凸多面体の類似判定について*

向井伸治** 古川 進*** 木村文彦† 佐田登志夫†† 小尾 誠***

An Algorithm for Deciding Similarity of Convex Polyhedra

Shinji MUKAI, Susumu FURUKAWA, Fumihiko KIMURA,
Toshio SATA and Makoto OBI

The problem of deciding whether two objects are similar or not is very important in the classification of shapes of objects for robot vision and in the creation of knowledge-based systems. This paper presents a method for determining similarity of two convex polyhedra with equal numbers of vertices. The method has the following features; (1) The degree of the similarity is introduced. As the degree becomes higher, two convex polyhedra become to be similar. (2) The computing time for deciding the similarity of two objects is comparatively short. For example, the similarity for convex polyhedra with 16 vertices can be decided in only one or two seconds. (3) The different parts and the similar or the same parts can be classified respectively to some extent. The algorithm is applicable to the problem of deciding congruence of the convex objects too. The various objects are compared with each other and their similarities are calculated. These experimental results show that this method is good for recognizing similarities.

Key words: convex polyhedral similarity, computational geometry, shape modelling, CAD/CAM

1. 緒 言

立体形状に関する人の認識にある程度近い判断を計算機上で実現することは、CAD/CAM システムをはじめとする形状処理における多くの局面で非常に重要である。

たとえば、形状モデルをロボットの認識機構や知識の表現などへ応用する際には、立体形状の分類を自動的に行う手法を構築しておくことが必要である。形状のグループ分けにより、いろいろなケースを集めてより大きな集合へと関連づけることができれば、個々の状況下でそれぞれどのようにすべきかを覚えておかなくとも、特定の状況下でどのようにすればよいかの判断が可能となると期待されるからである。

本論文においては、立体形状を分類するための第一歩として、凸多面体の類似判定を実現するための処理アルゴリズムについて検討を行い、類似性の定量的表現、判定の手続き等について考察する。この方法は、既開発の凸多面体の合同判定手法¹⁾²⁾を基本としてお

り、幾何的操作によって頂点数の等しい凸多面体の類似判定問題が扱えるように拡張したものである。

従来、形状の類似性についての認識・判定問題は、2次元形状を主対象として検討されてきた³⁾⁴⁾。3次元形状を扱った研究もわずかにあるが、それらは合同形、相似形の同定のための方法を中心に考察しており⁵⁾⁶⁾、立体形状の類似性を判定する方法を実験的に検討した報告は、著者らの知る限りでは皆無である。

本論文では、実際にいくつかの類似形状立体について判定テストを実行し、類似度を算出する。定量化された類似度、演算時間などからみて、本処理アルゴリズムは実用的な性能を有しており、類似性評価が良好に行えることを提示する。

2. 本手法の基本コンセプトと特徴

アルゴリズム構築に当たっての基本コンセプトと、これに基づく処理手続きの特徴は次のとおりである。

(1) 判定のための演算時間が短いこと

多数の立体群の中からある特定の立体を探索し同定する場合や、似ているもの同士を集めて分類する場合には、実行時間の高速化を図る必要がある。このために、立体形状を比較するうえで二つの特徴的な処理操作を行っている。その一つは立体に固有な座標系を設

* 原稿受付 平成3年9月30日

** 正 会 員 前橋市立工業短期大学（前橋市上佐島町 460）

*** 正 会 員 山梨大学工学部（甲府市武田 4-3-11）

† 正 会 員 東京大学工学部（東京都文京区本郷 7-3-1）

†† 正 会 員 理化学研究所（和光市広沢 2-1）

定する方法であり、もう一つは角度分布表を用いた頂点の照合方法である。この幾何的操作により、二つの立体における頂点の対応関係を効率的に見い出すことができ、演算時間の短縮が可能となっている。

(2) 類似性が定量的に表現できること

二つの立体が似ているか否かの判定はあいまいさを有するが、識別するためにはこの似ている度を定量的に表現できなければならない。そこで、対応関係のとれた頂点のずれに着目し、その頂点間距離を用いて類似度を定義している。この値は零に近いほど形状の偏りが少なく類似性が高く、逆に大きいほど形状が相違するという性質を持っており、類似性を表す尺度の一つとして合理的なものである。

