一般転位インボリュート内歯車に関する研究*

八重島 公郎** 矢野 昭 洋***

Designing of Generalized Profile Shifted Involute Internal Gears

KORO YAEJIMA and Akihiro YANO

The purpose of this study is to expand the range of designing applicability and to improve the engagement performance by introducing a tangential shift (transverse shift) in addition to an already adopted radial shift (longitudinal shift) in designing of internal gears. Firstly an equation of engagement was formulated. Secondly a large number of limit diagrams for various interferences were prepared. On the basis of these data, an optimal designing system was developed. Finally extensive designing computation was carried out. Trial manufacture of gears was attempted by application of some of the computation data. It was confirmed that with the system and technique developed, designing of gears with a contact ratio above 2 and designing of internal gears having a small number of teeth became possible and that the introduction of a coefficient of transverse shift was considerably effective in expansion of the range of designing feasibility and improvement of the engagement performance. The practicability of the gears was verified by trial manufacture.

Key words: gear, internal gear, design system, optimal designing, optimization technique, computer program, CAD, design variables, objective function

1. 緒 言

転位インボリュート内歯車は、そのかみあいおよび歯切りに際して、多くの種類の干渉を考慮せねばならず、その設計範囲はかなり制約され、複雑である。

本研究は内歯車の設計に通常用いられている工具の半径方向の転位(縦転位)のほかに、接線方向の転位(横転位)を行う、いわゆる一般転位の考え方を導入し、その設計範囲の拡大と、かみあい性能の向上を目的としたものである。一般転位の基本概念およびその平歯車への適用に関しては中田¹⁾の研究があり、また歯数差零の内歯車への適用に関しては両角、八重島²⁾の研究がある。本研究では、これを歯数差のある通常の内歯車に適用するため、まず、かみあい方程式を求め、さらに各干渉条件式について検討を行った。次に各干渉に対する限界線図を作成してそれに対する考察を行い、それらを基にして、この歯車の簡易最適化設計システムを構成し、これにより多くの設計計算と試作を行ったので報告する。

2. 設計計算式

いま一定中心距離でかみあっている内歯車対に横転位を行った場合を考えると、横転位は工具を接線方向に移動するだけだから、その歯先円直径に変化は無く、かみあいを行っている歯形と反対側の歯形が歯車中心を中心として回転移動したものと考え得る。従ってバックラッシュが変化することになるから、指定バックラッシュにするためには、中心距離、そしてかみあい圧力角が変化することになる。

いま、 m :モジュール、 α_c :工具圧力角、 α_b :かみあい圧力角、 Z_1 :歯数、 a :中心距離、 x_1 :縦転位係数、 u_1 :横転位係数、 C_n :法線バックラッシュ、 h_k :歯末のたけ係数(λ は1および2で、1はピニオン、2は内歯車に対応する)としたとき、その実用かみあい方程式は次のように表される。

$$\left. \begin{aligned} \text{inv } \alpha_b &= \text{inv } \alpha_c + 2 \tan \alpha_c \\ &\times \frac{x_2 - x_1 + \frac{1}{2}(u_1 + u_2) \cot \alpha_c - \frac{1}{2 \sin \alpha_c} \left(\frac{C_n}{m} \right)}{Z_2 - Z_1} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$a = \frac{Z_2 - Z_1}{2} m \frac{\cos \alpha_c}{\cos \alpha_b}$$

* 原稿受付 平成2年8月10日。昭和63年度精密工学会秋季大会学術講演会(昭和63年10月5日)にて発表

** 正 会 員 信州大学工学部(長野市若里500)

*** ソニー(株)厚木工場(厚木市旭町4-14-1)

Fig. 1 Limit diagram (involute interference, trochoidal interference)

なお、横転位については内歯車、ピニオン共に歯溝の広がる方を正値とした。

また、歯先円直径をいわゆる DIN 方式とした場合の内歯車の歯先とがりの条件は

$$\frac{\pi}{2} - u_2 - 2x_2 \tan \alpha_c - Z_2(\text{inv } \alpha_c - \text{inv } \alpha_{k2}) \geq 0 \quad (2)$$

