縮閉線に基づく曲率変化の滑らかな 曲線, 曲面の生成 (第1報)*

——縮閉線の決定と有理 Bézier 曲線による表現——

東 正 毅** 毛 利 仁*** 斉 藤 剛†

Generation of Curves and Surfaces with Smoothly Varying Curvature Based on Evolutes(1st Report)

— Determining an Evolute and Representing its Involute by Rational Bézier Curves —

Masatake HIGASHI, Hitoshi MOHRI and Tsuyoshi SAITOH

This paper presents a generation method for curves which have smoothly varying curvature to satisfy designer's intention under the condition of tangent direction and curvature values at arbitrary points on the curve. This method determines curvature variation directly by an evolute as a rational 2nd degree Bézier curve, then approximates its involute by rational 3rd degree Bézier curves. The generated curves have G^2 continuity at the connected points and compose NURBS.

Key words: computer aided geometric design, evolute, involute, rational Bézier curve, smooth curvature variation, G^2 continuity, NURBS.

1. は じ め に

自動車のボディのような意匠曲面の設計で用いられる CAD システムでは, デザイナの美的意図を満足する滑らかな曲面を生成する必要がある。ここで滑らかな曲面とは, 曲面上のハイライトや映像がひずまないものであり^{1),2)}, 面の法線方向の変化, すなわち, 法線の微分である曲率の変化のしくあいに大きく影響され, これを滑らかに定める必要がある。従来の曲線, 曲面創成法では, この曲率変化のレベルまで考えて形状を生成することは難しい。本研究では, 曲面の曲率変化を直接規定するため, その構成曲線の曲率中心の軌跡である縮閉線より形状を決定することを考える。まず, 第1報では, 対象曲線を平面曲線に限定して報告し, 続いて曲線形状の制御法, 空間曲線の生成, さらに曲面の生成へと研究を進める。

曲面を構成する曲線の曲率の変化が, 曲面上のハイライトや映像にどう影響するかを, 図1に簡単な例で示す。曲線の曲率の変化を視覚化するには, 曲線に沿ってスケール倍された曲率半径を表示する曲率プロファイル¹⁾, および曲線長を横軸にとり縦軸に曲率を

とった曲率プロット³⁾が用いられる。対象とする曲面は, 与えられた曲率変化の異なる曲線をスイープした面とする。曲面の評価は, 陰線を軸方向に回転したシルエットパターン⁴⁾ (疑似ハイライト線) と, 格子パタンの映像⁴⁾を表示して行う。曲線を直線に沿って平行移動した単純なタブシル面では, これらの評価線は平行な曲線となるので, スイープのガイド線⁴⁾を円弧とし両方向に曲がった曲面とする。面(a)は, 曲率プロットに示す曲率変化の滑らかな曲線をスイープしたもの

Fig.1 Evaluation of curvature variation of surfaces
s:arc length, κ :curvature

* 原稿受付 平成4年12月24日

** 正 会 員 豊田工業大学(名古屋市中天白区久方 2-12)

*** 学生会員 豊田工業大学

† 正 会 員 東京電機大学(東京都千代田区神田錦町 2-2)

であり、面 (b) では、曲率変化が滑らかでない。この2つの面を比較すると、等角度で回転したシルエットや等間隔の格子の映像が、その間隔や曲線の曲がり具合に明白な差が出ていることが分かる。以上より、ハイライトや映像線がひずまないためには、曲面を構成する曲線の曲率の変化は滑らかでなければならない。

従来、自由曲線の生成では、スプライン補間が用いられてきた。スプライン曲線では、与えられた点列を各点で微分値が連続となるように補間するが、曲率変化が滑らかになることは保証しない。そこで、曲率変化を滑らかにするために、スプラインを構成する点を除去した後に再挿入する方法⁵⁾や、弾性エネルギーが最小となる、すなわち線に沿って曲率や曲率の微分の自乗和が最小となる曲線形状を決定する方法⁶⁾が提案されている。しかし、これらの方法では、デザイナの欲する形状を規定できない。これに対し、曲率プロットを直接決定することが検討されている³⁾が、自由度の選択と規定が難しい⁷⁾。

そこで本研究では、滑らかな曲率プロットを得るため、与えられた境界条件のもとに縮閉線を決定し、この伸開線を目的とする曲線とする。さらに、これを有理 Bézier 式であてはめる。