(3) 合同判定、相似判定が同時に扱えること

類似性判定の特別な場合として、合同判定、相似判定も実現できなければならない。本手法では類似度を算出することにより、この判定を容易に行うことができる。

(4) 形状の相違する部分が認識できること

どの程度似かよっているかを論理的に保証するためには、類似形状立体の重ね合わせを行い、一致する部分と異なる部分を明白にする必要がある。そのため、本アルゴリズムでは、頂点の対応関係の定められた二つの立体に対し、必要に応じて頂点、稜線、面の重ね合わせが実行でき、形状のどの部分が相違しているかを明示できるものとなっている。

3. 類似判定アルゴリズム

凸多面体の合同判定手法を基本として構成した、類似判定のための処理手続きを図1に示す。そのアウトラインは、①立体に固有な座標系を設定すること、②頂点位置の角度分布表を作成し、頂点の対応関係を決定すること、および③類似度を算出し、形状の類似性を識別すること、の3点に集約できる⁷⁾。

二つの凸多面体のそれぞれに対して固有な座標系を設定され、角度分布表が作成されるが、ここではそれらを区別するために、一方を基準凸多面体Aとし、他方を比較凸多面体Bとして表示する。

以下では、①～③の方法について考察する。

3.1 固有な座標系の設定法

二つの凸多面体が空間の適当な位置に置かれているとき、これらの類似性の比較検討を行うためには、あらかじめなんらかの方法によってそれらの位置をできる限り合わせておくことが必要である。

このような位置合わせの作業を行うには、立体形状を記述する座標系を使うのではなく、各立体ごと

Fig. 1 The flow diagram of deciding the similarity

に定められる固有な座標系を利用するのが有利である。

凸多面体に固有な座標系を設定するための手順は、以下のとおりである。

(1) 距離分布表の作成

まず、立体を構成する全頂点に対する図心 G_c を求め、図心 G_c と頂点 V_i の距離 d_i ($i=1, 2, \dots, n$) を計算する。ここで、 n は凸多面体の頂点の数を表す。次に、これらを距離の小さい順に大まかにソートする。具体的には図2に示すように、 $d_{\min}$ から $d_{\max}$ の範囲を $\Delta d = (d_{\max} - d_{\min})/n$ の幅で分割し、該当する区間位置にそれぞれの頂点を対応させた表を作る。表の i 番めには図心 G_c からの距離が $d_{\min} + (i-1)\Delta d$ から $d_{\min} + i\Delta d$ の範囲のものが記憶される。この表を距離分布表 T_d 、 T_d の i 番めを要素 T_i と呼ぶことにする。

(2) 座標軸設定のための2頂点の抽出

作成された距離分布表を利用して、座標系を決定す

Fig. 2 Distribution tables of distances between the centroids and vertices

Fig. 3 An example of the original coordinate system

Fig. 4 Distribution tables of angles of vertices in the spherical coordinates

るための二つの頂点を選び出す。その選び方は立体 A と立体 B とでは異なり、立体 B においては立体 A で選び出された要素に依存して 2 頂点を選ばれる。

まず立体 A に対しては、 T_a^A から頂点数が零でない最小の頂点数を有する二つの要素 T_j, T_k を選定する。その際、同じ最小値をもつ要素が複数個求められる場合には、当該要素に隣接する要素の頂点数の総和が最小となるもの、すなわち頂点の分布密度の低い要素を選択する。次に、要素 T_j, T_k のそれぞれにおいて、図心よりの距離の最大の頂点 $V_{\max 1}, V_{\max 2}$ を選ぶ。距離の最大のものが複数個存在する場合には、それらのうちの任意の頂点を選ぶものとする。

次に立体 B においては、 T_a^A より抽出された二つの要素に対応する T_a^B の要素およびそれに隣接する要素に存在するすべての頂点を、座標系決定のための候補点とする。対応要素と隣接要素に頂点が存在しない場合には、頂点を有する要素が現れるまでさらに前後の隣接する要素を調べることとする。

また特別な場合として、立体 A における図心-頂点間距離がすべて等しくなることがある。このときは任意の二つの頂点を選び出すとともに、立体 B においてはすべての頂点の組合せについて調べる。

(3) 座標軸の設定

図心 G_c を新しい座標系の原点として、選び出された二つの頂点 $V_{\max 1}, V_{\max 2}$ より座標軸を決定する。x 軸の正方向は、ベクトル $\vec{G_c V_{\max 1}}$ の方向に定める。ベクトル積 $\vec{G_c V_{\max 1}} \times \vec{G_c V_{\max 2}}$ で定まる方向を z 軸とする。x 軸、z 軸が定めれば y 軸は自動的に決定される。立体 B についても同様な方法によって、得られた候補頂点のすべての組合せについて座標系が設定される。図 3 は、固有な座標系の設定例を示したものである。