ただし、内歯車の歯先における圧力角 α_{k2} は、

$$\cos \alpha_{k2} = \frac{Z_2 \cos \alpha_c}{Z_2 - 2h_k + 2x_2} \quad (3)$$

また、ピニオンの歯先とがりの条件は、

$$\frac{\pi}{2} - u_1 + 2x_1 \tan \alpha_c - Z_1(\text{inv } \alpha_{k1} - \text{inv } \alpha_c) \geq 0 \quad (4)$$

ただし、ピニオンの歯先における圧力角 α_{k1} は、

$$\cos \alpha_{k1} = \frac{Z_1 \cos \alpha_c}{Z_1 + 2h_k + 2x_1} \quad (5)$$

となり、これに対する限界線図が著者ら²⁾により作成されている。

他のインボリュート干涉、トロコイド干涉、トリミング、無頂隙などに関しては理論検討の結果、通常の内歯車の干涉条件³⁾がそのまま用い得ることがわかった。しかし、式(1)に示すごとくかみあい圧力角に $(u_1 + u_2)$ が含まれているので数値的に大きな影響を及ぼし、主な干涉について干涉限界線図を作成して考

察を行う必要がある。

3. 干涉限界線図

コンピュータを用いた暗探法により多くの数値計算を行い干涉限界線図を合計 30 枚作成した。インボリュート干涉とトロコイド干涉に関する限界線図を x_1 の $-1.0 \sim 1.0$ の範囲で 0.5 とびに 5 枚、かみあい率とトリミング（ピニオンと内歯車の組立時における）に関する限界線図を同様に 5 枚、また、かみあい圧力角に関する限界線図も同様に 5 枚作成した。さらに、無頂隙に関する限界線図を内歯車の歯底における無頂隙について 5 枚、ピニオンの歯底における無頂隙について 10 枚（ピニオンをラック工具で歯切りする場合とピニオンをピニオンカッタで歯切りする場合について各 5 枚）作成した。図 1、図 2 はその一部である。各図はいずれも $x_1 = 0.5$ のものでありハッチング側が干涉側である。図の左右の欄外に x_2 と $U(u_1 + u_2)$ の組合せの数値が示してある。図 1 においてインボリュート干涉の組合せ数値で限界線の無いものは、図の範囲でこの干涉が生じておらず、またトロコイド干涉で限界線の無いものは図の範囲ですべて干涉を生じているか、もしくは図 2 に示す $\alpha_b = 0$ の限界線の方が厳しいため、この干涉の限界線の計算が出来なかった場合である。また図中一点鎖線で示されるものはトロコイド干涉と $\alpha_b = 0$ の限界線がほぼ一致するこ

Fig. 2 Limit diagram ($\alpha_b=0$)

とを示しており、 $Z_2 - Z_1 < 1$ で示されるものは限界線が歯数差1枚以内に入っていることを示している。

4. 簡易最適化設計システムの概要

一般転位インボリュート内歯車の最適化設計は多くの干渉を考慮する上、設計変数の数も増加するため、かなりの試行錯誤が必要となり、非常に困難となる。そこで、すでに通常の内歯車設計に適用してその効果が確認されている簡易最適化の手法（影響指数法）⁴⁾をこの歯車にも適用して設計システムを構成、さらにプログラム化を行った。この方法は最初に設計変数の範囲とそれらの基本ステップ量を入力し、制約条件を満足しない場合には表1に示す影響指数により設計変数の増減を行いつつループを構成し、制約条件を満足した場合には、さらに目的関数を最適にすべき影響指数により設計変数の増減を行いつつループを構成する方法である。この方法については文献4)で詳しく説明した。結局、通常の内歯車の場合のシステムに横転位係数関係の式、入出力印刷、ループ構成、影響指数などが新たに組み込まれ、プログラムとしてはかなりの変更となったがシステムの基本的構成は文献4)に示すフローチャートとはほぼ同様なものとなった。なお、このシステムには得られた最適値の検証や、多峰

