モータ代数とグラフ理論による機構の 記述と解析 (第2報)*

——拘束行列による速度解析の高速化——

城 道 介**

Representations and Analysis of Mechanisms by Means of
Motor Algebra and Graph Theory (2nd Report)
—Speedup of Velocity Analysis by Constraints Matrix—

Michisuke Jo

A high-speed algorithm for the velocity analysis of mechanisms is established in terms of constraints matrix derived from pair-axis-motors and circuit matrix. The constraints matrix of a mechanism with single or multiple closed loops becomes a symmetric matrix whose order is equal to the number of pair-axes in the mechanism. The magnitude ratios of relative velocities at all pairs are determined by the system of homogeneous linear equations with constraints matrix as the coefficient matrix. A FORTRAN program based on this algorithm is created for simulating the motion of deterministic mechanisms. The program was also applied to solve inverse kinematics problem of robot to confirm the computational rate and accuracy of the algorithm.

Key words: motor algebra, screw coordinates, graph theory, pair axis motor, circuit matrix, constraints matrix, simulation of mechanisms, inverse kinematics problem of robot

1. はじめに

前報¹⁾では、機構のペア軸モータと閉路行列からベアルーブ行列を定義し、それを用いて閉ループ空間機構の速度解析の簡明なアルゴリズムを示した。

本報では、新たに定義した「拘束行列」による、速度解析の高速化アルゴリズムについて報告する。

なお、以下の記述ではとくに断らない限り、モータを英大文字、3次元ベクトルを英小文字、スカラをギリシア小文字で表す。また、列ベクトルを $\{\omega\}$ 、行ベクトルを $\langle V \rangle$ 、行列を $[S]$ のように括弧を用いて表す。

2. ペアルーブ行列

2.1 ペアモータ行列

3次元ベクトルの拡張形式であるモータ (motor)²⁾を用いれば、機構を構成するペア軸およびリンクの速度を完全かつ一意に記述できる。モータは、ライン (line vector)、カプル (couple)、スクリュウ (screw)、

ゼロ (zero) の4種類に分類され、各々に回転、直進、らせん、静止の4種のペア軸もしくは瞬間運動 (速度) が対応する。

点 r を通る単位方向ベクトル m の回転ペア軸は、つぎのラインにより記述される。

$$L = m + \varepsilon(r \times m) \quad (1)$$

ここで、 ε は、微数単位と呼ばれ、

$$\varepsilon^2 = \varepsilon^3 = \dots = 0 \quad (2)$$

という性質を有する。

単位ベクトル m_0 方向に並進可能な直進ペアはつぎのカプルにより表される。

$$C = O + \varepsilon m_0 \quad (3)$$

式 (1) の軸に沿って1回転 (2π) 当たり λ のピッチを有するらせんペアは、つぎのスクリュウにより表される。

$$S = m + \varepsilon \left(r \times m + \frac{\lambda}{2\pi} m \right) \quad (4)$$

モータはこのように、二つの3次元ベクトル (実数部と微数部) を微数単位 ε で結合した数学的形式であるが、後述する速度解析プログラム中では、6次元ベクトルとして記述する。

* 原稿受付 平成3年9月20日

** 正会員 茨城大学工学部 (日立市中成沢町 4-12-1)

Fig. 1 Link-pair graph of quick return mechanism

j_x 個のリンクが閉ループをなすように、 j_x 個のペア軸で接続されているとする。リンク $j-1$ とリンク j のペア軸モータを M_j 、相対角速度もしくは相対速度の大きさを ω_j とするとき、相対速度モータは、

$$U_j = \omega_j M_j \quad (5)$$

となる。ただし、ペア軸 1 はリンク j_x とリンク 1 とを接続しているとする。リンク j_x を静止節とすると、リンク j の絶対速度モータ V_j は次式で求められる。

$$V_j = \sum_{i=1}^j U_i = \sum_{i=1}^j \omega_i M_i \quad (6)$$

すなわち、速度の重ね合わせには速度モータの加算が対応する。ループに沿ってすべての相対速度モータを加えると、静止節 j_x の速度、つまりゼロとなるから次式が成り立つ。