本報では、まず第2節でデザイナの好ましいとする曲線の評価基準とその入力条件を明らかにする。第3節で縮閉線の性質を述べ、境界条件からの縮閉線の決定法を提案する。第4節で決定された縮閉線に対する伸開線を、有理 Bézier 曲線であてはめる方法を示す。

2. 滑らかな曲線の評価基準と入力曲率値の制約

デザイナは形状を設計するときに、カーブ定規やしない定規 (spline) などで曲線を描画するが、このとき一度で描画できる範囲を単位曲線と呼ぶことにする。単位曲線は、カーブ定規等で描画されるので、その曲率変化は非常に滑らかであり、美的意図によりその形状、すなわち曲率変化を示す曲率プロットが決定される。つまり、複合曲線では、単位曲線間のつなぎより単位曲線内の曲率変化がより重要である。また、デザイナは、複合曲線に対し、単位曲線を曲率変化が単調となる範囲として選択する。これは、曲率のピークや曲率がゼロとなる所では、カーブ定規や傾斜のついたしない定規の向きを変えなければならないことに対応する。

デザイナの単位曲線に対する形状入力への指定は、その境界点における幾何的な拘束条件を表す点位置、接線方向、曲率半径により行う。この結果、平面曲線である単位曲線についての境界条件は、図2に示す接線

Fig.2 Boundary condition

Fig.3 Experiment results of favorable curves for designers
s:arc length, κ :curvature, κ' :derivative of curvature

方向角度 α , β , 曲率半径 ρ_0 , ρ_1 となる。

筆者ら⁸⁾は、この単位曲線に対する滑らかな曲線の評価基準を、(1) 曲率が反転せず、(2) 曲率が単調に変化し、(3) 曲率プロットの変曲点が1個以下と設定した。デザイナが実際に、この評価基準により曲線を認識できるかどうかを確認するため、評価実験を行った。評価は、同一境界条件を満たす曲率プロファイルの異なる曲線を、A1 サイズの用紙に描画し、任意の位置からの目視による評価とした。評価における代表的な例を図3に示す。この結果より、デザイナは目視で曲率プロファイルの変化を認識でき、曲率が急に变化している箇所や、曲率プロットにおいて変曲点が2個以上現れるものは好ましくないと感じることが確認された。

評価基準の曲率変化が単調であるという条件を満足するには，境界条件として入力される曲率値に制約がある。つまり，図2において ρ_1 が辺 a に接するものより小さく， ρ_0 が ρ_1 の円と接する場合より大きくなくてはならない。この制約条件は次式となる。

$$\rho_1 < b \cos((\alpha + \beta)/2) \quad (1)$$

$$(a \cos \alpha + b \cos \beta - \rho_0 \sin \alpha - \rho_1 \sin \beta)^2 + (\rho_0 \cos \alpha - \rho_1 \cos \beta)^2 < (\rho_0 - \rho_1)^2 \quad (2)$$

この制約条件より，入力された境界条件を事前にチェックすることができる。

3. 縮閉線による曲線の生成

前節での評価基準を満足する曲線の生成法として，縮閉線から目的とする曲線を求める方法を提案する。まず，微分幾何⁹⁾における縮閉線および伸開線の定義を述べ，次に，縮閉線形状と伸開線の曲率プロットとの関係を調べる。この関係をもとに，縮閉線を有理2次 Bézier 曲線として決定する。

3.1 縮閉線の定義と伸開線の形状

曲線の曲率中心の軌跡，すなわち曲率プロファイルで半径を実寸とするものは，微分幾何における縮閉線 (evolute) である。逆に，縮閉線に糸を張って展開した曲線を，伸開線 (involute) という。曲率が0でない連続な曲線には，必ずこの縮閉線が存在する。たとえば，円は曲率半径が一定であるので縮閉線は点となり，円すい曲線では星形となる⁹⁾。