性の問題に対処するために格子点探索法（総当たり法）も併用できるようになっている。この方法は時間は膨大にかかるが得られる結果は正確である。

5. 影響指数

歯車の最適化設計は制約条件のある非線形最適化の問題になるが、本設計システムでは内歯車かみあい特有の干渉条件が加わるため、制約条件の数が非常に多くなる上、横転位係数の関係から設計変数の数も多く、その変化も非常に複雑になる。したがって既存の最適化の手法の適用が非常に困難である。そこで各目的関数や各制約条件に対する各設計変数の影響の具合（影響指数）を、設計計算式や干渉限界線図に対する考察や、実際のプログラムを用いた影響指数計算用サブルーチンによる数値計算などにより、あらかじめ求めておき、この影響指数を用いて最適化を行う簡易な最適化の手法をこの歯車にも適用した。表1はその影響指数の表であり、 U は $u_1 + u_2$ 、 d_{k2} は内歯車の歯先円直径、 $\alpha_{k\lambda}$ は歯先圧力角、 K_λ は歯先幅係数、 ε はかみあい率である。また、ReIはインボリュート干渉、ReTはトロコイド干渉、ReICは内歯車切削のインボリュート干渉、ReTRCは内歯車切削時のトリミング、ReTRは内歯車とピニオンの組立時のトリミ

Table 1 Influence index number

Design variables	a	Z_λ		$a(x_2-x_1)$		x_λ		U	u_1
Initial value	Ce	Ca		Ca		Ca Ap		Ap Ce	Ca
Conditions									
$Z_{\lambda\min}\leq Z_\lambda$	+1	+1							
$Z_{\lambda\max}\geq Z_\lambda$	-1	-1							
$1>\cos\alpha_b$		-1		+1					
$(x_2-x_1)_{\min}\leq(x_2-x_1)$		-1		+1				-1	
$(x_2-x_1)_{\max}\geq(x_2-x_1)$		+1		-1				+1	
$x_{1\min}\leq x_1$		-1		-1		+1		+1	
$x_{1\max}\geq x_1$		+1		+1		-1		-1	
$x_{2\min}\leq x_2$		+1		+1		+1		-1	
$x_{2\max}\geq x_2$		-1		-1		-1		+1	
$d_{k2\min}\leq dK_2$		+1				+1		-1	
$d_{k2\max}\geq dK_2$		-1				-1		+1	
$1>\cos\alpha_{k1}$		+1				+1			
$1>\cos\alpha_{k2}$		+1				+1			
$K_{1\min}\leq K_1$		+1				-1		+1	-1
$K_{1\max}\geq K_1$		-1				+1		+1	+1
$K_{2\min}\leq K_2$						-1		+1	+1
$K_{2\max}\geq K_2$						+1		+1	-1
$\varepsilon_S\leq\varepsilon$		+1		+1		-1		+1	
$0\leq\text{ReI}$		+1		+1		+1		-1	
$0\leq\text{ReT}$				+1		± 1			
$0\leq\text{inv}\alpha_h$		+1				+1			
$0\leq\text{ReIC}$		+1		± 1		+1			
$0\leq\text{ReTRC}$		+1				+1			
$0\leq\text{ReTR}$		± 1		+1		+1			
$0\geq\text{ReFI}_2$				$0.5\leq x_1$ and $x_2<x_1$	-1	+1			
				and others	+1				
$0<\text{inv}\alpha_h'$		+1				+1		-1	
$0\geq\text{ReFI}_1$				$0.5\leq x_1$ and $x_2<x_1$	-1	+1			
				and others	+1				
$0<C_2$		$x_2>x_1$	-1	$x_2>x_1$	+1	$x_2>x_c$	-1	-1	
		$x_2\leq x_1$	+1	$x_2\leq x_1$	-1	$x_2\leq x_c$	+1		

+ : Increase, - : Decrease, λ : 1 or 2, Ce : Central value, Ca : Calculated value, Ap : Appointed value

ング, ReFI_2 は内歯車の歯元における隅肉干渉, ReFI_1 はピニオンの歯元における隅肉干渉で, それぞれ干渉条件式の計算値である. α_h は内歯車の切削かみあい圧力角, α_h' はピニオンの切削かみあい圧力角, C_2 は内歯車の歯元における頂隙である. 添字 1, 2 はピニオン, 内歯車を表し, min, max はその範囲の下限値, 上限値を表す. 表中符号は設計変数の増減を表し, 空欄のものはその条件に無関係か影響度の少ないものであり, 複合のものは設計変数の影響が単純では

ないため, 最初任意の方向に変化させ, 前の計算値と比較しながら変化方向を定めていくものである. なお, 目的関数がかみあい率最大化の場合は表中 $\varepsilon_s \leq \varepsilon$, 歯数最小化の場合は $Z_{\max} \geq Z$ の影響指数がそれぞれ用いられる. また中心距離の最大化の場合は $U = +1$, $a = +1$ の影響指数が用いられる.