$$\sum_{i=1}^{j_x} \omega_i M_i = 0 \quad (7)$$

ここで各ペア軸モータを 6 次元列ベクトルで表し、それを横に並べた 6 行 j_x 列の行列を $\{[M]_j\}$ 、角速度を j_x 個並べた列ベクトルを $\{\omega_j\}$ 、6 次元ゼロベクトルを $\{0\}$ と表せば、式 (7) から次式が得られる。

$$\{[M]_j\} \{\omega_j\} = \{0\} \quad (8)$$

これは、単一ループ機構の閉ループ方程式である。 $\{[M]_j\}$ をペアモータ行列と呼ぶ。

2.2 部品接続グラフ

図 1 に早戻り機構の部品接続グラフを示す。リンクを頂点に、ペアを辺に対応させた単連結有向グラフである。図 2 にこのグラフから導かれる木 [Trj]、接続行列 [D]、閉路行列 [C]、リンク ⑥ を基準頂点としたときの頂点行列 [D*]、木道行列 [H] を示す。これらの行列においては、各列がペアに対応する。また、[D]、[D*]、[H] では各行が一つのリンク（頂点）に、[C] では各行が一つの閉路に対応している。以後、閉路行列 [C] の要素を c_{kj} と表すことにする。 c_{kj} の値は、 k 番目の閉路にペア j が正の向きに含まれるとき +1、逆向きに含まれるとき -1 とする。

$$\begin{aligned} [D] : \text{Incidence matrix} & \quad \langle \text{Trj} \rangle : \text{Tree} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \quad \langle 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \rangle \\ [C] : \text{Circuit matrix} & \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} & \\ [D^*] : \text{Vertex matrix} & \quad [H] : \text{Tree-path matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Fig. 2 Matrix derived from link-pair graph

$$\begin{aligned} \{[M]_j\} &= [\{M_1\} \{M_2\} \{M_3\} \{M_4\} \{M_5\} \{M_6\} \{M_7\}] \\ &= \begin{bmatrix} 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 3.0 & 5.0 & 0.0 & 5.0 & 8.0 & 1.0 \\ 0.0 & 0.0 & -8.0 & -7.0 & -8.0 & -2.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$[C] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} [S^*] &= \begin{bmatrix} M_1 & -M_2 & M_3 & -M_4 & 0 & 0 & 0 \\ M_1 & -M_2 & 0 & -M_4 & 0 & M_5 & M_7 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 1.0 & -1.0 & 1.0 & -1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & -3.0 & 5.0 & 0.0 & 5.0 & 8.0 & 1.0 \\ 0.0 & 0.0 & -8.0 & -7.0 & -8.0 & -2.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 1.0 & -1.0 & 0.0 & 0.0 & -1.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & -3.0 & 0.0 & 0.0 & -5.0 & 8.0 & 1.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 8.0 & -2.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Fig. 3 Pair loop matrix

2.3 ペアループ方程式

一つの機構の部品接続グラフに含まれる独立閉路の数を k_x とする。 $k_x > 1$ の複合ループ機構では、各閉路について式 (7)、(8) で示した関係が成り立たなければならない。

$$\sum_{j=1}^{k_x} \omega_j C_{kj} M_j = 0, \quad (k=1 \sim k_x) \quad (7')$$

$$[C_{kj} \{M\}_j] \{\omega_j\} = \{0\}, \quad (k=1 \sim k_x) \quad (8')$$

(8)' は、未知数ベクトル $\{\omega_j\}$ に関する k_x 個の閉ループ方程式である。これを一つの方程式にまとめるため、閉路行列 [C] とペアモータ行列 $\{[M]_j\}$ から $6k_x$ 行 j_x 列の行列 $[S^*]$ をつぎのように定義する。

$$[S^*] = \begin{bmatrix} C_{11} \{M\}_1 & C_{12} \{M\}_2 & \cdots & C_{1j_x} \{M\}_{j_x} \\ C_{21} \{M\}_1 & C_{22} \{M\}_2 & \cdots & C_{2j_x} \{M\}_{j_x} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ C_{k_x 1} \{M\}_1 & C_{k_x 2} \{M\}_2 & \cdots & C_{k_x j_x} \{M\}_{j_x} \end{bmatrix} \quad (9)$$

