周りにたどる。稜線サイクルは mate ポインタで対向するハーフエッジの対を保持し、両側面と両頂点を指す。

次に曲面モデルを取り扱えるように、フェースバウンダリー要素 (Fb) を定める。曲面モデルは、3次元領域が一面に縮退した非多様体ソリッドと考える。これにより、面の裏表を対等に扱うことができ、多様体ソリッドに面を付加したフィン形状などを取り扱うことができる。稜線は2次元面領域を二分しており、面分は3次元領域を二分していると考え、稜線における

Fig. 9 Boundaries and shell

Fig. 10 Euler operation set

ハーフエッジに対応し、面に対してハーフフェースの概念を導入する。このハーフフェースは、フェースバウンダリーと対応させる。図8に、フェースバウンダリー要素の構成を示す。mate ポイントで互いに相手を指し合い、このほかに Fc へのポイントを持つ。さらに、幾何実体であるエッジと対応してフェース (F) を設け、フェースから二つのハーフフェースである Fb を指す。通常のソリッドでは面の表側だけを指し、他方のポイントが Null とし、面モデルでは両側の Fb を指す。この関係を図示すると図9となる。

3.2 基本オイラー演算

式(5)の拡張オイラー・ポアンカレの式に対し、その要素数を変化させる基本オイラー演算を定義する。

すべての基本オイラー演算を図10に、その正演算の遷移ベクトル (Vb, Eb, Fb, Vr, Er, Fr, H, S) を表1に示す。①から⑥までの演算とその

逆演算は、従来提案されている基本オイラー演算であり、⑦以降が新設である。記名法は従来どおりで (m: 生成, k: 削除, j: 接続, s: 分離, r: 局所構造), 逆演算名は, m と k, s と j を入れ換える。図10の①から④の演算は多様体演算で、頂点、稜線、面分のバウンダリーとサイクルが一致している多様体的部位で多様体的に動作する。図10の⑤から⑨は、非多様体演算である。

面分と頂点の双対関係を基に、新しく頂点接続 (⑦ kvmrh) と稜線接続 (⑧ kehmr, ⑨ kehmr1) を定義する。mef と mev は既に面分と頂点の双対関係にあるが、面のループを操作する kfmrh, kemr には双対対応する演算がない。kfmrh は、面サイクルを多重化し大域的な面の接続を行う。すなわち、異なるシェル間の場合は、シェルの合成を行い、同一シェル間の場合は、ホールを生成を行う。これに対して、頂点サイクルを多重化し、シェル、ホールを生成するものを kvmrh とする。次に、kemr とその逆 mekr を考え、これを双対化する。mekr は面分内で頂点・稜線と交互に環状に周回する2個の面サイクル間に稜線を渡し、1個の面サイクルにする。これに対して、kehmr は頂点で面分・稜線と交互に放射状に周回する2個の頂点サイクル間において、稜線を多重化し1個の頂点サイクルにするものとする。mekr はその逆演算である。ここで、稜線は両端に頂点を持つため、一方の端点だけでは処理が完結せず、稜線の生成消滅にあわせ常に両端を処理する必要がある。従ってこの演算は、両端の頂点サイクルの分離合成を行う稜線接続演算及び稜線分離演算となる。両端の頂点サイクルの状況により4通りの場合があり、図10と表1に示した a, b, c, d の内、a, b の一方と c, d の一方が必ず

Table 1 Transition vectors

	/inverse	Vb	Eb	Fb	Vr	Er	Fr	H	S
①	mvfs/kvfs	1	0	1	0	0	0	0	1
②	mef/kef	0	1	1	0	0	0	0	0
③	semv/jekv	1	1	0	0	0	0	0	0
④	mev/kev	1	1	0	0	0	0	0	0
⑤	kemr/mekr	0	-1	0	0	0	1	0	0
⑥-a	kfmrh/mfkrh	0	0	-1	0	0	1	1	0
-b		0	0	-1	0	0	1	0	-1
⑦-a	kvmrh/mvkrh	-1	0	0	1	0	0	1	0
-b		-1	0	0	1	0	0	0	-1
⑧-a	kehmr/mekhr	0	-1	0	1	1	0	0	0
-b		0	-1	0	-1	1	0	-1	0
-c		0	0	0	1	0	0	0	0
-d		0	0	0	-1	0	0	-1	0
⑨	kehmr1/mekhr1	0	-1	0	0	1	0	-1	0
⑩	degstur/gensol	0	0	0	0	0	0	0	0