3.2 頂点の照合法

(1) 頂点の角度分布表の作成

頂点の対応関係を求めるために、各立体の頂点の大きな位置関係を示す表を作成する。

まず、各頂点の座標値を固有の座標系に対するものに变换する。そして、z 軸を立体の中心軸と見立てたときの、各頂点の経度 θ 、緯度 ϕ をそれぞれ計算する。求められた θ, ϕ に対して、あらかじめ用意された頂点分布表の該当位置にその頂点に対応させる。この操作がすべての頂点に対して実行されると、図 4 に示すような頂点の角度分布表 T_a が得られる。

パラメータ θ および ϕ は、それぞれ区間 $[0, 2\pi]$ および $[0, \pi]$ の範囲で変化する。分布表の各要素の占める領域は、便宜的にパラメータの定義域をそれぞれ $\sqrt{n}$ 等分したものである。ただし、 $\sqrt{n}$ が整数にならない場合には、これを四捨五入して整数値に直した値を用いることにする。つまり、分布表の作成に当たっては、要素の数が頂点の数にほぼ等しくなるような分割表を用いている。

(2) 頂点の対応関係の求め方

立体 A, B について作成された角度分布表 T_a^A および T_a^B を利用して、各頂点の一対一の対応関係を定めていく。

T_a^A の 1 番目の要素に存在する頂点より順次、 T_a^B の中に対応する頂点を見出す。その際、同一の要素およびその周辺要素に存在する頂点のすべてを、対応関係を求める候補とする。ここで周辺要素を考慮するのは、類似立体を扱う場合、分布表の区分境界線の近傍の頂点は隣接する要素に移動する可能性が高くなるからである。

分布表の要素 T_{ij} ($i, j=2, 3, \dots, \sqrt{n}-1$) に存在する頂点に注目すれば、 $(i-2)\pi/\sqrt{n} \leq \theta \leq (i+1)2\pi/\sqrt{n}$ 、 $(j-2)\pi/\sqrt{n} \leq \phi \leq (j+1)\pi/\sqrt{n}$ の領域で対応する頂点を求めることになる。

分布表の周囲の要素に存在する頂点については、左右または上下の周囲要素をも調べる。このとき、 $\phi \approx$

$0, \pi$ の場合には θ の値が大きく変化することもあり得るので、隣接要素に限らず、 ϕ の値が 0 または π に近いすべての要素にわたって調べる。

当該頂点と各対応候補頂点との頂点間距離を計算し、それが最小であるものと対応させる。

また、大きさの異なる立体の比較、特に相似判定の場合を考慮して、それぞれの立体の図心-頂点間距離の平均値の比で表される距離ファクタを導入し、立体 B の大きさを調整することで頂点の照合を行う。

以上のように、立体に固有な座標系を設定し、その座標系における頂点位置の角度分布表を用いて頂点の対応関係を決めていくという方法は、たとえば頂点の総当たり法などに比べ、比較する頂点の数を格段に減ずることができ、非常に効率的である。

3.3 類似判定

各頂点の対応関係が決定したところで、類似度を計算し、類似性の判定を行う。

類似性を定量的に表現する指標として、対応する頂点のずれに着目し、次式のように類似度 (μ, σ) を定義する。

$$\mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{e_i}{d_i^A} \quad (1)$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{e_i}{d_i^A} - \mu \right)^2} \quad (2)$$

ここで、 e_i : 対応する頂点間の距離、 d_i^A : 立体 A における図心-頂点間距離。

すなわち、 μ は各頂点の相対的なずれの平均であり、 σ はその標準偏差である。

この類似度を算出することにより、二つの立体形状の類似性ある程度説明することができる。 $\mu=0$ の場合には二つの立体は合同であり、 $\sigma=0$ の場合には相似形であることがわかる。この特別な場合を除けば、二つの立体の類似性は、 μ および σ の大小に依存する。 μ, σ が 0 に近いほど両立体はよく類似していることになり、逆に μ, σ が大きくなるにしたがって、立体形状の差異は大きくなる。

判定においては、立体 B の候補座標系のすべてについて頂点の対応関係を定めて、 μ および σ を求める。そこで、 μ の最小値とそれに対する σ の値によって立体 A と立体 B との類似度を表し、その値の大小に基づいて、極めて類似、類似、相違などの判定を行うものとする。

