形状創成関数理論による工作機械の誤差解析*

春 本 玲 子** 稲 崎 一 郎***

Error Analysis of Machine Tools Using Form Shaping Function

Reiko HARUMOTO and Ichiro INASAKI

The need for higher accuracy on machined components is always a matter of concern. Accuracy of machined component is determined by the relative motion between the cutting tool and the workpiece. One of the important factors which affects the accuracy of this relative motion is the geometric error of machine tools. Therefore, it is necessary for relating the geometric errors of each structural element to the resultant cutting point error. In this study, for the expression of the relative motion of machine tool elements, a mathematical model utilizing homogeneous transformation matrix multiplications is developed assuming the rigid body kinematics. By applying proposed mathematical model, each geometric error which affects the resultant error can be identified separately. The influence of characteristic configurations of machine tools on the machining error is also investigated.

Key words: machine tool, form shaping function, geometric error, machining error, identification of error

1. 緒 言

近年、科学技術の発達に伴い、各種部品や製品に対して高機能・高品質化が求められている。これらの製品の中には極めて高い精度を要求されるものも多く、従ってそれらを生産する工作機械の精度向上の要求も高まっている。加工精度は工具と工作物の相対運動の精度に依存する。すなわち、近代工作機械の基本となっている母性原理によれば、加工精度は工作機械の総合的な幾何学的精度の転写されたものであるといえる。従って工作機械の各構成要素の幾何学的誤差を解析し、それらが加工形状にどのような影響を及ぼすかを知らなくては高精度加工に不可欠である。

工作機械の創成運動と加工形状との関係を数学的に解析したものに Portman¹⁾、稲村²⁾らの研究がある。また、この理論に立脚して、工作機械の創成運動を解析した研究も行われている³⁾。本研究ではこれらの理論をもとにして、工作機械の幾何学的誤差要因を分析し、それらを考慮した形状創成運動の数学モデルを構築した。さらにこの理論を適用して、工作機械の誤差解析を行った。

2. 工作機械の創成運動の数学モデル

工作機械の創成運動の数学モデルの概念図を図1に示す。工作機械を工作物から始まり工具で終わる剛体の連鎖と考え、各要素に固有の座標系 S_i ($i=0, 1, \dots, l$) を与える。各要素の運動を隣接する座標系間の相対運動と考えると、形状創成運動は各座標系間の相対運動の重畳とみなすことができる。いま工作機械の構成要素を剛体と仮定すると、剛体の運動は6自由度あるので、相対運動 k を以下のように1から6の数

Fig. 1 Mathematical model for generating motion of machine tools

* 原稿受付 平成4年4月7日

** 正会員 慶應義塾大学大学院 (現, (株)東芝, 横浜市磯子区新磯子町33)

*** 正会員 慶應義塾大学理工学部 (横浜市港北区日吉3-14-1)

字で表すことができる。

X 軸方向の並進運動……… $k=1$

Y 軸方向の並進運動……… $k=2$

Z 軸方向の並進運動……… $k=3$

X 軸まわりの回転運動……… $k=4$

Y 軸まわりの回転運動……… $k=5$

Z 軸まわりの回転運動……… $k=6$

隣接する要素 S_{i-1} と S_i の相対運動は 1 自由度であるので、この座標系間の相対運動は上記の数字のいずれかによって表現される。この数字を工作機械構成要素の連鎖の順に並べたものを座標コード k と定義する。

$$k = k_1 k_2 \cdots k_l \quad (1)$$

このように座標系を設定し、運動形態を示すコードを設定することにより、工作機械の創成機能を数学的に表現することができる。さらに絶対運動において静止した構成要素（たとえばベッドなど）の位置を表すために、式 (1) において、その静止した要素が座標系 S_i の時の k_i の右側に 0 を加えることにより、構造コード K を定義する。すなわち、

$$K = k_1 k_2 \cdots k_i 0 k_{i+1} \cdots k_l \quad (2)$$

となる。これにより工作機械の構造を数学的に表現することができる。

さらに、この連鎖において各要素間の相対運動に対応した同次座標変換を順次行うことにより、工具の座標系 S_l における工具の加工点の位置ベクトルは、最終的に工作物の座標系 S_0 に変換される。従って工具と工作物の相対運動、すなわち形状創成関数は以下のように表すことができる。

$$\mathbf{r}_0 = A^1 A^2 \cdots A^i \cdots A^l \mathbf{r}_l \quad (3)$$

ここで $\mathbf{r}_l$ は工具の位置ベクトルである。また A は上記 $k=1 \sim 6$ の相対運動に対応する同次座標変換行列で、表 1 のようになる。

