偏心円筒部品の断面形状と関連形体の 精度評価に関する研究 (第1報)*

——アルゴリズムの検討とシミュレーション——

塚田 忠夫** 于 大海*** 橋本 裕之†

A Study on Evaluation of Circularity and Related Features
for Eccentric Cam Shaft(1st Report)
—— Development of Algorithm and Its Simulation ——

Tadao TSUKADA, Yu Dahai and Hiroyuki HASHIMOTO

It is demanded to measure the circularities at many sections of a cylindrical part which is largely eccentric like a cam shaft. When a rotating table instrument is used for the measurement of circularity, the eccentric error of specimen should be removed as small as possible to ensure accuracy. In this paper, an algorithm is developed to get circularity from the data of eccentric cylinder by means of the iterative least-square method. In this study, the rotating type instrument is utilized by attaching the wide range digital probe. It is made clear that the main factor reducing the data accuracy is difference between the rotating table center and the sensing direction of digital probe.

Key words: cylindrical part, circularity, eccentricity, cam shaft, eccentric shaft, least square method, measurement

1. 結 言

円形断面部品は機械部品として広く用いられており、半径法や三点法などによる真円度測定に関する研究が多く報告されてきている^{1)~5)}。半径法によって得られたデータは、規格による最小領域法真円度を求めるために最適化技法により処理されたり⁶⁾、最小二乗法による真円度(最小二乗真円度と呼ぶ)のために線形近似計算により処理され、偏心補正されている。一般には、最小領域法と最小二乗法による真円度に大きな差がないことと計算が単純であることから、最小二乗真円度が用いられる傾向にある。しかしながら、最小二乗真円度は、試料の偏心が小さいことが前提となっているために、回転テーブル形真円度測定機では、できる限

り試料の中心をテーブルの回転中心に一致させることが必要となる。

図1は差動歯車減速機などの偏心カム軸であるが、減速機の精度向上のために、真円度と軸の偏心量(軸として見た場合、軸心の平行度も含む)及びその方向の精度を上げることが要求される。ここで、後者の2つが関連形体と呼ばれるものである⁷⁾。この場合、偏心が大きい円筒部品の断面形状測定データに対して、偏心補正の手段があれば、図1のような偏心カム軸をセンタリングの操作なしに、真円度 C_R や偏心量 e 、偏心

Fig.1 An example of eccentric cam shaft

* 原稿受付 平成4年5月1日

** 正 会 員 東京工業大学工学部(東京都目黒区大岡山2-12-1)

*** 学生会員 東京工業大学大学院

† 正 会 員 帝人製機(株)(津市片田町荅町田594)

Fig.2 Effect of eccentricity e on least square circularity by a traditional method

Fig.3 Measuring instrument

の方向 ξ (本報では偏心方位と呼ぶ) の把握が可能となる。

本報では、大きく偏心した円筒試料の断面形状の測定データから、最小二乗法による真円度、偏心量とその方位が求められるかどうかをシミュレーションによって検討する。

なお、本報でいう大きな偏心とは、従来よく用いられてきた後述する式(11)の線形近似のみでは、十分な精度の最小二乗真円度が得られなくなる状態を意味する。図2は半径 R の真円をシミュレーションデータとして用いたときの式(11)による偏心量 e と最小二乗真円度 C_R の関係を R により無次元化して表したものである。例えば、 $R=15\text{mm}$ で真円度を $0.1\mu\text{m}$ 程度の精度で得ようとするれば、 $e \leq 20\mu\text{m}$ にする必要があるが、大きな偏心とはこの例で $e > 20\mu\text{m}$ の領域を指し、本研究では $1 \sim 2\text{mm}$ までである。

2. 評価精度の低下因子

図3は、本研究で使用した汎用の半径法真円度測定機の原理である。試料表面の形状偏差は測定レンジの

Fig.4 Measuring coordinates

Fig.5 Errors of probe orientation

大きいデジタルプローブにより検出し、テーブルの回転軸に取り付けられたロータリエンコーダの出力パルスによりサンプリングする。

測定データ r_i は、図4のようにテーブル回転中心と先端半径 r_F のプローブの原点との距離 R を半径とする円からの偏差として得られる(記号 R はデータ処理プロセスにおいて、後述の式(16)により試料半径に置き代わる)。このとき、プローブはテーブル回転軸に垂直になっている必要があるが、図5に示すように実際には垂直面上で ϕ 、水平面上で ψ の取り付け誤差(オフセット誤差と呼ぶ)が生ずる。 ϕ はプローブの出力に対して $1/\cos \phi$ 倍の影響を与えるが、 ϕ が小さいと