6. 設計計算例および試作例

上記設計システムを用い多くの設計計算を行った.

Table 2 Example of design computation

[LENGTH : mm, ANGLE : deg, TIME : min]

MAIN INPUT DATA (1)														
No.	Design form (object function)	Fixing of factor	Cutter		a_c	m	i_s	C_n	ε_s	$a_{\min}$	$a_{\max}$	step a	$Z_{\min}$	$Z_{\max}$
			Internal gear	Pinion										
1	General design	Freedom	PC	Hob	20	5	1.2	0.1	1.2	15.0	40.0	1.0	20	60
2	General design	Freedom	PC	Hob	20	2	4.0	0.1	1.2	45.0	55.0	0.5	5	20
3	General design	Fixing	Broach	Hob	20	4	1.5	0.1	1.2	10.0	60.0	1.0	14	14
4	Optimization I(ε)	Freedom	PC	PC	20	2	1.0125	0.1	1.8	2.0	2.2	0.01	80	80
4'	Optimization G(ε)	Freedom	PC	PC	20	2	1.0125	0.1	1.8	2.0	2.2	0.01	80	80
4''	Optimization I(ε)	Freedom	PC	PC	20	2	1.0125	0.1	1.2	2.0	2.2	0.01	80	80
5	Optimization I(ε)	Freedom	PC	PC	20	3	1.02	0.2	2.0	1.0	4.0	0.1	50	50
5'	Optimization G(ε)	Freedom	PC	PC	20	3	1.02	0.2	2.0	1.0	4.0	0.1	50	50
5''	Optimization I(ε)	Freedom	PC	PC	20	3	1.02	0.2	1.2	1.0	4.0	0.1	50	50
6	Optimization I(ε)	Freedom	PC	PC	20	2.5	1.05	0.1	1.2	2.0	2.5	0.01	20	20
6'	Optimization G(ε)	Freedom	PC	PC	20	2.5	1.05	0.1	1.2	2.0	2.5	0.01	20	20
7	Optimization I(ε)	Freedom	Broach	Hob	20	4	1.1	0.1	1.0	4.5	5.1	0.01	10	10
7'	Optimization G(ε)	Freedom	Broach	Hob	20	4	1.1	0.1	1.0	4.5	5.1	0.01	10	10
8	Optimization I(Z)	Freedom	PC	Hob	20	2	1.2	0.1	1.2	10.0	14.0	0.5	30	80
8'	Optimization G(Z)	Freedom	PC	Hob	20	2	1.2	0.1	1.2	10.0	14.0	0.5	30	80
8''	Optimization I(Z)	Freedom	PC	Hob	20	2	1.2	0.1	1.2	10.0	14.0	0.5	30	80
9	Optimization I(a)	Freedom	PC	Hob	20	4	1.5	0.1	1.0	30.0	60.0	0.5	10	80
9'	Optimization G(a)	Freedom	PC	Hob	20	4	1.5	0.1	1.0	30.0	60.0	0.5	10	80
9''	Optimization I(a)	Freedom	PC	Hob	20	4	1.5	0.1	1.0	30.0	60.0	0.5	10	80

