三次元表面凹凸のフラクタル解析*

伊 藤 憲 朗** 塚 田 忠 夫***

Fractal Analysis of Three-Dimensional Engineering Surface Irregularities

Noriaki Itoh and Tadao Tsukada

In this research, the authors studied the self-similar fractal dimension of isotropic surface asperities such as lapped surface. As the self-similar fractal, we used the clusters in contour map of three-dimensional asperity profile. Fractal dimension was obtained from the perimeter length and the area of clusters which were computed by means of the newly developed diagonal-method and the mesh counting method. It was made clear that the self-similar fractal dimension was more available to assess the complexity of asperities than the self-affined fractal dimension.

Key words: fractal, fractal dimension, surface roughness, three dimensional surface roughness, self-similar fractal, isotropic surface irregularities

1. 結 言

不規則な工学表面の微細形状の複雑さをフラクタルで解析することが種々試みられてきたが¹⁾²⁾、微細突起がオーバーハングするなど、機械加工表面の微細凹凸に合わない考え方であったり³⁾、Mandelbrotが指摘したように、時系列的な波形を直接幾何学的な問題に適用することの不適切さなど、解決すべき問題が残されている⁴⁾。

このような背景から、筆者らは、機械加工表面の断面曲線から得られる構造関数とパワースペクトルを対象に、べき乗則に従うフラクタル的な性質をもつスケール域が存在することを報告してきた¹⁾⁵⁾。そこでは、フラクタルディメンションで形の複雑さを特徴付け、うねりや表面粗さ、及びそれらを構成する基本微細形状を表面凹凸の波長域により区分することを試みた。

一方、工学表面のより完全な表面性状の把握のために、三次元測定システムの開発⁶⁾や三次元トポグラフィ評価の導入⁷⁾が行われつつある。このような流れの中で、本研究は、触針式粗さ計により水平面上の直交格子の交点で測定したデータから得た三次元トポグラフィの水平断面による等高線の中の閉曲線を対象にして、自己相似フラクタルディメンションによる表面凹

凸の複雑さの評価を試みる。さらに、自己類似フラクタルディメンションから断面曲線の複雑さの区分¹⁾⁵⁾と三次元表面凹凸に表れる曲面の複雑さの対応を検討する。

2. 自己相似フラクタルディメンション

自己相似フラクタルとは、一部を拡大してもそこに現れる図形や統計的性質が変わらない幾何学的関係といい⁸⁾、平面や立体の各座標軸がいずれも同じ物理次元と縮尺をもつユークリッド空間で成り立つものである。これに対して、自己類似フラクタルは異なる物理量、あるいは極端に尺度が違ふ変数による図形や統計的性質の関係である。

フラクタルディメンション D は、観測単位（線分、正四角形、正六面体などの大きさ）の縮尺 $1/r$ と測度（観測単位の数） $N(1/r)$ から次式のように定義され、図形のトポロジカル次元を表す整数部と複雑さを表す小数部の和として非整数値で表される。この場合、フラクタルディメンション D の下限はトポロジカル次元 d_t 、上限は空間のユークリッド次元 d_e である⁸⁾。

$$D = \log N(1/r) / \log(1/r) \quad (1)$$

同様に、縮尺率によって決まるスケール ℓ と測度 $N(\ell)$ の両対数関係が直線区間をもつ場合、その傾斜からフラクタルディメンション D が定義される。

* 原稿受付 平成3年10月29日

** 学生会員 東京工業大学大学院（東京都目黒区大岡山2-12-1）

*** 正 会 員 東京工業大学工学部

$$D = - \frac{d\{\log N(\ell)\}}{d(\log \ell)} \quad (2)$$

触針式粗さ計により測定した表面凹凸の断面曲線から、式(2)を用いて求めたフラクタルディメンションは、縦横の拡大率の差により結果が変化し特定できないというMandelbrotの指摘⁴⁾が、笹島らにより実証されている⁷⁾。これに対して、本研究は等高線の輪郭形状から得られるフラクタルディメンション⁸⁾について検討する。