3. 工作機械の幾何学的誤差を考慮した数学モデル

工作機械の加工精度に影響を及ぼす要因は種々あるが、本研究では、加工精度は工作機械の幾何学的精度の転写されたものとみなして、工作機械に幾何学的誤差が存在する場合の数学モデルを構築する。ここでは図 2 のマシニングセンタ（以下 MC と略す）を例に取り上げる。この MC の形状創成関数は式 (3) より、

$$\mathbf{r}_0 = A^1(x) A^2(y) A^3(z) A^6(\theta) \mathbf{r}_l \quad (4)$$

となる。ここで式 (4) には並進、あるいは回転運動の

Table 1 Homogeneous transformation matrices

		Relative motions k	Homogeneous transformation matrices A
Rotational around axis	X axis	1	$A^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
			$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
			$A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
	Y axis	2	$A^4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
			$A^5 = \begin{bmatrix} \cos \psi & 0 & \sin \psi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \psi & 0 & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
			$A^6 = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
Translational along axis	X axis	4	$A^4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
	Y axis	5	$A^5 = \begin{bmatrix} \cos \psi & 0 & \sin \psi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \psi & 0 & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
	Z axis	6	$A^6 = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Fig. 2 Structure of machining center

移動量を表す変数しか含まれていない。しかし工作機械の幾何学的誤差を考慮する際、工作機械の構成要素の寸法の大小により、加工誤差の値が異なるため、構成要素の寸法も考慮する必要がある。従ってこの MC の構成要素の寸法を考慮した数学モデルは図 3 のようになり、形状創成関数 $\mathbf{r}_0'$ は、

$$\mathbf{r}_0' = A^3(-B_x) A^1(x) A^3(-B_y) A^2(y) A^2(-L_z) A^3(B_y + B_x + l) A^3(z) A^2(L_z) A^3(-l) \mathbf{e} \quad (5)$$

Fig. 3 Mathematical model for generating motion of machine tools considering size of elements

となる。ここで B_x, B_y は X, Y テーブルの厚さ, L_z は主軸頭の Y 方向の長さ, l は工具長さである。 $A^3(\pm B_x)$, $A^3(\pm B_y)$, $A^2(\pm L_z)$, $A^3(\pm l)$ は構成要素が実際に相対運動をしているのではなく、構成要素の寸法分だけ座標系を移動させているだけである。したがって、相対運動を表している同次座標変換行列は $A^1(x)$, $A^2(y)$, $A^3(z)$ のみである。また簡単のため工具は点接触工具と仮定し、加工面との接触点を原点にとった。すなわち、 $e = (0, 0, 0, 1)^T$ である。

いま、ある要素間に誤差が存在し、それらが微小で加算可能、すなわち線形であるとする、一般に誤差ベクトル Δr は次式で表される。

$$\Delta r = \epsilon r$$

$$\epsilon = \begin{bmatrix} 0 & -\gamma & \beta & \delta_x \\ \gamma & 0 & -\alpha & \delta_y \\ -\beta & \alpha & 0 & \delta_z \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

ここで ϵ は誤差を表す行列で、 $\delta_x, \delta_y, \delta_z$ はそれぞれ X, Y, Z 軸に沿う並進誤差、 α, β, γ はそれぞれ X, Y, Z 軸まわりの回転誤差である。たとえば、X テーブルに X 方向の並進誤差、すなわちスケール誤差 δ_{xx} が存在する場合の誤差ベクトルは、

$$\Delta r = A^3(-B_x)A^1(x)\epsilon A^3(-B_y)A^2(y)A^2(-L_z)A^3(B_y+B_x+l)A^3(z)A^2(L_z)A^3(-l)e$$

$$\epsilon = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \delta_{xx} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

となる。このような誤差が工作機械の各要素間に存在

Table 2 Error factors

	X table	Y table	Spindle head
Positional errors	δ_{xx}	δ_{yy}	δ_{zz}
Translational errors	$\delta_{yx} \ \delta_{zx}$	$\delta_{xy} \ \delta_{zy}$	$\delta_{xz} \ \delta_{yz}$
Rotational errors	Yawing	γ_x	γ_y
	Pitching	β_x	α_y
	Rolling	α_x	β_y
Errors in rectangularity between X and Y axis : c_{xy} Y and Z axis : a_{yz} X and Z axis : b_{xz}			

Fig. 4 Computer simulations of machining error

すれば、全体の加工誤差は、これらの重畳により表される。したがって、この MC の形状創成誤差関数 Δr は以下のようにになる。

$$\Delta r = \begin{bmatrix} \delta_{xx} + \delta_{xy} + \delta_{xz} - (\gamma_x + \gamma_y + c_{xy})y + (\beta_x + b_{yz})z \\ + \beta_x B_x - (\gamma_x + \gamma_y)Y_p + \beta_x Z_p + b_{yz}B - \beta_z l \\ \delta_{yy} + \delta_{yx} + \delta_{yz} + \gamma_x x - (\alpha_y + a_{xy} + a_{yz})z \\ + \gamma_x X_p - \alpha_y Z_p - (\alpha_y + a_{xy} + a_{yz})B + \alpha_z l \\ \delta_{zz} + \delta_{zx} + \delta_{zy} - \beta_x x + (\alpha_y + a_{xy})y \\ - \beta_x X_p + \alpha_y Y_p + (\alpha_z + a_{yz})L_z \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