考えれば $1/\cos \phi \approx 1$ とみなして差し支えない。一方、 ψ の影響については後述するように無視することはない。

このように考えたときの測定データの幾何学的関係は図4のようになる。プローブのオフセット角 ψ は、テーブル回転角を θ_1 、 ψ によるオフセット誤差 h 、 R の円より外側のデータを正、内側を負とすれば（図4では $r_1 < 0$ である）、図の記号を用いて、

$$\begin{aligned} \sin \psi &= h / (R + r_F) \\ \tan \psi_1^* &= h / \{ (R + r_F) \cos \psi + r_1 \} \\ \delta \theta_1 &= \psi_1^* - \psi, \quad \theta_1^* = \delta \theta_1 + \theta_1 \end{aligned} \quad (1)$$

プローブのオフセット誤差 h が把握されていれば、最小二乗円の半径を R' 、最小二乗円からのデータの偏差を r_1' 、最小二乗円の偏心率と方向を e, β とおいて、

$$\begin{aligned} (R' + r_1' + r_F)^2 &= (R + r_F + r_1 \cos \psi_1^* - R_1^*)^2 + e^2 \\ &\quad - 2e(R + r_F + r_1 \cos \psi_1^* - R_1^*) \cos(\theta_1^* - \beta) \\ R_1^* &= (R + r_F)(1 - \cos \delta \theta_1) \end{aligned} \quad (2)$$

が得られる。したがって、

$$\begin{aligned} r_1' &= \{ (R + r_F + r_1 \cos \psi_1^* - R_1^*)^2 + e^2 \\ &\quad - 2e(R + r_F + r_1 \cos \psi_1^* - R_1^*) \cos(\theta_1^* - \beta) \}^{1/2} \\ &\quad - (R' + r_F) \end{aligned} \quad (3)$$

ここで、 $R_1^* \doteq 0$ 、 $\psi_1^* = \psi$ 、 $R = R'$ 、 $\theta_1^* \doteq \theta_1$ と近似して、真円度評価の精度低下の因子を誤差伝播の法則から検討する。まず、

$$\begin{aligned} C &= \{ (R + r_F + r_1 \cos \psi_1^* - R_1^*)^2 + e^2 \\ &\quad - 2e(R + r_F + r_1 \cos \psi_1^* - R_1^*) \cos(\theta_1^* - \beta) \}^{1/2} \\ &\doteq \{ (R + r_F + r_1)^2 + e^2 \\ &\quad - 2e(R + r_F + r_1) \cos(\theta_1 - \beta) \}^{1/2} \end{aligned} \quad (4)$$

とおく。 r_1' に及ぼす R の誤差 ΔR の影響 $E_r(R)$ は、

$$\begin{aligned} E_r(R) &\leq |(\partial r_1' / \partial R) \Delta R| \doteq | \{ (R + r_F + r_1) \\ &\quad - e \cos(\theta_1 - \beta) \} \Delta R / C - \Delta R | \end{aligned} \quad (5)$$

ψ または h は、式(1)においてデータの測定位置の誤差 $\delta \theta_1$ に影響し、 r_1' の誤差の原因となる。式(1)から、

$$\begin{aligned} \delta \theta_1 &\doteq h / (R + r_F) - h / \{ (R + r_F) \cos \psi + r_1 \} \\ &\doteq r_1 h / \{ (R + r_F + r_1)(R + r_F) \} \end{aligned} \quad (6)$$

のように近似できる。 ψ による誤差 $E_r(\psi)$ は

$$\begin{aligned} E_r(\psi) &\leq |(\partial r_1' / \partial \theta_1) \delta \theta_1| \\ &\doteq |e(R + r_F + r_1) \sin(\theta_1 - \beta) \delta \theta_1 / C| \end{aligned} \quad (7)$$