三次元表面凹凸の平均平面に平行な断面に現れる等高線図形は、以下に述べるように三次元表面凹凸曲面の複雑さを反映した自己相似図形と考えられる。この等高線の自己相似フラクタルディメンション D_c と曲面の自己類似フラクタルディメンション D_s とは次の関係にあり⁹⁾、不規則曲面のフラクタルディメンション D_s を推定することができる。

$$D_s = D_c + 1 \quad (3)$$

不規則な曲面の場合には、 $2 \leq D_s \leq 3$ となる。

平面上(横方向)のスケールに対して縦倍率(高さ方向スケール)が異なる三次元表面凹凸面、すなわち二次元自己類似曲面にフラクタル的な性質があれば、水平断面である等高線は微細な山や谷を水平にたどったものである、この曲面の複雑さを反映していると考えられる。このように考えれば、閉曲線となる等高線は自己相似であるといえることができる。

ユークリッド空間での図形は距離を基本単位とした測度で表現され、長さ L 、面積 S はそれぞれ一次、二次の測度である。しかし、閉曲線となる等高線の長さは、無限小の観測単位で測る場合と有限の観測単位で測る場合とでは測定値が異なるので、一次の測度のみで表現することは困難である。そのために、複雑さの測度を X としその次数を D とすると、各測度には次のようなべき乗則の関係が成立する⁸⁾。

$$L^{1/D} \propto S^{1/2D} \propto X^{1/D} \quad (4)$$

式(4)の D を D_c とおけば、 D_c は等高線の自己相似フラクタルディメンションとなり、次式で表される。

$$D_c = 2 \frac{d(\log X)}{d(\log S)} \quad (5)$$

3. セル計数法によるフラクタルディメンション

3.1 メッシュ法の検討

スケールを変えて曲線の長さを測る方法として、本

(a) Box counting method

(b) Mesh method

(c) Matrix method

Fig.1 Examples of counting method for self-similar fractal

研究ではコンピュータ処理が容易なメッシュ法を応用する。メッシュ法の基となった原理は、クラスタ(閉曲線となる等高線により囲まれた島)の輪郭線を重なりのない合同な正方形セルによって図1(a)のようにおおうボックスカウント法であり、その正方形セルの大きさ(一辺の長さ) ℓ と個数 $N(\ell)$ の関係から、ボックスディメンションと呼ばれるフラクタルディメンションを求めるものである⁴⁾。

このようなボックスカウント法に対して、メッシュ法は、図1(b)のように正方形セルを格子の位置に配置する方法である。格子状に配置された一辺の長さ ℓ の正方形セルのうち、クラスタの輪郭線が通過するセルを数えて測度 $N(\ell)$ を得る。クラスタの面積は、輪郭線を含んで表面凹凸の実体側にある正方形セルを合計して測度 $S(\ell)$ とする。

輪郭線を正方形セルの連なりで表すための工夫として、図1(c)のようにメッシュ法の原理を応用した手法を考える。輪郭線を表す離散データは輪郭線に最も近い実体側の格子の交点で与えられるものとし、この

Fig.2 Relationship between perimeter length $N(\ell)$ and enclosed area $S(\ell)$ for circle

交点を中心とする正方形セルにより輪郭線をおおうことにする。これを格子点法と名付けておく。この場合、正方形セルが対角線方向に連なることがあるので、これに対しては対角線の長さに相当する補正量($2^{1/2}-1$)をセルの個数に非整数値の個数として加える。この方法を対角線補正法と呼び区別しておく。

本研究では、 $S(\ell)$ と $N(\ell)$ の関係からフラクタルディメンションを求めることにするが、上述したメッシュ法、格子点法及び対角線補正法の三つの方法の比較を、円形クラスタによるシミュレーションで行った結果を図2に示す。 $S(\ell)$ と $N(\ell)$ は正方形セルの数で表してある。比較の対象として円を採用した理由は、輪郭線の接線があらゆる方向に向く単純な形状であり、解が分かっているからである。

図2の直線は、円の周長 X を縦軸、面積 $S=\pi R^2/4$ を横軸とする関係、すなわち理想的な関係を示したものであり、その傾斜は $1/2$ となって自己相似フラクタルディメンション D_c は1となる。図2において、セル換算で直径約10以下 ($S(\ell)$ が約70以下) ではシミュレーション結果は直線から外れてくる。これに対して、セル換算で直径約10以上では対角線補正法が直線に最も近いことが分かる。以上から、本研究では対角線補正法を用いることにした。