3.4 立体の重ね合わせ——相違部分の認識

類似している場合には、各頂点の重なり状況をより明確にして、部分的にどの辺りが異なっているかを調べるために、両立体の重ね合わせを行う。これによ

り、類似していることの論理的説明が可能となる。この重ね合わせの問題は次のように考える。

はじめに各頂点の対応関係のなかで、一致する可能性が高いと考えられる頂点を重ねる。次にその頂点を一端点とする稜線を重ね、さらにその稜線を含む面を一致させる。すなわち、一つの頂点を基準として、点、線、面の順ですべてのケースについて重ね合わせを行う。そこで再度 μ, σ を計算し、最小の μ のケースをもって、頂点の重ね合わせが良好に行えたものとする。具体的には、以下の処理手続きを実行する。

- ① 対応する頂点における図心-頂点間距離の差が最小となる頂点 V_1 を原点とする平行移動を行う。
- ② 頂点 V_1 を一端点とするすべての稜線に対して、他方の端点を抽出する。
- ③ その一つの頂点 V_2 が x 軸上に位置するように、すなわち稜線 $\overline{V_1 V_2}$ を x 軸に重ねるために、 z 軸まわり、 y 軸まわりの回転移動を行う。
- ④ 抽出された頂点の中から、二つの頂点 V_1, V_2 と面を構成するもう一つの頂点 V_3 を取り出し、その頂点が $x-z$ 面上に位置するように、 x 軸まわりの回転移動を行う。これにより、 V_1, V_2, V_3 で構成される面を、稜線 $\overline{V_1 V_2}$ を x 軸に一致させたかたちで $x-z$ 平面に重ねることができる。
- ⑤ 二つの立体についてこの重ね合わせを実行し、 μ, σ を計算する。
- ⑥ ② で抽出された頂点に対する稜線と面とのすべての組合せについて、③～⑤の手続きを実行する。最後に、 μ の最小のケースにおける各頂点の重なり状況を調べることにより、一致する頂点 ($e_i=0$) と、ずれの生ずる頂点 ($e_i \neq 0$) とが区別され、立体形状の相違する部分を明示することができる。

4. 類似判定実験例

4つの凸多面体について、類似性の判定を実行した例を図5に示す。類似度 (μ, σ) の値が大きくなるにしたがい、立体形状が相違していく状況を表している。

ケース1は、一つの典型例として、基準となる直方体の形状を B1 から B4 へと連続して規則的に変えたものである。全ケースにおいて、立体 B1 は極めて類似している例であるが、立体 B3 は人間の類似性に対する感覚から、もはや類似物とは判断できないような立体例を示したものである。また、ケース1を除く立体 B4 は、類似判定の特別な場合としての相似形状の

	Object A	Object B			
		B 1	B 2	B 3	B 4
Case 1 (n=8)		$\mu = 0.048$ $\sigma = 0.018$	$\mu = 0.103$ $\sigma = 0.038$	$\mu = 0.205$ $\sigma = 0.076$	$\mu = 0.340$ $\sigma = 0.126$
Case 2 (n=10)		$\mu = 0.035$ $\sigma = 0.021$	$\mu = 0.145$ $\sigma = 0.058$	$\mu = 0.280$ $\sigma = 0.115$	$\mu = 0.200$ $\sigma = 0.000$
Case 3 (n=12)		$\mu = 0.055$ $\sigma = 0.022$	$\mu = 0.113$ $\sigma = 0.043$	$\mu = 0.319$ $\sigma = 0.135$	$\mu = 0.400$ $\sigma = 0.000$
Case 4 (n=16)		$\mu = 0.050$ $\sigma = 0.030$	$\mu = 0.121$ $\sigma = 0.056$	$\mu = 0.181$ $\sigma = 0.128$	$\mu = 0.200$ $\sigma = 0.000$

Fig. 5 The results of similarity tests
 μ, σ : the degree of similarity

Object A	Object B						
	B 1	B 2	B 3	B 4	B 5	B 6	B 7

$\mu =$	0.121	0.073	0.036	0.000	0.036	0.073	0.121
$\sigma =$	0.118	0.071	0.035	0.000	0.035	0.071	0.118
$\mu^* =$	0.057	0.034	0.017	-	0.017	0.034	0.057
$\sigma^* =$	0.161	0.096	0.048	-	0.048	0.096	0.161

Fig. 6 The results of similarity tests and discrimination of different parts
 μ^*, σ^* : the degree of similarities of different parts of the objects