となる。 θ_1 の誤差による影響 $E_r(\theta)$ は、ロータリエンコーダの検出誤差を $\Delta \theta$ とおいて、

$$\begin{aligned} E_r(\theta) &\leq |(\partial r_1' / \partial \theta_1) \Delta \theta_1| \\ &\doteq |e(R + r_F + r_1) \sin(\theta_1 - \beta) \Delta \theta_1 / C| \end{aligned} \quad (8)$$

プローブ先端半径の誤差 Δr_F 及びデジタルプローブの検出誤差 Δr_1 による影響 $E_r(r_F)$ 、 $E_r(r_1)$ は

$$\begin{aligned} E_r(r_F) &\leq |(\partial r_1' / \partial r_F) \Delta r_F| = |\Delta r_F| \\ E_r(r_1) &\leq |(\partial r_1' / \partial r_1) \Delta r_1| = |\Delta r_F| \\ &\doteq | \{ (R + r_F + r_1) - e \cos(\theta_1 - \beta) \} \Delta r_1 / C | \end{aligned} \quad (9)$$

誤差計算の条件として、 $R=15\text{mm}$ 、 $e=1\text{mm}$ 、 $\beta=0$ 、 $h=0.3\text{mm}$ ($\psi \doteq 0.02\text{rad}$ に相当)、 $\Delta R=10\mu\text{m}$ 、 $\Delta \theta_1=0.00025\text{rad}$ 、 θ_1 : 各誤差を最大にする値、 $\Delta r_F=0.2\mu\text{m}$ 、 $r_F=1.9\text{mm}$ 、 $r_1=1\text{mm}$ 、 $\Delta r_1=0.2\mu\text{m}$ を考える。この条件におけるデータ r_1 の誤差に及ぼす各因子の影響は

$$\begin{aligned} E_r(R) &= 0.02\mu\text{m}, \quad E_r(\psi) = 1.03\mu\text{m}, \quad E_r(r_F) = 0.2\mu\text{m}, \\ E_r(\theta) &= 0.25\mu\text{m}, \quad E_r(r_1) = 0.2\mu\text{m}, \\ E_r(\text{total}) &= E_r(R) + \dots + E_r(r_1) = 1.7\mu\text{m} \end{aligned} \quad (10)$$

となる。この結果から、 $E_r(\psi)$ が大きな誤差要因となっている。ただし、 Δr_F は、公称真球度を用いたが、式(9)のように誤差に直接影響するので、 r_F は正確に把握することが必要である。

3. 偏心補正のアルゴリズム

3.1 最小二乗法による偏心除去アルゴリズム

テーブル回転中心に対する試料中心の偏心除去と真円の当てはめは最小二乗法により行うことにする。上述したように、真円度に及ぼすオフセット角 ψ の影響が大きいため、式(3)に従ってデータを処理することが必要であるが、最小二乗法の計算を単純にするために、図4の幾何学的関係から次の線形近似を行う。

$$\begin{aligned} R + r_1 + r_F &\doteq (R' + r_F + r_1') + e \cos(\theta_1^* - \beta) \\ r_1' &\doteq (R + r_F + r_1) - (R' + r_F) - e \cos(\theta_1^* - \beta) \\ &= r_1 - \Delta R - a \cos \theta_1^* - b \sin \theta_1^* \\ \Delta R &= (R' + r_F) - (R + r_F) = R' - R \end{aligned} \quad (11)$$

最小二乗法による e の X, Y 方向成分 a, b 、増分 ΔR は

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ \Delta R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix} \quad (12)$$

を解くことにより得られる。ここで、 $A_{11} = \Sigma \cos^2 \theta_1^*$ 、

$$\begin{aligned} A_{12}=A_{21} &= \Sigma \sin \theta_1^* \cos \theta_1^*, & A_{13}=A_{31} &= \Sigma \cos \theta_1^*, \\ A_{22} &= \Sigma \sin^2 \theta_1^*, & A_{23}=A_{32} &= \Sigma \sin \theta_1^*, & A_{33} &= \Sigma 1, \\ B_1 &= \Sigma r_1 \cos \theta_1^*, & B_2 &= \Sigma r_1 \sin \theta_1^*, & B_3 &= \Sigma r_1 \end{aligned}$$