式 (8) に含まれる工作機械構成要素の幾何学的誤差のパラメータを表 2 にまとめる。ただし、式 (8) における a_{xy} は XY 平面が絶対座標系の XY 平面に対して X 軸回りの回転誤差をもつことを示している。また、X テーブル、Y テーブル、主軸頭ともローリングが生じたとしても、これらは微小な量なので、これらのローリング $\alpha_x, \beta_y, \gamma_z$ は省略した。さらに X_p, Y_p, Z_p は、工作物に設定した座標系 S_0 と X テーブルに設定した座標系 S_1 の原点のオフセット量である。図 4 に、X テーブルと Y テーブルの間に直角度誤差が 0.005° 存在する MC に、円弧運動させた場合の工具先端の軌跡をコンピュータシミュレーションしたも

Fig. 5 Process of identification of geometric errors of machining center

のを示す。ただし誤差は半径方向に2000倍してある。MCに誤差が存在しなければ得られる軌跡は真円となるが、この場合は楕円になることが図から確かめられる。

このように形状創成誤差関数を求めて、コンピュータシミュレーションを行うことにより、工作機械の誤差が加工形状にどのような影響を及ぼすかを予測することが可能である。

4. 円弧運動の結果を用いた工作機械の誤差要因の推定

最近、NC工作機械の精度を総合的に評価できるものとして、円弧補間精度試験が多数使用されている。この方法は単一の誤差要因から定まる軌跡パターンをあらかじめ求めておき、それらの軌跡パターンと実際に円弧補間精度試験により得られた結果を比較して誤差要因の推定を行っているため⁴⁾、誤差要因が複数存在する場合は軌跡パターンが複雑なものとなり、誤差要因の推定は困難となる。本研究では円弧運動の結果から、工作機械の幾何学的誤差要因を推定する手法を構築した。

図5に工作機械の幾何学的誤差要因の同定の手順の一例をフローチャートにして示す。ただし、Xテーブル、Yテーブル、主軸頭の各軸のスケール誤差は測定により既知であるとした。いま、水平送り台のピッチングを求める場合、図6のように、まずXY面内の測定場所1で円弧運動を行う。この場所での円運動の半径誤差 Δr_{n1} は、式(8)において $X_p = Y_p =$

Fig. 6 Measuring positions for obtaining pitchings

$Z_p = 0$ として形状創成誤差関数 Δr_1 を求め、これに円の半径方向の法線ベクトル $\mathbf{n} = (\cos \theta, \sin \theta, 0, 0)^T$ を乗じれば求められるので、

$$\begin{aligned} \Delta r_{n1} &= \Delta \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{n} \\ &= \{\delta_{xx} + \delta_{xy} + \delta_{xz} - (\gamma_x + \gamma_y + c_{xy})y \\ &\quad + (\beta_x + b_{yz})z + \beta_x B_x + b_{yz} B - \beta_z l\} \cos \theta \\ &\quad + \{\delta_{yy} + \delta_{yx} + \delta_{yz} + \gamma_x x - (\alpha_y + a_{xy} + a_{yz})z \\ &\quad - (\alpha_y + a_{xy} + a_{yz})B + a_z l\} \sin \theta \end{aligned} \quad (9)$$

となる。次にZ方向に Z_p オフセットして円弧運動を行い、同様に測定場所2の半径誤差 Δr_{n2} を求めると、

$$\begin{aligned} \Delta r_{n2} &= \Delta \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{n} \\ &= \{\delta_{xx} + \delta_{xy} + \delta_{xz} - (\gamma_x + \gamma_y + c_{xy})y \\ &\quad + (\beta_x + b_{yz})z + \beta_x B_x + \beta_x Z_p + b_{yz} B - \beta_z l\} \cos \theta \\ &\quad + \{\delta_{yy} + \delta_{yx} + \delta_{yz} + \gamma_x x - (\alpha_y + a_{xy} + a_{yz})z \\ &\quad + \alpha_y Z_p - (\alpha_y + a_{xy} + a_{yz})B + a_z l\} \sin \theta \end{aligned} \quad (10)$$

となる。これら2円の半径誤差の差を求めると、

Fig. 7 Structures of machining center

$$\Delta r_{n2} - \Delta r_{n1} = \beta_x Z_p \cos \theta - \alpha_y Z_p \sin \theta \quad (11)$$