3.2 セル計数方式の検討

メッシュ法は、メッシュの細かさを変化させて計数を繰り返さなければならないために、一般には手順が複雑となる。これに対して、クラスタが種々の大きさをもちかつ独立した自己相似閉曲線群であれば¹⁰⁾、以下のような方法により、繰り返しプロセスのない簡便な方法で結果を得ることができる。

スケールを導く一つの基準として、クラスタの大きさ、例えば最小外接円直径 L を用い、これを縮尺率 $1/r$ で縮尺した L/r を一辺とする正方形セルをスケールと

する。フラクタルディメンションが一定で自己相似則が成立する範囲においては、式(1)により輪郭線を表す正方形セルの数 $N(1/r)$ は $(1/r)^D$ に比例し、クラスタの大きさ L は直接関与しない。このようなことから、まずある間隔のメッシュを設定する。このメッシュの正方形セルの一辺を ℓ とすると、大きさの異なる任意のクラスタに対する正方形セルの相対的な大きさ ℓ_n 、 $n=1, 2, \dots$ は、クラスタの最小外接円直径を $L_1, L_2, \dots$ とおいて、 $\ell_1 = \ell/L_1$ 、 $\ell_2 = \ell/L_2, \dots$ となる。次に、投影面上で $L_1, L_2, \dots$ が同じ大きさになるように各々拡大する。この操作によって各クラスタは異なる大きさの正方形セルでおおわれたことになる。したがって、自己相似則が成立する範囲においては、大きさの異なるクラスタを対象とすることによって、正方形セルの大きさを変えながら測定する方法と同じ結果を得ることができるはずである。本報では、以上の手法をセル計数法と呼んでおく。

4. 試料及び測定条件

異方性のない不規則表面凹凸試料として、表1に示すラップ加工した表面を用いることにした。試料材質はSK3(Hv=500)である。

表面凹凸の測定は、公称先端半径 $2\mu\text{m}$ のダイヤモンド触針を備えた触針式三次元粗さ計によりスキッドを用いずに行い⁶⁾、水平面上で X, Y 方向等間隔 t_s の直交格子の交点で離散化し、12ビットAD変換器によりデジタルデータを得るようにした。なお、本研究では測定データに及ぼす触針先端半径の影響は考慮しないので、表面凹凸が非常に小さい表1の試料L5は、触針先端半径が影響するおそれがあることから、参考として用いることにした。

サンプリング間隔 t_s は、断面曲線に見られるフラクタル的性質の有効領域の下限波長 λ_H から $t_s \leq \lambda_H/4$ を満たし⁵⁾、かつ微細形状が十分に把握できる間隔と

Table 1 Specimens and measuring conditions

No.	σ μm	t_s μm	λ_H μm	D
L1	0.69	0.8	7.6	1.67
L2	0.41	0.8	5.8	1.84
L3	0.17	0.4	4.0	1.86
L4	0.16	0.4	3.5	1.74
L5	0.02	0.2	1.5	1.81

Note 1) Lapping grains:WA#400-2400 for L1-L4, diamond powder for L5.

Note 2) σ : Standard deviation of surface irregularities

した¹¹⁾。表1に λ_H, t_s を示す。データ数は、閉曲線となる等高線が複数得られることを確認して X, Y 方向 1024×128 とした。なお、パワースペクトル密度から求めた断面曲線の自己類似フラクタルディメンション D を、参考のために表1に示す。

5. フラクタルディメンション

5.1 実験結果

図3は、平面回帰した測定データの平均平面上の等高線の例である。閉曲線であるクラスタが複数存在しており、本研究で考えたセル計数方式が適用できる。

水平切断面のレベルを下げてゆくと、実体部分が連結し測定領域の境界から境界にわたるパーコレーションと呼ばれる状態¹⁰⁾が発生する。平均平面でも一部観察されるが、これより下のレベルの切断面ではパーコレーションが増えクラスタの数が極端に減少する。一方、 1σ より高い位置の切断面では、小さなクラスタがまばらに分布する状態になる。そのために、本研究では平均平面と 1σ の間のレベルの等高線を対象にクラスタを把握することにした。

図4(a)に、平均平面と $1/2\sigma$ のレベルの等高線から得られるクラスタの周長 X と面積 S の関係を示す。図4(a)は、セルの一边をデータのサンプリング間隔としてセル計数法により求めた結果であり、図4(b)は同じデータに対してセルの大きさを変えた結果である。図4では屈曲点Bを境にして傾斜が異なっているので、二つの異なる自己相似の領域が存在していることが分かる。また、図4(a),(b)の両者にほとんど差が見られないことから、簡便なセル計数方式が有効である。さらに、平均平面と $1/2\sigma$ のレベルの切断面における結果には差が見られず、この範囲では X と S の関係は等高線の高さレベルに依存しないといえる。図が煩雑になるため省いたが、同様のことが 1σ のレベルの等高線でも確認された。