Fig. 11 Examples of non-manifold operation

対で選択される。この頂点のサイクルの変化において、サイクル構造を変化させず稜線接続する場合が存在し、これを *kehrml* とする。この演算は、ともに両端を頂点接続されている 2 稜線に対して作用するが、前者は、常にハーフエッジの *mate* ポインタの交換を行い、後者は、交換を行わない。稜線接続によるホール値 H の出入りは、*kehrml* の場合は、常に H を 1 減らし、*kehrmr* の場合、両端の頂点ごとにサイクルが合成される時に限って H を 1 減らす。これにより、多様体と非多様体間を矛盾なく推移する。図 11 に稜線接続と頂点接続を用い鼓状の形状の中央で非多様体演算の後、2 個の形状に分離する例を、遷移ベクトル ($V_b, E_b, F_b, V_r, E_r, F_r, H, S$) の変化とともに示す。①の状態に *kehrmr-a, -c* を施すと、②となり、頂点回りに 4 個のサイクルができる。これに対し、稜線を *mehkrl* により二つに分離して真中に穴を作る (③)。次に *mvkrh-a* を施すと ④となり、これに *mvkrh-b* を施すと ⑤の二つのソリッドができる。この過程での遷移ベクトルは、式 (5) を常に満足する。以上の操作は、別の過程を経ることができ、①に対して *kehrml* を施し、(②')これに、*mehkr-b, -d* を施すと ③'となる。

最後の degsur はサーフェス化演算で、その逆演算 gensol はソリッド化演算である。この演算では、2面はすべての周囲の稜線、頂点を共有することが前提となる。degSUR は、面分間のトポロジーのボタンチェックを行った後、一方のフェース F を消去し、互いに mate ポインタでリンクし、3次元領域は1面に縮退する。この結果、曲面には裏表2面の表層トポロジーが対応する。

3.3 切断サイクルチェック

頂点, 面分の分離演算 (mvkrh, mfkrrh) において
演算後, 大域的なシェル構造を分離するのか, 分離せ

Fig. 12 Boundary checking

Fig. 13 Process of set operation

ずホールを消滅させるだけかを判断する必要がある。これは当該サイクルを境にして非多様体の表面の色の塗り分け問題に対応する。頂点、面分の双対性のため、次のように同一アルゴリズムで対処できる。図 12 に示す当該サイクルにおいて、サイクルのこちら側のすべてのハーフエッジにフラグをセットし障壁とする。その後、サイクルの向かい側のすべてのハーフエッジに対してフラグセットルーチンを走らせる。セットルーチンは、ハーフエッジが局所的に連結しているすべての要素へ再帰的に制御を渡し、その要素のフラグをセットする。既にフラグがセットされていれば停止する。この結果、フラグのセットが当該サイクルのこちら側へ回り込まないならば図 12 の右図となり、このサイクルは切断サイクルである。mvkrh 及び mfkrrh は、フラグによる色の塗り分けに従い、幾何データを含めた全データをそれぞれのシェルに分離する。図 4 に示すようにシェルに参照ポインタを集中させているため、この処理を効率的に行うことができる。

4. 非多様体モデルの応用

4.1 ソリッド集合演算への応用

集合演算の途中過程を非多様体として扱うと、従来のような個別のテーブルを用意することなく、直接データ構造上で管理できる。簡単な例として、2 立体 A, B の集合演算における頂点サイクルの変化の様子を模式化したものを図 13 に示す。まず、幾何演算で求めた A, B 間の干渉部分曲線とその両端点を、多様体演算により A, B 双方に追加し新規の稜線、頂点とする (B)。次に、両端の頂点を kvmrh で頂点接続する (②)。この時、ホールが 1 個できるが、頂点サイクルは、まだ元の A, B の独立した状態である。次