MAIN INPUT DATA (2)																
No.	Z _{2min}	Z _{2max}	step Z	U _{min}	U _{max}	step U	u _{1min}	u _{1max}	step u	X _{1min}	X _{1max}	step X	dk _{2min}	dk _{2max}	Z _c	X _c
1	30	90	1	0.0	0.8	0.1	0.0	0.8	0.05	-1.0	1.0	0.2	100	250	20	0.0
2	20	80	1	0.0	1.0	0.1	0.0	1.0	0.05	-1.0	1.0	0.1	0	500	38	0.077
3	21	21	1	0.2	0.2	1.0	0.1	0.1	1.0	-1.0	1.0	0.1	0	210	38	0.2125
4	81	81	1	0.0	0.8	0.05	0.0	0.8	0.025	-1.5	-0.5	0.01	0	500	38	0.077
4'	81	81	1	0.0	0.8	0.05	0.0	0.8	0.025	-1.5	-0.5	0.01	0	500	38	0.077
4''	81	81	1	0.0	0.0	1.0	0.0	0.0	1.0	-1.5	-0.5	0.01	0	500	38	0.077
5	51	51	1	0.0	0.8	0.05	0.0	0.8	0.025	-1.0	0.5	0.01	0	150	25	0.0409
5'	51	51	1	0.0	0.8	0.05	0.0	0.8	0.025	-1.0	0.5	0.01	0	150	25	0.0409
5''	51	51	1	0.0	0.0	1.0	0.0	0.0	1.0	-1.0	0.5	0.01	0	150	25	0.0409
6	21	21	1	0.0	0.8	0.05	0.0	0.8	0.025	-0.1	0.5	0.01	0	500	16	0.0725
6'	21	21	1	0.0	0.8	0.05	0.0	0.8	0.025	-0.1	0.5	0.01	0	500	16	0.0725
7	11	11	1	0.0	1.0	0.05	0.0	1.0	0.025	0.3	0.5	0.01	0	100	38	0.077
7'	11	11	1	0.0	1.0	0.05	0.0	1.0	0.025	0.3	0.5	0.01	0	100	38	0.077
8	36	96	1	-1.0	1.0	0.05	-1.0	1.0	0.1	-1.0	1.0	0.1	0	500	38	0.077
8'	36	96	1	-1.0	1.0	0.05	-1.0	1.0	0.1	-1.0	1.0	0.1	0	500	38	0.077
8''	36	96	1	0.0	0.0	1.0	0.0	0.0	1.0	-1.0	1.0	0.1	0	500	38	0.077
9	40	120	1	-1.0	1.0	0.1	-1.0	1.0	0.05	-1.0	1.0	0.1	100	270	19	0.1169
9'	40	120	1	-1.0	1.0	0.1	-1.0	1.0	0.05	-1.0	1.0	0.1	100	270	19	0.1169
9''	40	120	1	0.0	0.0	1.0	0.0	0.0	0.0	-1.0	1.0	0.1	100	270	19	0.1169

MAIN OUTPUT DATA											DATA FOR SEARCH			
No.	a	Z_1	Z_2	U	u_1	u_2	X_1	X_2	ε	i	dk_2	Total number of search	Search time	Time ratio (1)/(G)
1	25.5	42	50	0.4	0.2	0.2	-0.4	0.838	1.411	1.19	248.38	1 189 881	0.92	average = $\frac{1}{1170}$
2	51.5	18	72	0.3	0.0	0.3	0.1	-0.318	1.283	4.0	138.727		5.85	
3	14.805	14	21	0.2	0.1	0.1	0.6	0.6	1.721	1.5	80.8		0.33	
4	2.19	80	81	0.65	0.225	0.425	-1.04	-0.537	2.101	1.012 5	155.852		14.55	
4'	2.19	80	81	0.65	0.225	0.425	-1.04	-0.537	2.101	1.012 5	155.852	2 626 041	7.374	$\frac{1}{507}$
4''	2.06	80	81	0.0	0.0	0.0	-1.5	-0.275	1.205	1.012 5	156.902		5.32	
5	3.2	50	51	0.55	0.175	0.375	-0.86	-0.27	2.14	1.02	145.38		18.43	
5'	3.2	50	51	0.55	0.175	0.375	-0.86	-0.27	2.14	1.02	145.38		9.876	
5''	2.7	50	51	0.0	0.0	0.0	-1.0	-0.082	1.566	1.02	146.508	1 745 271	3.72	$\frac{1}{2\,277}$
6	2.49	20	21	0.4	0.05	0.35	0.29	0.863	1.344	1.05	51.816		2.1	
6'	2.49	20	21	0.4	0.05	0.35	0.29	0.863	1.344	1.05	51.816		4.782	
7	4.5	10	11	0.65	0.05	0.6	0.42	0.966	1.226	1.1	43.727		10.83	
7'	4.5	10	11	0.65	0.05	0.6	0.42	0.966	1.226	1.1	43.727	1 102 941	3.960	$\frac{1}{366}$
8	10.0	36	43	0.8	0.4	0.4	-0.7	0.94	1.211	1.2	85.76		15.47	
8'	10.0	36	43	0.8	0.4	0.4	-0.7	0.94	1.211	1.2	85.76		6.354	
8''	10.0	43	52	0.0	0.0	0.0	0.3	1.031	1.441	1.21	104.123		2.98	
9	54.5	44	66	1.0	0.5	0.5	-1.0	1.722	1.068	1.5	269.773	78 308 811	3.4	$\frac{1}{12\,782}$
9'	54.5	44	66	1.0	0.5	0.5	-1.0	1.722	1.068	1.5	269.773		43 458	
9''	51.0	45	68	0.0	0.0	0.0	-1.0	0.674	1.296	1.511	269.39		2.18	