$[S^*]$ をペアループ行列と呼ぶ。ペアループ行列を用いれば、式 (8)' からつぎの一つの方程式が得られる。

$$[S^*] \{\omega_j\} = \{0\}^* \quad (10)$$

ここで、右辺の $\{0\}^*$ は、 $6k_x$ 次元のゼロベクトルである。式 (10) をペアループ方程式と呼ぶ。図 3 に図 1

の機構のペアモータ行列とベアループ行列を示す。

3. 拘束行列

前報では、(10)の連立一次方程式を共役傾斜法で解いて角速度 $\{\omega_j\}$ を求め、各ペア軸および各リンク座標系の微動を繰り返す速度解析システムを開発した。しかし、係数行列 $[S^*]$ が $6k_x$ 行という縦長の長方形行列で、しかも $c_{kj}=0$ に対応する要素がゼロとなる粗行列のため、独立閉路数 k_x が多くなるほど演算効率が悪くなり、満足の行く計算速度が得られなかった。

そこで、以下の考察を行った。

式(10)の両辺に左側からベアループ行列の転置行列(j_x 行 $6k_x$ 列)を掛ける。

$$[S^*]^T [S^*] \{\omega_j\} = [S^*]^T \{0\}^* \quad (11)$$

左辺の係数行列を記号 $[CM]$ で表す。

$$[CM] = [S^*]^T [S^*] \quad (12)$$

$[CM]$ は、 j_x 行 j_x 列の対称行列になり、また式(11)の右辺は j_x 次元のゼロベクトルとなって次式が得られる。

$$[CM] \{\omega_j\} = \{0\} \quad (13)$$

方程式(13)は、(10)と等価であり、これを閉ループ機構の拘束方程式 (constraint equation)、また行列 $[CM]$ を拘束行列 (constraint matrix) と呼ぶことにする。

$[CM]$ は、式(11)のように $[S^*]$ を介さずに、以下の手順で求めることができる。

拘束行列 $[CM]$ の i 行 j 列要素を σ_{ij} とすると、式(12)および(10)から、

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \sum_{k=1}^{k_x} c_{ki} c_{kj} \{M\}_i^T \{M\}_j \\ &= \sum_{k=1}^{k_x} c_{ki} c_{kj} (M_i \cdot M_j) \end{aligned} \quad (14)$$

となる。ここで、 $M_i \cdot M_j$ は、ペア i, j の軸モータを6次元ベクトルとみなしたときのスカラー積である。右辺をつぎの二つの変数に分離する。

$$\gamma_{ij} = \sum_{k=1}^{k_x} c_{ki} c_{kj} \quad (15)$$

$$\mu_{ij} = M_i \cdot M_j \quad (16)$$

γ_{ij}, μ_{ij} は、それぞれ閉路行列、ベアモータ行列のみから算出される正方行列(j_x 次の対称行列)の要素として求めることができる。

$$[\gamma_{ij}] = [C]^T [C] \quad (17)$$

$$[\mu_{ij}] = [\{M\}_j]^T [\{M\}_j] \quad (18)$$

$$\sigma_{ij} = \gamma_{ij} \mu_{ij} \quad (19)$$

二つの $m \times n$ 行列の対応要素の積を要素とする行

$$[C]^T [C] = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$[\{M\}_j]^T [\{M\}_j] = \begin{bmatrix} 1. & 1. & 1. & 1. & 1. & 1. & 0. \\ 1. & 10. & 16. & 1. & 16. & 25. & 3. \\ 1. & 16. & 90. & 57. & 90. & 57. & 5. \\ 1. & 1. & 57. & 50. & 57. & 15. & 0. \\ 1. & 16. & 90. & 57. & 90. & 57. & 5. \\ 1. & 25. & 57. & 15. & 57. & 69. & 8. \\ 0. & 3. & 5. & 0. & 5. & 8. & 1. \end{bmatrix}$$

$$[CM] = \begin{bmatrix} 2. & -2. & 1. & -1. & -1. & 1. & 0. \\ -2. & 20. & -16. & 1. & 16. & -25. & -3. \\ 1. & -16. & 90. & -57. & 0. & 0. & 0. \\ -1. & 1. & -57. & 50. & 0. & 0. & 0. \\ -1. & 16. & 0. & 0. & 90. & -57. & -5. \\ 1. & -25. & 0. & 0. & -57. & 69. & 8. \\ 0. & -3. & 0. & 0. & -5. & 8. & 1. \end{bmatrix}$$