判定例である。

基準立体に対して、類似した立体であるか否かを識別するのはあいまいな判定問題ではあるが、算出された類似度 (μ, σ) の値に基づいて判断することが可能である。

これら数種の実験例から推察すれば、類似形状立体 B 2 から立体 B 3 へと形状が変化していく過程での類似度 (μ, σ) から、その判定が行えるようである。

図 6 は、角すい部分の高さの異なる立体について、重ね合わせを実行した事例を示したものである。立体

下部の角柱部分は合同形であるため、上部の1頂点のみでずれが生ずる結果を得る。合同形のB4を基準として、角すい部の高さが低くあるいは高くなるにしたがって、 μ, σ は大きくなり、全体としての形状が異なっていく状況がわかる。

図中の μ^* および σ^* は、合同部分の重ね合わせを行った結果として得られた値である。各頂点の相対的ずれの平均値である μ^* は、 μ に比べ小さくなり、 σ^* は1頂点のみのずれの影響で大きくなっている。

以上の実験例を通じて、定義された類似度により、凸多面体の類似性がおおむね良好に説明できることがわかる。

この判定手法を多数の立体に連続して適用することにより、ある特定の立体に最も類似した立体を検出することや、類似したものの同士を集めて分類することなどが可能である。

本手法は、C言語でプログラミングされている。類似判定に要する演算時間は、主として頂点の数および比較立体の候補座標系の数に依存している。ここに例示したケースのように頂点の数が少ない立体の場合には、およそ1~2秒程度で判定が実行できる。

なお、使用した計算機はCPUにR 3000(実行速度:20 MIPS)を用いたエンジニアリングワークステーションである。

5. 結 言

本論文では、立体形状の分類を行うための一方法として、凸多面体を対象とする類似判定の方法について考察した。

凸多面体の合同判定手法に基づき、立体に固有な座標系を設定し、その座標系における頂点位置の角度分布表を利用して頂点の対応関係を効率的に決定していく方法を示した。

そして、対応する頂点のずれを表す頂点間距離を用いて類似度を定義し、この大小により、比較立体形状の類似性を判定する方法を提示した。また、類似判定の特別な場合として、合同形、相似形も識別できるものとした。

いくつかの類似形状立体の判定実験を通して、ここ

で定義された類似度は人間の類似性に対する感覚に近いものであり、これにより、形状が類似しているか否かをある程度説明できることがわかった。

さらに類似立体に対しては、その判定の必要性に応じて立体の重ね合わせを実行し、ずれの生ずる頂点を明らかにすることによって形状の相違する部分を識別する方法を提示した。

以上より、本手法は類似性の評価を行ううえでおおむね良好な性能を有しているといえよう。

本手法においては、頂点の対応関係の決定や類似度の算出において、頂点の緯度、経度のずれとしての角度偏差を考慮していないが、今後、この偏差をも含め数多くの立体についての実験を通じて、より実用的な手法へと改善していきたいと考えている。

さらにこの処理手続きを、頂点数の異なる立体や凹部を有する多面体の類似判定といった、より複雑な問題が扱えるように拡張していくことも今後の検討課題である。

なお、本研究の一部はカシオ科学技術振興財団の援助によるものであることを記し、関係諸氏に感謝の意を表する。

参 考 文 献

- 1) 古川 進ほか: 多面体の合同判定アルゴリズム, 日本機械学会論文集C編, 56, 528 (1990) 2311.
- 2) 古川 進ほか: 類似形状立体の識別に関する研究(第2報), 昭和61年度精密工学会秋季大会学術講演会講演論文集, (1986) 411.
- 3) G. Manacher: An Application of Pattern Matching to a Problem in Geometrical Complexity, Information Processing Lett., 5, 1, (1976) 6.
- 4) 伊東伸泰ほか: 形状識別における類似度尺度の知覚的考察, 情報処理学会第30回全国大会講演論文集, (1985) 1223.
- 5) 杉原厚吉: 多面体の合同判定のための $n \log n$ アルゴリズム, コンピュータ・ビジョン研究会資料, 情報処理学会, No. 18-1 (1982) 1.
- 6) A. Helmut et al.: Congruence, Similarity, and Symmetries of Geometric Objects, Discrete Computational Geometry, 3 (1988) 237.
- 7) 古川 進ほか: 類似形状立体の識別に関する研究(第3報), 昭和62年度精密工学会春季大会学術講演会講演論文集, (1987) 373.