図4において，縮閉線の曲線長を s_e とすると，伸開線上の点 $\mathbf{R}(s_e)$ は定義より，

$$\mathbf{R}(s_e) = \mathbf{r}(s_e) + (\rho_0 - s_e)\mathbf{t}(s_e) \quad (3)$$

ここで $\mathbf{t}(s_e)$ は $\mathbf{r}$ の単位接線ベクトルで，

$\mathbf{R}$ の単位法線ベクトル $\mathbf{n}$ の逆向き

と表される。

この式より，縮閉線が決まれば対象とする曲線はその伸開線として定まる。伸開線の曲率半径 ρ は定義より

$$\rho = \rho_0 - s_e \quad (4)$$

であり，縮閉線の長さ l_e は， $\rho_0 - \rho_1$ となる。

これらの定義式に対し，縮閉線より伸開線の微分を導き，評価基準との関係を明らかにする。縮閉線の角度変化は伸開線のものと一致するので， $ds = (\rho/\rho_e)ds_e$ となる。よって，伸開線の曲率プロットにおける線長 s での1階微分 κ' と2階微分は，縮閉線および伸開

Fig.4 Evolute and involute

線の曲率を κ_e , κ とすると，

$$\kappa' \equiv \frac{d\kappa}{ds} = \frac{\kappa^3}{\kappa_e} \quad (5)$$

$$\frac{d^2\kappa}{ds^2} = \frac{\kappa^4}{\kappa_e^2} (3\kappa - \frac{\kappa'_e}{\kappa_e}) \quad (6)$$

$$\text{ここで, } \kappa'_e = \frac{d\kappa_e}{ds_e}$$

となる。同様に半径について表すと，

$$\rho' \equiv \frac{d\rho}{ds} = -\frac{\rho_e}{\rho} \quad (7)$$

$$\frac{d^2\rho}{ds^2} = \frac{\rho'^2}{\rho_e} (\rho' - \rho'_e) \quad (8)$$

$$\text{ここで, } \rho'_e = \frac{d\rho_e}{ds_e}$$

となる。

対象曲線の曲率プロットが単調であるためには， κ' が常に正 ($\alpha < \beta$ のとき) でなければならず，式(5)において， κ の符号が曲率が反転しないことより一定であるので，縮閉線の曲率 κ_e の符号が一定であればよい。曲率プロットの変曲点が1個以下であるためには，式(6)より曲率の変曲点は， $3\kappa = \kappa'_e/\kappa_e$ となる点であるので，この大小が2回以上入れ替わらなければよい。また，式(3)，(4)より，縮閉線が接線連続 (G^1 連続) であれば，伸開線は曲率連続 (G^2) となり，式(5)，(6)より伸開線が高次の曲率連続，たとえば， G^3 ， G^4 連続となるには，縮閉線は G^2 ， G^3 連続であれば良く，伸開線の連続性は，縮閉線では1次だけ次数の下ったものとなる。

3.2 縮閉線による曲線の生成

対象曲線の境界条件を，縮閉線の境界条件に置き換えると，図5に示すように，両端の座標値，接線方向が規定され，かつ線長が規定される。図5よりわかるように，線長の長さが三角形 $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$ の辺長

Fig.6 Examples of generated curves

Fig.5 Rational 2nd degree Bézier curve

$P_0P_1 + P_1P_2$ に近づけば、縮閉線は頂点 P_1 に近づき、縮閉線の曲率半径は中央部分で極小値を持ち、曲率プロットは、ここで変曲点を持つ。長さが辺長 P_0P_2 に近づけば、伸開線は、両端での曲率半径 ρ_0 と ρ_1 の円弧が中央で急変するような形状となり、縮閉線はほぼ直線的な線になる。つまり、境界条件により大まかな曲線の形状が決定されることがわかる。

これらの境界条件を満足する縮閉線を、円すい曲線、すなわち有理 2 次 Bézier 曲線として決定する。これは、円すい曲線が滑らかな曲線であり、境界条件を満たす最小の自由度を持つためである。有理 2 次 Bézier 曲線を

$$\mathbf{r}(t) = \frac{(1-t)^2\mathbf{P}_0 + 2(1-t)t\omega\mathbf{P}_1 + t^2\mathbf{P}_2}{(1-t)^2 + 2(1-t)t\omega + t^2} \quad (9)$$

と表す。縮閉線の境界条件より、有理 2 次 Bézier 曲線の制御点 P_0 、 P_2 が定まり、接線方向の交点として P_1 が定まる (図 5 参照)。残る自由度は、 P_1 におけ