Fig. 4 Constraint matrix

列をつくるアダマール積を演算記号 $*$ で表せば、上記(17), (18), (19)の手順は次式にまとめられる。

$$[CM] = ([C]^T [C]) * ([\{M\}_j]^T [\{M\}_j]) \quad (20)$$

図4に図1の早戻り機構の拘束行列を示す。

4. 速度解析の高速化

前報で報告した決定機構の速度解析システム“Motor-Drive”は、ベアループ方程式に基づくものであった。今回は、これを拘束方程式に置き換えて、運動シミュレーションの高速化を達成した。図5にMotor-Drive改訂版の計算手順を示す。

4.1 入力データ

入力データは、旧版と同様、リンクとベアの接続関係、初期モータ軸、初期形状(ワイヤフレーム)を定義する点と線分、静止リンク番号、駆動ペア番号、駆動軸の角変位と微動角度および透視座標情報である。

4.2 計算手順

1) グラフ行列の作成

リンクとベアの接続関係から、静止リンクを基準頂点とする木 $\langle Trj \rangle$ を作り、それをもとに接続行列 $[D]$ 、頂点行列 $[D^*]$ 、閉路行列 $[C]$ 、木道行列 $[H]$ を作成する。そして式(17)により拘束行列算出のための係数行列 $[\gamma_{ij}]$ を求める。

これらの行列は、リンクとベアの位相関係に依存するもので、機構の運動によって変化しないから、一度計算しておけば再計算の必要はない。

2) 拘束行列の算出

式(16), (19)により拘束行列 $[CM]$ の要素 σ_{ij} を求める。拘束行列は対称行列であり、また $\gamma_{ij}=0$ のとき、 $\sigma_{ij}=0$ となるから、計算は次の条件を満たす添字

Fig. 5 Flow diagram of kinematic simulation by MOTORDRIVE

i, j について行えばよい.

$$\left. \begin{array}{l} i \geq j \\ \gamma_{ij} \neq 0 \end{array} \right\} \quad (21)$$

3) 角速度の算出

拘束方程式 (13) は、各ペアにおける相対角速度の比率を規定する同次方程式である。駆動ペア軸の角速度 $\omega_{jdr}=1$ として、式 (13) 左辺の j_{dr} 行を削除、 j_{dr} 列を右辺に移項すれば、連立一次方程式が得られる。この係数行列は、正定値対称であるから、各種の高速解法が適用できる。本システムでは、改訂コレスキー法を用いている。

4) 速度モータの算出

この部分の計算手順は、旧版と同一である。各ペア軸における相対速度モータ U_j は式 (5) により求められる。 U_j を 6 次元ベクトルとして縦に並べた j_x 行 6 列の行列を $[\langle U \rangle_j]$ 、静止リンクを除いた残りのリンク絶対速度モータ $\langle V \rangle_i$ を並べた i_x 行 6 列の行列を $[\langle V \rangle_i]$ と表すと、絶対速度モータは、次式により求められる。

$$[\langle V \rangle_i] = [H][\langle U \rangle_j] \quad (22)$$

各ペア軸が接続する二つのリンクの絶対速度モータの平均値を、各ペアの絶対速度モータと呼び、記号 V_j で表すことにする。これは、次式によって算出さ

れる。

$$[\langle V \rangle_j] = \frac{1}{2}([\|D\|]^T[\langle V \rangle_i]) \quad (23)$$

ここで、 $[\|D\|]$ は接続行列 $[D]$ の要素の絶対値を要素とする行列、つまり無向接続行列を表す。

5) モータ軸の微動

入力データで指定された、微小時間 dt 秒後のペア軸モータは、モータ積“ $\times$ ”を用いて、次式 (24), (25) により求められる。

$$dM_j = V_j \times M_j dt \quad (24)$$

$$M_j := M_j + dM_j \quad (25)$$

旧版では、微動モータ dM_j の算出に微分方程式の数値解法の一つ、ホイン (Heun) 法を用いていた。これは、2 段 2 次の解法であるが、新システムでは、ルンゲ・クッタ (Runge-Kutta) 法を採用した。4 段 4 次の公式と 6 段 5 次の公式を組み込み、ユーザがどちらかを選択する。