Fig. 14 Examples of surface model

に、頂点間の稜線を $kehmr$ で稜線接続する。この時、両方の頂点サイクルは1個に合成され先のホールは消滅する(③)。引き続き、隣接干渉曲線分と隣接頂点を求め、同様の手順を踏む。この時、先の頂点の内、新曲線分につながる頂点サイクルは、次の $kehmr$ で再び2個に分割される(⑤)。この結果、干渉稜線を境にして、シェル A, B 間で表層トポロジーが交換される。このように、逐次求めた干渉曲線列に対して非多様体接続を行うことで、集合演算の途中過程を管理する。完成された状態では、非多様体接続部は必ずループし、すべての頂点サイクルは、シェル A, B で互いにメートを交換しあい再び2個のサイクルとなる(⑦)が、未完の状態では、非多様体接続部はループせず、両端の頂点サイクルが1個に合成されたままである。接続ループが完成した後、4.3節で述べるシェル分離トレースを行えば、論理和 $A \cup B$ と論理積 $A \cdot B$ が得られる(C)。この演算と位相反転演算を組み合わせると、任意の集合演算が実現できる。

4.2 曲面モデルへの応用

図14にサーフェス演算の幾つかの例(①~④)を示す。これらは、集合演算で行う非多様体接続と同様、非多様体オイラー演算を組み合わせで行われる。面接続では両端頂点を $kvmrh$ で接続し、その間を $kehmr$ で稜線接続する。この操作で両端頂点サイクルは変化し、曲面の裏表の表層トポロジーは隣と連結する。この結果、面の内部頂点でサイクルは表裏2個、境界頂点のサイクルは表裏あわせて1個になる。更に、境界のない閉じた面モデル(④)は、すべての頂点が表裏2個のサイクルになる。この作成された閉

曲面モデルは、同一形状をベースにする互いに位相反転の関係にある二つのソリッドの論理積を表す非多様体となる。これに対し局所的な面膨張演算 ($gensol$) を行った後、 $mehkr1$ を使ったシェル分離トレースを行うと正負2個の多様体ソリッドが得られる。

4.3 シェル分離トレース

シェル分離トレースは、連続する頂点と稜線の非多様体接続部位を再帰的にトレースし接続を分離する。このアルゴリズムは、集合演算の最終過程や閉曲面のソリッド化に用いられる。個々の頂点では、まず、表側から頂点サイクルをたどり、非多様体接続稜線を見つける。次に裏側からも頂点コサイクルをスキャンしてこの稜線に到達することを確認し、この稜線を $mehkr1$ で分離する。この操作を1周行って最後に頂点の分離を $mvkrh$ で行う。以上を再帰的に繰り返す。終了条件は、非多様体部がなくなった時、あるいは非多様体接続ではあるが、1個の頂点サイクル内に合流した時である。後者は、集合演算で干渉ループが完全に閉じていない場合に生じる。これは集合演算が成立するかどうかのチェックに利用できる。最終ステップでは、 $mvkrh$ が切断サイクルを感知し、自動シェル分離を行う。

5. ま と め

形状モデリングにおける立体の表現、干渉を扱うため、以下のように非多様体としての統一的な位相管理法を確立した。

- (1) 非多様体の定義を明確にし、これに基づいてオイラー・ポアンカレの式を拡張した。
- (2) ハーフエッジ構造の拡張により、非多様体を扱うデータ構造としてサイクル構造を提案した。
- (3) 新しいオイラー・ポアンカレ式に対応して、非多様体のオイラー・オペレーションを定義した。
- (4) 以上を用いて、立体の集合演算過程の管理と、閉じた曲面の立体化などの曲面演算が、非多様体として統一的に行われる方法を開発した。

これらは、局所ホモロジー群/コホモロジー群の一貫した論理体系を持ち、従来の多様体の枠組に納まらない、大域と局所が微妙に絡む局面で強力な論理基盤を与える。今後は、幾何演算と組み合わせ、形状モデリングシステムとして完成してゆく。

参 考 文 献

- 1) M. Mantyla: An Introduction to Solid Modeling, Computer Science Press, Rockville, (1988).
- 2) K. Weiler: The Radial Edge Structure: A Topological Representation for Non-Manifold Geometric Boundary Modeling, Geometric Modeling for CAD Applications, North-Holland, New York, N. Y., (1988) 3.
- 3) 増田 宏はか: 非多様体モデルのためのオイラー・オペレーション, グラフィックスとCADシンポジウム論文集(1988) 83.
- 4) 服部 昭: 現代代数学, 朝倉書店 (1968).