Fig.7 Regions for a number of inflection points of a curvature plot

るウェイト ω のみとなり、これを縮閉線長 l_e より決定する。線長をシンプソン式で積分し、 ω を割線法 (secant 法) による収束計算で求める。

3.3 生成される曲線形状

以上の生成法により生成された曲線の例を曲率プロットと曲率変化率プロット (κ' の線長に対する表示) と共に図 6 に示す。この図は、境界条件を $\alpha = 35^\circ$ 、 $\beta = 45^\circ$ 、 $\rho_0 = 1.25$ とし、終点での曲率半径を、曲率が単調となる境界条件の範囲で変化させたときの生成例である。与えられた境界条件に対し生成される曲線の多くは、図 6 のように曲率プロットが滑らかに変化し、評価基準を満たす。 ρ_1 が大きい場合は、曲率プロットは曲線中央で急に変化するものとなり、逆に ρ_1 が小さい場合は、曲率プロットは中央部で水平となり、端点付近で急に変化するものとなる。この中間で $\rho_1 = 0.59$ の曲線のように、曲率の変曲点が 2 個存在

Fig.8 Rational 3rd degree Bézier curve

するものがある。しかし、曲率プロットはうねりの小さい曲線となっており、曲線の滑らかさから言うときほど問題とはならない。この評価基準を満たさない曲線が存在範囲は、図7に示す曲率プロットの変曲点個数分布において黒塗りの部分となり、非常に小さい領域である。

4. 有理 Bézier 式による表現

4.1 近似法

以上で求めた縮閉線では、目的とする曲線の伸開線が複雑な式で表されているので、曲面などへの展開が困難である。そこで、縮閉線から生成される曲線を基準線とし、これを有理3次Bézier曲線で近似する。有理3次Bézier曲線を選んだ理由は、楕円、双曲線などの円すい曲線を表現でき、かつ、境界条件に対し自由度が最小となるためである。

有理3次Bézier曲線を

$$\mathbf{r}(t) = \frac{(1-t)^3 \mathbf{P}_0 + 3(1-t)^2 t \omega_1 \mathbf{P}_1 + 3(1-t)t^2 \omega_2 \mathbf{P}_2 + t^3 \mathbf{P}_3}{(1-t)^3 + 3(1-t)^2 t \omega_1 + 3(1-t)t^2 \omega_2 + t^3} \quad (10)$$

とする。 $\mathbf{P}_i$, ω_i は制御点とウェイトである。端点での曲率が指定されると、ウェイト ω_1 , ω_2 は次式のように制御辺長 a と b で表される。

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{2}{3} \sin(\alpha + \beta) \sqrt{\frac{(A-a)(B-b)^2}{a^4 b^2 \kappa_0^2 \kappa_1}} \\ \omega_2 &= \frac{2}{3} \sin(\alpha + \beta) \sqrt{\frac{(A-a)^2 (B-b)}{a^2 b^4 \kappa_0 \kappa_1^2}} \end{aligned} \quad (11)$$

制御辺長 a , b を未知数として有理3次Bézier曲線を決定する。この方法として、有理3次Bézier曲線の曲率プロットの端点での傾きを、基準線の曲率プロットの傾きと一致させるようにする。基準線の傾き角度を θ_{e0} , θ_{e1} , 有理3次Bézier曲線の傾きを θ_0 , θ_1 とすると、この2つを同時に等しくすることはできない。よって、この角度の差の二乗和

$$M = (\theta_{e0} - \theta_0(a, b))^2 + (\theta_{e1} - \theta_1(a, b))^2 \quad (12)$$

 (a) $\alpha=35^\circ$, $\beta=45^\circ$, $\rho_0=1.67$, $\rho_1=0.20$

 (b) $\alpha=35^\circ$, $\beta=45^\circ$, $\rho_0=0.96$, $\rho_1=0.51$

Fig.9 Example of generated rational Bézier curves

を最小とする。 a , b の偏微分は最小値で

$$M_a = \frac{\partial M}{\partial a} = 0, M_b = \frac{\partial M}{\partial b} = 0 \quad (13)$$

となり、これより a , b を定める。この式は複雑であるので、 a , b による空間で解を探索する。まず、この空間を 20×20 分割し、 $M_a = 0$ を含む格子を求める。求められた格子について、 M_b の符号が反転していれば、その格子をさらに分割し、トレランス以下で $M_a = M_b = 0$ となる解を探索する。このようにして求めた極値のうちで、 M が最小となる場合を解とする。