拘束行列とルンゲ・クッタ法の導入により、計算速度・精度は大幅に向上した。

6) 表示・出力

本システム、Motor-Drive は、FORTRAN 77 でコーディングされ、パーソナルコンピュータ上で作動する。駆動ペアの角速度を一定とし、微動が確定すると毎回、機構の状態をワイヤフレーム形式でディスプレイに表示すると共に、つぎの 3 種のファイルデータをディスクに書き出す。

「速度ファイル」：各ペア軸における相対角速度もしくは相対速度。

「変位ファイル」：各ペア軸における相対変位角もしくは相対変位量 (長さ)。

「キネマファイル」：描画される線分の始点・終点番号のリスト、および微動ごとのディスプレイ実画面座標系における各点の 2 次元座標値。

速度・変位ファイルは、機構動作解析のためのグラフ作成に供される。キネマファイルは、別に開発した高速動作表示プログラム “KINEMA. EXE” の入力データとなる。表示の仕方は、一つの画面に機構の運動軌跡を次々に描いて行く上書きモードと、2 枚の画面バッファを切り替えて、微動ごとの状態を高速表示する更新モードがある。このプログラムによりユーザは、機構の動作状態をより実感をもって眺めることができる。図 6 に Motor-Drive により算出した図 1 の早戻り機構の運動軌跡を示す。

5. ロボット逆運動学問題への適用

ロボットの順運動学問題とは、各関節の変位からエ

Fig. 6 Motional locus of quick return mechanism

ンドエフェクタの位置・姿勢を求める問題である。この逆に、エンドエフェクタの位置・姿勢から各関節の変位を求めるのが逆運動学問題である。逆運動学問題は一般的には解析解を求められないだけでなく、数値計算の手順はロボットのタイプごとに異なり複雑なものとなる。無数に考えられるロボットの構造の中からどれを選ぶかは、現状ではその構造に逆運動学問題の高速解法があるか否かに大きく依存する。

本章では上述した速度解析プログラムの応用例としてロボット逆運動学問題の新しい解法を報告する。

5.1 仮想ペア挿入法

前章のプログラム Motor-Drive の処理対象は、自由度1の閉ループ機構である。オープンループ機構としてのロボットのベース（静止節）とエンドエフェクタの間に仮想的なペアを挿入することにより閉ループ機構を構成し、逆運動学問題を決定機構の速度解析問題に置き換えるというのが新解法の基本的な考え方である。

5.2 入力データ

図7は、処理例として用いた6自由度ロボットである。スライダを含む2個の補強ループがあり、先端部にはオフセットを有している。総ペア数は12で、上述の仮想ペア軸の番号は13となる。

入力データとして、閉ループ機構の場合と同様、リンクとペアの接続関係を表した配列 [I0J] とペア軸モータ $M_1, M_2, \dots, M_{12}$ を並べた行列 [EMJ] を与える。 M_{13} は自動算出される。

3次元ベクトル $\langle p \rangle$ と行列 [A] によりエンドエフェクタの初期位置と姿勢を、ベクトル $\langle q \rangle$ と行列 [B] により目標位置・姿勢を与える。行列 [A], [B] はエンドエフェクタに固着した座標系の3軸の単位方向ベクトルを3行並べた姿勢行列、点 p, q はエンドエフェクタ座標系の原点を静止座標系から見たときの位置ベクトルである。整数 Kx は分割数で、始点・終点間を

Fig. 7 Articulated robot with reinforcing loops and offset

Fig. 8 Calculation of virtual pair axis

何回の微動で補間するかを指示する。

5.3 らせん運動ペアの算出

空間における剛体の初期位置・姿勢から目標位置・姿勢への移動は、ある固定軸回りのらせん運動により実現できる。固定軸の方向ベクトル v 、軸上の一点 n 、回転角 θ 、進み長さ λ を次の手順で求める。