となる。式(11)より、円弧運動で得られた軌跡において、 $\theta=0^\circ$ における2円の半径誤差の差を求めると、Xテーブルのピッチング β_x が求められ、 $\theta=90^\circ$ で求めるとYテーブルのピッチング α_y が得られる。同様にXY, YZ, XZ各面内でX, Y, Z各軸方向にオフセットして円弧運動を行い、一方、各面内での形状創成誤差関数、および各軸方向にオフセットした位置での形状創成誤差関数を求め、それらを考察することにより、工作機械の幾何学的誤差要因を同定することができる。

5. 誤差要因を考慮した工作機械構造の評価

ある形状のものを加工するにあたり、その加工を可能にする工作機械の構造にはいくつかのものが考えられる。工作機械の構造を評価するための評価項目は種々あるが、本研究では加工における重要な問題の一つである工作機械の誤差と加工誤差との関係を検討し、その結果から工作機械構造の評価をMCを例に行う。

MCの構造には種々のものが存在するが、本研究では基本的な構造である $k=123$ のMCを取り上げ、図

7のようにベッドの位置が異なる $K=0123, 1023, 1203, 1230$ の4種類のMCについて検討する。図7の各MCの構成要素の同じところに、同じ大きさの幾何学的誤差を仮定して、それぞれ形状創成誤差関数を求め、工作機械の誤差が加工形状に及ぼす影響をコンピュータシミュレーションした結果を図8に示す。仮定した工作機械の誤差は以下の通りである。X, Yテーブル、及び主軸頭のスケールが伸び率 $0.1 \mu\text{m}/\text{mm}$ で一様に伸びているとした。またX, Yテーブル、主軸頭にローリングが 0.003° 、各軸間に直角度誤差が 0.005° あるものとした。さらに各スケールに位置の2次の関数で表現される真直度誤差があるものとし、その比例定数を $1 \times 10^{-4} \mu\text{m}/\text{mm}$ とした。また真直度誤差に伴い、回転誤差（ヨーイング、ピッチング）が生じるものとし、その値は真直度誤差の傾きをとった。加工誤差に影響を与える各MCの構成要素の寸法は、工具突出し量 $l=80 \text{ mm}$ 、X, Yテーブルの厚さ $B_x=200 \text{ mm}$ 、 $B_y=200 \text{ mm}$ 、YテーブルのY方向長さ $2L_y=800 \text{ mm}$ 、主軸頭のY方向長さ $L_z=500 \text{ mm}$ と仮定した。シミュレーションを行った加工領域は、XY面内における一辺400 mmの正方形であり、加工誤差は1000倍してある。また表3に、こ

Fig. 8 Computer simulations of machining error

Table 3 Values of machining error

Structure	$\Delta X_{\max} - \Delta X_{\min}$ mm	$\Delta Y_{\max} - \Delta Y_{\min}$ mm	$\Delta Z_{\max} - \Delta Z_{\min}$ mm
0123	0.123	0.108	0.132
1023	0.163	0.079	0.132
1203	0.067	0.020	0.060
1230	0.067	0.020	0.060

の加工領域内での X, Y, Z 方向の加工誤差, すなわち $\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$, の最大値と最小値の差の絶対値を示す。いま, この加工は XY 面内の加工であるので, Z 方向の加工誤差 ΔZ が重要である。表 3, 及び図 7 から, ΔZ が小さいものは $K=1203$ もしくは $K=1230$ の構造の MC により加工を行った場合であり, XY 面内の加工にはこれらの MC が望ましいことになる。

6. 結 論

本研究で得られた結果を以下にまとめる。

- (1) 工作機械の各構成要素の幾何学的誤差を数学的に表現し, これらを考慮して工作機械の形状創成運動を一般的に表す数学モデルを構築した。
- (2) 構築した数学モデルを用いて, 工作機械の誤差要因を同定する手法を確立した。
- (3) 工作機械の誤差が加工形状に及ぼす影響を検討し, その結果から工作機械構造の評価を行った。

参 考 文 献

- 1) D. N. Reshetov and V. T. Portman: Accuracy of Machine Tools, ASME Press, (1988).
- 2) 稲村豊四郎ほか: 幾何学的誤差モデルを利用したマシンングセンタの精度検査, 精密機械, 51, 5 (1985) 1060.
- 3) 階戸紀男, 石沢浩二, 田中文基, 岸浪建史, 山田 誠: 工作機械の形状創成運動モデルと加工形状モデルに関する研究 (第 2 報)——加工形状測定による形状創成運動モデルの推定, 精密工学会春季大会学術講演会講演論文集, (1991) 1099.
- 4) 垣野義昭, 井原之敏, 篠原章翁: DBB 法による NC 工作機械の精度評価法, リアライズ社, (1990).