以上の計算では、式(11)の線形近似による誤差が発生する。そのために図4の中心0の座標から0'の座標に正確に変換する必要がある。正確な座標変換は、

$$R' = R + \Delta R \quad (13)$$

と式(3)を用いて

$$\begin{aligned} r_1' &= \{(R+r_p+r_1 \cos \psi_1^*-R_1^*)^2 + e^2 - 2c(R+r_p \\ &\quad + r_1 \cos \psi_1^*-R_1^*)(a \cos \theta_1^* + b \sin \theta_1^*)\}^{1/2} \\ &\quad - (R' + r_p) \end{aligned} \quad (14)$$

さらに、

$$\begin{aligned} \sin \theta_1' &= \{(R+r_p+r_1 \cos \psi_1^*-R_1^*) \sin \theta_1^* - b\} \\ &\quad / (R' + r_1' + r_p) \\ \cos \theta_1' &= \{(R+r_p+r_1 \cos \psi_1^*-R_1^*) \cos \theta_1^* - a\} \\ &\quad / (R' + r_1' + r_p) \\ e &= (a^2 + b^2)^{1/2} \end{aligned} \quad (15)$$

この段階では、解に十分近づいているという保証はないので、次の繰返し計算を行う。

3.2 繰返し計算過程

式(12)~(15)の結果を次のように置き換える。

$$\psi_1^* = 0, \quad R_1^* = 0, \quad R' \rightarrow R, \quad r_1' \rightarrow r_1, \quad \theta_1' \rightarrow \theta_1^* \quad (16)$$

この後、式(12)~(15)の計算を繰返し、補正量 a , b , ΔR が次のクライテリオン ε_e , ε_R 以下になったときに計算を打ち切る。

$$e \leq \varepsilon_e, \quad \Delta R \leq \varepsilon_R \quad (17)$$

k 回目の繰返し計算での a , b を a_k , b_k 、偏心量を $e_k = (a_k^2 + b_k^2)^{1/2}$ 、半径の補正量を ΔR_k とおけば、 k 回目までの偏心量 e_T と半径の補正量 ΔR_T は

$$e_T = \{(\Sigma a_k)^2 + (\Sigma b_k)^2\}^{1/2}, \quad \Delta R_T = \Sigma \Delta R_k \quad (18)$$

真円のシミュレーションデータでは、1回の計算で収束してしまうために、真円に正弦波状の誤差 $0.5 \sin(\theta_1/2) \mu\text{m}$ を重畳したデータを用い、補正量 e_k , ΔR_k と e_T , ΔR_T の関係を図6に示す。 e_k , ΔR_k は真値とみなせるもので、式(17)の e , ΔR が計算上十分小さくなったとき(図6ではいずれも 10^{-15}mm 以下)の値とした。図6では、1回の計算で十分過ぎる値が得られているが、 $|e_T - e_k|$, $|\Delta R_T - \Delta R_k|$ は補正量 e_k , ΔR_k のオーダーの数値

Fig.6 Transition of iterative computation

が補正されて補正量のオーダー以下になるので²⁾, $|e_T - e_k|$, $|\Delta R_T - \Delta R_k|$ が $0.1 \mu\text{m}$ 以下でよいとすれば、 ε_e , ε_R は約 $0.1 \mu\text{m}$ で十分といえる。

3.3 R の推定

本研究の方法では図4の R が必要となるが、汎用の真円度測定機は、一般には R は未知である。そのために、次のような工夫をする。すなわち、試料半径の測定値を R_M とすれば、データ数を N とおいて、

$$R = R_M - \Sigma r_i / N \quad (19)$$

式(10)から R の精度は $10 \mu\text{m}$ でも十分と考えられるので、 R_M はマイクロメータなどによる測定でよいといえる。しかし、テーブルの回転中心からプローブの読みの原点までの距離を正確に知りたい場合には、半径 R_M と R' との差 ΔR_M を補正して計算し直す。すなわち、

$$\Delta R_M = R_M - R' \quad (20)$$

とおき、 $R + \Delta R_M$ を R に置き換えて最初から計算を繰返し、 ΔR_M が十分小さいと見なされたときに計算を打ち切る。 $\phi 12.7$ のマスタボールを想定し、式(19)の R に 0.1mm の誤差を与え、 $R = 12 \text{mm}$, $e = 0 \sim 1 \text{mm}$ のシミュレーションデータを用いた場合、1回の計算で式(20)の ΔR_M は、十分過ぎる値である $0.4 \mu\text{m}$ 以下になった。