(1) v は座標変換 $[B][A]^T$ に関して不変であるから、行列 $[BA^T]$ の単位固有ベクトルとして v を求める。

$$[BA^T - E]\{v\} = 0 \quad (26)$$

ここで E は単位行列、 0 は3次元ゼロベクトルを表す。 $[A]=[B]$ のときは $\theta=0$ とし、仮想ペアは並進運動のカプルとなる。

(2) 点 p を通り v に垂直な点 q から下ろした垂線の足を r とする (図8)。

$$r = q + (p - q) \cdot vv \quad (27)$$

(3) 回転角 θ は、 $r-p$ 方向の単位ベクトル u と

行列 $[A]$, $[B]$ から求められる.

$$\mathbf{u} = (\mathbf{r} - \mathbf{p}) / |\mathbf{r} - \mathbf{p}| \quad (28)$$

$$\{\mathbf{u}'\} = [A]\{\mathbf{u}\} \quad (29)$$

$$\{\mathbf{u}''\} = [B]\{\mathbf{u}\} \quad (30)$$

$$\theta = \arctan \frac{\mathbf{u}' \cdot \mathbf{u}''}{|\mathbf{u}' \times \mathbf{u}''|} \quad (31)$$

ただし, $-\pi < \theta < \pi$ とする.

(4) 点 $\mathbf{n}$ は, $\mathbf{p}$ と $\mathbf{r}$ の中点 $\mathbf{m}$ を通り方向 $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ の直線上に在る.

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2}(\mathbf{p} + \mathbf{r}) \quad (32)$$

$$\sigma = \frac{1}{2}(\mathbf{r} - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{u} \quad (33)$$

$$\tau = \sigma / \tan \frac{1}{2} \theta \quad (34)$$

$$\mathbf{n} = \mathbf{m} + \tau \mathbf{u} \times \mathbf{v} \quad (35)$$

(5) 求めるべきらせん運動 S は固定軸 L 回りの回転運動ライン θL と進み長さ λ の並進カプル λC を重ね合わせたスクリューとなる.

$$\lambda = (\mathbf{q} - \mathbf{r}) \cdot \mathbf{v} \quad (36)$$

$$L = \mathbf{v} + \varepsilon \mathbf{n} \times \mathbf{v} \quad (37)$$

$$C = \varepsilon \mathbf{v} \quad (38)$$

$$S = \theta L + \lambda C \\ = \theta \mathbf{v} + \varepsilon (\theta \mathbf{n} \times \mathbf{v} + \lambda \mathbf{v}) \quad (39)$$

S を仮想ベア軸モータとして, 上記ベア軸モータ行列 $[EMJ]$ の最後の行に追加する.

5.4 刻み回数と精度

図7の問題では, 仮想ベア M_{13} は, 120° の回転運動と回転軸方向に沿った長さ 15.0 の並進を重ねたらせん運動をする. 図9は, 初期状態から目標状態への運動を4回の微動により算出したときの, 運動軌跡である. この問題では, 各ベア軸の相対変位の正解は, 解析的に求められる. 各軸変位の計算解の正解に対する相対誤差をプロットしたのが図10である. 横軸が刻み回数, 縦軸が誤差である. 誤差の最大値は, 刻み回数 16 回で約 10^{-4} , 32 回で約 10^{-6} 以下となる. 1 回当たりの計算時間は, 茨城大学情報処理センターの HITAC-M 680 H で 43 ms であった.

6. おわりに

本研究による成果を以下にまとめる.

(1) 機構のベア軸モータと閉路行列から「拘束行列」を定義し, これを用いた拘束方程式により, 機構の運動シミュレーションの高速アルゴリズムを構築し, FORTRAN プログラムによりその有効性を確認した.

Fig. 9 Motional locus of articulated robot

Fig. 10 Accuracy of the computed values of relative displacement between the initial and the final states of end effector

(2) 上記シミュレーションプログラムを用いて, ロボットの逆運動学問題の解法を示した. この解法は, 多重ループ, オフセットを有するタイプにも適用できる.

参考文献

- 1) 城 道介, 鳥原冬輝: モータ代数とグラフ理論による機構の記述と解析 (第1報)——自由度の定義と速度解析, 精密工学会誌, 54, 5 (1988) 1272.
- 2) L. Brand: Vector and Tensor Analysis, John Wiley & Sons, New York, N. Y., (1962).