また、離散データのサンプリング間隔が大きいとクラスタの形状の複雑さを減少させるおそれがあるので、サンプリング間隔を $0.2\mu\text{m}$ と小さくして処理した結果を図4(a)の○印で示す。図から分かるように、本研究の範囲ではサンプリング間隔の影響はほとんど無いといえる。ただし、本研究ではスタイラスの先端半径の影響については検討していないので言及しない。

Fig.3 Contour map of L1 at the center plane (the mean height level)

(a) By cell counting method using diagonal compensation

(b) By matrix method varying cell size and applying diagonal compensation

Fig.4 Relationship between enclosed area and perimeter length for L1 specimen

Table 2 Characteristics of surface topography

No.	D_a^*	D_a	λ_B	λ_B^*
L1	2.25	2.71	7.0	7.3
L2	2.11	2.89	6.4	6.2
L3	2.28	2.74	4.2	3.8
L4	2.30	2.82	3.4	3.4
L5	2.43	2.89	1.6	1.6

5.2 三次元表面凹凸のフラクタルディメンション

図4の屈曲点Bを境に近似した2本の直線と式(3)，(5)によって求まるフラクタルディメンションを，A-B領域に対して D_a^* ，B-C領域に対して D_a として表2に示す．クラスタの小さいA-B領域の形状はB-C領域のものより複雑さが小さいことが分かる． D_a の小数部を見ると，B-C領域は十分フラクタル的な性質をもっていることが分かる．また， D_a^* 小数部は D_a のそれよりかなり小さいことから，A-B領域はB-C領域よりフラクタル的な性質が弱いといえる．

断面曲線から求める自己類似フラクタルディメンションにおいても，複雑さの異なる二つの領域が観察された⁵⁾が，自己類似フラクタルディメンションの性質と等高線のクラスタからの自己相似フラクタルディメンションの性質を直接比較することは容易ではない．そこで，次のような方法で両者の関係を見ることにした．

断面曲線の形状が，図5のように等高線に現れる局所的な形に反映されているものと考ええる．この場合，断面曲線とクラスタの局所的形状の複雑さを図6の離散データ P_1, P_2, P_3 のなす角 ξ の変化で見ることにし，変化の度合は平均値からの変動である分散 $Var(\tan \xi)$ によって表すことにする．図7は， ξ を求める離散点の間隔 ℓ と $\tan \xi$ の分散 $Var(\tan \xi)$ の関係である．断面曲線を対象にした図7(a)では， $Var(\tan \xi)$ が極大値を示すB点が存在する．B点の左側領域は，すでに報告したように微細で複雑さの少ない形状要素群の領域であると考えられる¹⁾．一方，B点の右側は ℓ が大きくなるために微細形状の ξ を表すことができなくなってゆく領域であり，B点の左側の形状要素が断面曲線の微細構成要素となっているものと考えられる⁵⁾．したがって，複雑さの小さい微細突起の領域の上限はB点であると判断される．

機械加工面の微細凹凸の平均頂角は $120^\circ \sim 170^\circ$ であるので，断面曲線においては図6の ℓ は水平方向の距離 ℓ' に非常に近いとみなせる．したがって，B点の ℓ を ℓ_B とおけば，B点での波長 λ_B は

Fig.5 Hypothesis of relation between profile and cluster observed in L1 specimen

Fig.6 Definition of ξ

(a) For profiles

(b) For clusters

Fig.7 Relationship between variance $Var(\tan \xi)$, and divider width ℓ in L1 specimen

$2\lambda_B$ として近似することができる。表2に λ_B を示す。 λ_B はパワースペクトル密度⁵⁾から求めた表1の波長 λ_H に近く、上述した考え方が断面曲線において成立する。