有理Bézier曲線と基準線との誤差が設定トレランスを越えたり、新たな変曲点が生じていれば、基準線を分割して再近似してゆく。求めた有理3次Bézier曲線群は、曲率連続となるように定められており、曲率プロットが滑かとなるG²NURBS (Non-Uniform Rational B-Spline) となる。

4.2 適用結果

適用結果の例を図9に示す。右図は、縮閉線、基準線および求めた有理3次Bézier曲線を重ねて表示している。左図に縮閉線の曲率プロットと曲率変化率プ

Fig.10 Compound curve and boundary conditions

ロットを示す。(a)は1セグメントの有理3次Bézier曲線で近似され、(b)は5セグメントの有理3次Bézier曲線で表されている。共に基準線と有理3次Bézier曲線がよく一致している。(b)の κ' は、分割点(図の黒丸)において一致していないが、非常に小さな差となっており、ほぼ G^3 連続なNURBSとなっている。

次に、単位曲線が複数組み合わせた複合曲線の例を示す。図10では、デザイナーは3つの単位曲線について4か所の境界条件を入力する。初期の入力に対し生成された曲線を(1)に示す。各単位曲線は、曲率変化が滑らかであるが、複合曲線としての曲率プロファイルに尖点がある。境界条件の1つの曲率半径 ρ_1 を変更すると(2)に示す形状に修正できる。このように入力値を変更することにより、単位曲線ごとに滑らかさを満たし、かつ、全体としての調整を行なうことができる。

5. ま と め

デザイナーの好ましいとする曲線の評価基準を設定し、これを満足する曲率変化の滑らかな曲線を生成する方法を提案した。

本方法は、

- (1) デザイナーの形状に対する意図を幾何的な境界条件として与え、これを満足するように縮閉線を出す曲線として定める。
- (2) この縮閉線に対する伸開線を、有理3次Bézier曲線として近似する。

ものである。

本方法では、縮閉線により直接曲率変化を規定しているため、生成された曲線は、曲率変化のレベルまで滑らかとなり、デザイナーの意図を満足することが確認された。また、従来、表現力はあるがその自由度の制御が難しいとされていた¹⁰⁾NURBSについて、これを曲率変化を滑らかとする曲線生成に適用し、その自由度と表現力を有効に活用することができた。

最後に本研究にあたり、助言を頂いた東京電機大学穂坂衛教授に感謝の意を表する。

参 考 文 献

- 1) M. Higashi, I. Kohzen and J. Nagasaka: An Interactive CAD System for Construction of Shapes with High-Quality Surface, in: E.A. Warman(ed), Computer Applications in Production and Engineering CAPE'83, North-Holland, Amsterdam, (1983) 371.
- 2) R. Klass: Correction of Local Surface Irregularities using Reflection Lines, Computer-aided Design, **12**, 2 (1980) 73.
- 3) G. Farin and N. Sapidis: Curvature and the Fairness of Curves and Surfaces, IEEE Computer Graphics and Applications, **9**, 2 (1989) 215.
- 4) 東 正毅, 近藤 学: 曲面の基本的性質の解明と美的意匠曲面の評価—等主曲率線, 曲率極値線による曲面の解析—, 精密工学会誌, **59**, 3 (1993) 441.
- 5) G. Farin, G. Rein, N. Sapidis and A.J. Worsey: Faring Cubic B-spline Curves, Computer Aided Geometric Design, **4** (1987) 91.
- 6) H. Meier and H. Nowacki: Interpolating Curves with Gradual Changes in Curvature, Computer Aided Geometric Design, **4** (1987) 297.
- 7) 野津 正人, 東 正毅: 曲率プロファイルに基づく曲線生成法, 1991年度精密工学会春季大会論文集, (1991) 1113.
- 8) 東 正毅, 金子光司: 曲率変化の滑らかな曲線の評価基準と創成法, 精密工学会誌, **55**, 1 (1989) 99.
- 9) 安達忠次: 微分幾何学概説, 培風館, (1976).
- 10) G. Farin: Rational Curves and Surface, in: T. Lyche, L.L. Schumaker(eds), Mathematical Methods in Computer Aided Geometric Design, Academic Press, San Diego, (1989) 215.