I : Influence index number method, G : Grid search method, (ε) : Contact ratio, (Z) : Number of teeth, (a) : Center distance, PC : Pinion cutter

表2に示すものは、その一部で主要な入出力データと設計最適値のデータを表にしたものである。No. 1, No. 2は一般設計における諸元自由の例、No. 3は一般設計で諸元固定の例である。No. 4～No. 7は最適化設計で目的関数がかみあい率最大化の例であり、ハイポサイクロイド減速機⁵⁾に用いられる歯数差1枚の設計を行った例である。No. 8は小形軽量化のための歯数最小化の例、No. 9は中心距離最大化の例である。なお、No. 4'のようにダッシュの付いたものは同じデータを検証のため格子点探索法によって行ったものであり、No. 4''のように2ダッシュの付いたものは同じもので横転位係数のみ零とし、横転位係数を与えた場合との比較を行ったものである。最適設計例は、いずれも表に示すごとく期待通りの値を示し、例えばNo. 4, No. 5のような歯数差1枚の設計例では、かみあい率2以上の設計例が得られており、また従来設計不可能とされてきたNo. 7のような歯数の非常に少ない1枚差のものも設計が可能となり、横転位係数の導入が設計可能領域の拡大とかみあい性能の向上にかなり効果的であることがわかる。

次に表2の設計計算例の幾つかについて実際に試作を行った。この歯車の歯切りは、通常の縦転位を考慮した歯切り後、横転位分カッタを接線方向にずらし、二度の歯切りによって試作される。試作した歯車は期待通り、滑らかにかみあい、この歯車の実用性が確認された。図3は試作した一般転位内歯車 (No. 5) の写真である。

7. 結 言

転位インボリュート内歯車の設計に横転位係数を導入した。その結果、この横転位係数が設計範囲の拡大と、かみあい性能の向上にかなり効果的であることが確認され、また試作によりその実用性も確認された。特に歯数差1枚の設計において、かみあい率2以上の

Fig. 3 Generalized profile shifted internal gear constructed on trial

設計や、小歯数の設計が可能になったのは重要な成果である。

終わりに本研究に対し、その動機を与えていただいた拓殖大学の吉本勇教授、種々御教示をいただいた信州大学の両角宗晴名誉教授、また卒研究生として献身的に研究に協力された田中正広君 (現、ダイハツ工業(株))、渡辺康洋君 (現、ブラザー工業(株)) に感謝の意を表します。

参 考 文 献

- 1) 中田 孝：新版転位歯車，誠文堂新光社，(1962) 153.
- 2) 両角宗晴，八重島公郎：歯数差零の転位インボリュート内歯車に関する研究，信州大学工学部紀要，27 (1969) 157.
- 3) 両角宗晴：遊星歯車と差動歯車の理論と設計計算法，日刊工業新聞社，(1989) 103.
- 4) 八重島公郎：多様性を考慮した転位インボリュート歯車の簡易最適化設計 (第2報)——内歯車，精密機械，51，2 (1985) 400.
- 5) 八重島公郎：最適化設計システムによるハイポサイクロイド減速機用内歯車の極限設計，日本機械学会論文集 (C編)，52，477 (1986) 1601.