図7(b)は等高線図におけるクラスタに対する結果の一例である。 ℓ の最大値は、図2の結果を踏まえてクラスタの最小外接円直径の1/10までとした。図4のA-B領域にあるクラスタの結果を記号○、B点にはほぼ相当するクラスタを記号△、B-C領域のクラスタを記号□で示す。記号□の結果は図7(a)の断面曲線の場合と同様な挙動を示し、 λ_B と同様の考え方で導いたB点の波長換算値を λ_B^* とおき、多数のクラスタについて得た平均値を表2に示す。 λ_B^* は λ_B に近いことが分かる。また、微小突起の平均傾斜は図7の場合約0.16であり¹²⁾、断面曲線の局所的な形が等高線に反映されているという図5の仮説に従えば、断面曲線の変動は $1/0.16=6.3$ 倍に拡大される。図7(b)の $\{Var(\tan \xi)\}$ の平方根は図7(a)のその約7倍であり、上記の仮説が拡大率の面からも成り立っている。一方、記号○及び記号△の $Var(\tan \xi)$ は、上記の ℓ の最大値までの範囲では明確な極大値が見られない。

図7(b)に対する上記の考察から、B点は図4の屈曲点Bの性質に相当すると考えられる。したがって、クラスタの複雑さを形成する微細形状要素の最大波長は、 λ_B^* と考えることができ、断面曲線のフラクタル的な性質を示す表1の最小波長 λ_H にはほぼ一致する。以上のことから、断面曲線で得られた性質が自己類似フラクタルでも確かめられることが分かる。

また、形状の複雑さを表すフラクタルディメンションの小数部を比較すれば分かるように、表1の D より表2の D_s の方が大きく評価されている。これは、突起側面にある微小凹凸が、水平に切断して得られる等高線において大きく拡大されて現れ、自己類似フラクタルに対して複雑さが増したものと考えられる。このことは、自己類似フラクタルの手法による方が形状の複雑さを把握するのに有利と考えられる。

6. 結 言

ラップ加工された等方性表面凹凸を対象に行った本研

究の主な結論は以下のとおりである。

- (1) 三次元測定された等方性表面凹凸のフラクタルディメンションを測定する方法として、対角線補正法によるセル計数法を提案した。
- (2) 等高線から得られる自己類似フラクタルにおいて、フラクタルディメンションの異なる二つの領域があることを実験によって明らかにした。
- (3) 自己相似フラクタルによるフラクタルディメンションは、自己類似フラクタルによる値より大きく、形状の複雑さが強調されること、また複雑さが変わる境界は自己類似フラクタルによる結果によく一致することを見い出した。

参 考 文 献

- 1) 伊藤憲朗, 塚田忠夫, 笹島和幸: フラクタルディメンションを用いた不規則表面凹凸の解析 (第1報), 精密工学会誌, 58, 5 (1992) 865.
- 2) S. Chesters, H. Y. Wen, M. Lundin and G. Kasper: Fractal-based Characterization of Surface Texture, Appl. Surface Sci. 40, (1989) 185.
- 3) F. F. Ling: Fractals, Engineering Surface and Tribology, Wear, 136, (1990) 141.
- 4) B. B. Mandelbrot: Self-Afine Fractals and Fractal Dimension, Physica Scripta, 32, (1985) 257.
- 5) 伊藤憲朗, 塚田忠夫, 笹島和幸: フラクタルディメンションを用いた不規則表面凹凸の解析 (第2報), 精密工学会誌, 投稿中.
- 6) 加藤勝男, 塚田忠夫: 三次元微細形状測定における試料自動設定システムの開発, 1990年度精密工学会秋季大会学術講演会講演論文集, A14, (1990.9).
- 7) K. Sasajima and T. Tsukada: Measurement of Fractal Dimension from Asperity Profile, Int. J. Mach. Tools Manufact., Pergamon Press, 32, 1/2, (1992) 125.
- 8) B. B. Mandelbrot, (広中平祐監訳): フラクタル幾何学, 日経サイエンス (1985)
- 9) B. Mandelbrot and J. W. V. Ness: Fractal Brownian Motions, Fractal Noises and Applications, SIAM Rev., 10, 4, (1968) 422.
- 10) J. Feder (松下 貢, ほか訳): フラクタル, 啓学出版, (1986) 237.
- 11) T. Tsukada and K. Sasajima: An Optimum Sampling Interval for Digitizing Surface Asperity Profiles, Wear, 83, (1982) 119.
- 12) T. Tsukada and Y. Anno: An Evaluation of Machined Surface Topography, Bull. JSPE, 8, 4, (1974) 141.