4. プローブオフセット誤差の影響

4.1 オフセット誤差の真円度及び円筒断面形状測定に及ぼす影響

測定値の精度低下の大きな原因となるオフセット誤差 h を把握することは難しい。そのために、繰返し最小

Fig.7 Effect of h on circularity in $r_f=1.9\text{mm}$

Fig.8 Effect of h on cylinder form in $R=15\text{mm}$, $e=0.35\text{mm}$ and $\beta=90^\circ$

二乗法における正確な座標変換式(14)では、式(1)で $h=0$ として処理せざるを得なくさる。図7は真円であり $h \neq 0$ であるシュミレーションデータを $h=0$ として処理した最小二乗真円度 C_R の結果である。ただし、アルゴリズムにプローブ先端半径 r_f が含まれているために、図2のように R による無次元化はできない。

Table 1 Effect of h on eccentricity and its orientation

Conditions		Given data		Results	
R mm	h mm	e mm	β °	Δe μm	$\Delta \beta$ °
10	0.2	0.1	45	0.01	0.009
10	0.2	0.5	90	0.07	0.004
10	0.2	1.0	180	0.10	0.080

図7から分かるように、偏心が小さいときは、オフセット誤差 h の真円度に及ぼす影響は無視できる。一方、オフセットの誤差は、 R が小さいほど大きくなる。真円度評価に必要な精度が設定されれば、許容されるオフセット誤差を決めることが出来る。例えば、偏心量 1mm 、円筒半径 15mm のとき、真円度の評価精度を $0.1\mu\text{m}$ 以内とすれば、 $h \leq 0.025\text{mm}$ にする必要がある。

図8は、真円をシュミレーションデータとし、繰返し最小二乗法によって得た形状である。図4から分かるように、 h によって $\delta\theta_1$ が生じ、 $(\theta_1 + \delta\theta_1)$ の位置にあるべき r_1' を θ_1 の位置の値とするために、 h による r_1' の誤差が発生して断面形状がひずんでくる。この形状のひずみは、 θ_1 に対する r_1' の変化量が大きいほど大きくなる。式(3)において、偏心した真円のデータを近似的に $r_1 = e \cos(\theta_1 - \beta)$ とおき、誤差伝播の法則を利用したときと同様の近似を行えば、 θ_1 に対する r_1' の変化量は

$$\partial r_1' / \partial \theta_1 \doteq e^2 \sin(\theta_1 - \beta) \cos(\theta_1 - \beta) / C \quad (21)$$

となる。最も変化量が大きくなる位置は、 $2(\theta_1 - \beta) = (n - 1/2)\pi$, $n=1, 2, 3, 4$ である。 $\beta=0$ とした図8において $\theta_1 = \pi/4$, $5\pi/4$ の位置で内側にひずみ、 $\theta_1 = 3\pi/4$, $7\pi/4$ の位置で内側にひずんで全体として楕円形になっているのは、以上の原因によるものと考えられる。

なお、図8においてオフセット誤差が分かっていたら、計算上、式(12)～(16)によってその影響を取り除くことが可能である。

4.2 偏心量、偏心方位測定に及ぼすオフセット誤差の影響

式(14)において、 β を偏心の方位（方向）とみなし、真円筒のシュミレーションデータを用いて、前述の打ち切り条件により求めた h の補正を行わない場合の結果を表1に示す。 Δe , $\Delta \beta$ は与えた e , β と計算結果の差である。 h を補正したときは、 $e \leq 10^{-7}\text{mm}$, $\Delta \beta \leq 10^{-6}\text{deg}$ となった。 h の補正を行わない場合でも、偏心量と偏心方位は非常に正確に得られることが分かる。これは、式(21)で検討したように、 h によりひずんだ形状

Fig.9 Iterative process to get h

は軸対称となるために、輪郭形状と直接関係しない偏心量と偏心方位は h の影響をほとんど受けなかったと考えられる。

4.3 プローブのオフセット誤差の把握

ここでは、プローブのオフセット誤差 h をマスターボールのような高精度試料の測定データから推定する方法について検討する。式(14)による最小二乗円からの偏差 r_1' に関する目的関数を $G(h)$ とおき、

$$G(h) = \sum (r_1')^2 \quad (22)$$

この $G(h)$ が最小になったときの h を解とし、次の一変数最適化技法であるPowell法により解くことにする。まず、任意の h_1, h_2, h_3 に対して、 $G_1 = G(h_1), G_2 = G(h_2), G_3 = G(h_3)$ とおくと

$$h_1 < h_2 < h_3, \quad G_1 \geq G_2 \geq G_3 \quad (23)$$

の条件を探し出せば、 h_1 と h_3 の間に解が存在する。次に、3点の座標 $(h_1, G_1), (h_2, G_2), (h_3, G_3)$ を通る二次関数が最小となる h の値 h_m を求める。

$$h_m = \frac{\{(h_2^2 - h_3^2)G_1 + (h_3^2 - h_1^2)G_2 + (h_1^2 - h_2^2)G_3\}}{[2\{(h_2 - h_3)G_1 + (h_3 - h_1)G_2 + (h_1 - h_2)G_3\}]} \quad (24)$$

h_1, h_2, h_3 のうち最小の目的関数を与える点と h_m との距離 Δh が要求精度以内であれば解とする。図9は、真円を対象とし、半径 $R=15\text{mm}$ 、偏心量 $e=1\text{mm}$ 、オフセット誤差 $h_t=0.35\text{mm}$ をシミュレーション条件とした結果であり、 h は計算結果である。式(23)の条件を探すまでのプロセスにおける Δh は、前の探索点からの h の増分と

した。図9から分かるように、式(24)に従うプロセスに入ると急速に解に収束する。図6の場合と同様の判断で、 $|h-h_t| \leq 1\mu\text{m}$ でよいとすれば、 $\Delta h \leq 1\mu\text{m}$ で計算を打ち切れば十分である。

5. 結 言

本報で定義した偏心円筒試料の真円度、偏心量、偏心方位などが、回転テーブル形真円度測定機により測定し評価することの可能性をシミュレーションによって検討した本研究の主な結論は次のとおりである。

- (1) 最小二乗法により、測定データに真円を当てはめて偏心を除き、座標変換を正確に行う繰返し最小二乗法は、大きく偏心している軸の形状評価に有効である。
- (2) 大きく偏心している試料の測定では、テーブル回転軸に対するプローブの変位方向の不一致(本研究ではオフセット誤差と呼ぶ)が、データの精度に大きく影響することを明らかにした。
- (3) オフセット誤差を補正するアルゴリズムを提案した。
- (4) プローブオフセット誤差は、偏心軸の断面形状に大きく影響を及ぼすが、偏心量や偏心方位への影響は非常に小さい。
- (5) プローブオフセット誤差を高精度な試料を対象とする測定データから推定する手法を提案した。

最後に、本研究は、平成2年度文部省科学研究費補助金(試験研究(2)63850035)を受けて行われたことを付記する。

参 考 文 献

- 1) H.S.Shunmugam: Comparison of Linear and Normal Deviation of Forms of Engineering Surfaces, Prec.Eng., 9, 2(1987)96.
- 2) 塚田忠夫, 劉 書桂, 笹島和幸, 金田 徹: 円錐テーパー部品の形状誤差評価法, 精密機械, 53, 5(1987)802.
- 3) B.Sastra and G.M.Dohmen: High-precision Numerically Controlled Measuring System for Cylindrical Surfaces, Prec.Eng., 6, 1(1984)12.
- 4) T.S.Murthy: A Comparison of Different Algorithms for Circularity Evaluation, Prec.Engng., 8, 1(1986)19.
- 5) 下河辺 明ほか: 最小領域法による形状精度の評価, 精密機械, 50, 4(1984)697.
- 6) 塚田忠夫, 金田 徹, 奥田謙造: 最適化技法を用いた最小領域真円度の評価法, 精密機械, 49, 10(1983)1351.
- 7) ISO 1101-1983: Technical Drawings-Geometrical Tolerancing.