凸多面体の類似判定について*

—頂点数の異なる場合—

向井伸治** 古川 進*** 小尾 誠*** 木村文彦† 佐田登志夫††

An Algorithm for Deciding Similarities of Convex Polyhedra
— The Case of Objects with Unequal Number of Vertices —

Shinji MUKAI, Susumu FURUKAWA, Makoto OBI, Fumihiko KIMURA and Toshio SATA

The problem of deciding whether two objects are similar or not is very important in the classification of shapes of objects for robot vision and in the creation of knowledge based systems. This paper describes a method for determining the similarities of two convex polyhedra with unequal number of vertices. The method presented for deciding the similarities of objects with equal number of vertices is extended with the following concepts: (1) In order to calculate the degree of similarity, a method for equalizing the number of vertices between two objects is introduced. (2) The additional factor affecting the similarity, which represents the difference in the number of vertices between two objects, is considered. The results of similarity tests on some kinds of objects show that the method is good for deciding similarities.

Key words: similarity of convex polyhedra, computational geometry, shape modeling, CAD/CAM

1. 緒 言

3次元立体形状の分類に関する問題は、たとえば形状から機能を類推したり、ロボットの目を通して入力された画像情報より再構成された立体モデルを理想形状モデルとマッチングするときなどに必要となる工学习上極めて重要な課題の一つである。著者らは前報¹⁾において、立体形状を分類するための第一歩として、頂点数の等しい凸多面体を対象に類似判定を実現するための処理アルゴリズムを提案した。

しかし現実には、頂点数が異なっている場合でも、形状の類似性が認められることがあり得るので、この問題への対応が必要となる。たとえば、多数の頂点から形成される立体では、わずかな頂点数の違いは形状の差異にさほどの影響を与えず、極めて類似することが考えられる。また、比較の基準となる立体に対して、ある頂点付近を切断して形成されるような立体や、任意の面に近接して1頂点が存在するような立体などでは、類似する場合もあり得る。

本論文においては、頂点数の等しい凸多面体の類似

判定の方法^{1)~3)}を基礎として、異なる頂点数から構成される凸多面体の類似性を識別する方法を考察する。

従来、類似形状立体の識別、分類問題に対するアプローチは極めて少なく、その特別な場合としての合同形状および相似形状の同定の問題を扱った研究が報告されているのみである^{4)~6)}。

以下では、まず本手法の基本となる頂点数の等しい立体の類似判定アルゴリズムの要点について述べる。次に、このアルゴリズムを適用して頂点数の異なる立体の類似判定を実現するうえの問題点を整理するとともに、その解決策としての処理手続きの改良・開発部分を示す。ここでは頂点の増減により頂点数を同一にする方法ならびに類似部分を抽出する方法を提案する。さらに、類似性評価のために頂点数の差異を表す尺度を新たに導入する。最後に、各種の立体の類似判定実験結果について述べ、本手法の有効性を示す。

2. 頂点数が等しいときの類似判定アルゴリズム¹⁾

本章では、頂点数が異なる場合の類似判定問題を考察する準備として、先に報告した頂点数が等しい場合の類似判定アルゴリズムについて簡単に述べる。

本アルゴリズムは、次の4ステップから構成される。

* 原稿受付 平成4年6月26日

** 正 会 員 前橋市立工業短期大学(前橋市上佐島町460)

*** 正 会 員 山梨大学工学部(甲府市武田4-3-11)

† 正 会 員 東京大学工学部(東京都文京区本郷7-3-1)

†† 正 会 員 理化学研究所(和光市広沢2-1)

Fig. 1 Algorithm for deciding the similarities of two convex polyhedra

- (1) 比較する立体同士の位置合わせのために、各立体に固有な座標系を設定する。
- (2) 頂点の照合を行い、一対一の対応関係を決定する。
- (3) 類似度を算出し、形状の類似性を判定する。
- (4) 相連部分を識別する。

図1に、立体モデルで表した類似判定の流れ図を示す。以下の説明においては、2つの凸多面体を区別して扱うために、一方を基準凸多面体A、他方を比較凸多面体Bとして表示する。

固有な座標系の設定に当たっては、図2に示す距離分布表を用いる。これは、図心 G_c と各頂点 V_i との距離 d_i ($i=1, 2, \dots, n$)を求め、その最小値 d_{min} と最大値 d_{max} の範囲を頂点の数 n で等分割した表に、それぞれの頂点に対応させたものである。この表より、座標軸を設定するための2頂点を抽出する。立体Aについては、頂点の分布密度の低い2つの要素を選

Fig. 2 Distribution tables of distances between centroids and vertices

Fig. 3 Distribution tables of angles of vertices in the spherical coordinates

ぶ。それぞれの要素から距離の最大の頂点 V_{max1} , V_{max2} を抽出する。立体Bにおいては、立体Aで選出された要素に対応した要素とその前後の要素に存在する頂点のすべてを、座標軸決定のための候補点とする。図心 G_c を新しい座標系の原点とし、ベクトル $\overrightarrow{G_c V_{max1}}$ をX軸の正方向に定める。Z軸は、外積 $\overrightarrow{G_c V_{max1}} \times \overrightarrow{G_c V_{max2}}$ で定める方向とする。

頂点の照合においては、図3に示す頂点の角度分布表を利用する。この表は、Z軸を立体の中心軸と見立てたときの各頂点の経度 θ 、緯度 ϕ を計算し、便宜的に θ, ϕ の定義域を $\sqrt{n}$ 等分した分割表の該当位置に各頂点に対応させたものである。この2つの角度分布表を用いて、頂点の対応関係を見出す。立体Aの1頂点に注目すれば、その頂点が存在する同一の要素とその周辺の要素に存在するすべての頂点に対応関係を求める候補点とする。当該頂点と候補頂点との頂点間距離を求め、それが最小のものと対応させる。

このような2種類の分布表を用いることにより、立体の位置合わせならびに頂点の照合を効率的に行うことができ、演算時間の短縮化が図れる。

類似度は、対応する頂点位置のずれに着目して、次式に示す μ, σ で定義する。

$$\mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{e_i}{d_i^A} \quad (1)$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{e_i}{d_i^A} - \mu \right)^2} \quad (2)$$

ここで、 e_i は対応する頂点間の距離、 d_i^A は立体 A における図心-頂点間距離を表す。すなわち、 μ は各頂点の相対的なずれの平均であり、 σ はその標準偏差である。 μ, σ の値が零に近いほど両立体はよく類似していることになり、逆に大きくなるにしたがって、形状の差異は大きくなる。特別な場合として、 $\mu=0$ のときは合同形であり、 $\sigma=0$ のときは相似形となる。

最終ステップにおいては、類似の程度を論理的に保証するために、判定の必要性に応じて立体の重ね合わせを行い、対応頂点のずれの有無によって形状の相違部分と合同部分を識別する。

3. 頂点数が異なる場合への適用上の問題点とその対応

頂点数が異なる凸多面体の類似判定問題を扱うに際して、頂点数の等しいときの類似判定アルゴリズムはそのまま適用できず、いくつかの問題点が生ずる。この適用上の問題点とそれへの対応について整理すると、次のとおりである。

- (1) 比較する 2 立体において頂点数の数が異なるため、距離分布表ならびに角度分布表の要素数が同一にならない。すなわち、要素の対応関係が定まらないので、固有な座標系の設定、頂点の照合が望ましく行えない。したがって、2 立体で各分布表の要素数を統一することが必要となる。
- (2) 頂点数の相違と頂点の空間分布密度の偏りにより、2 つの立体の図心位置が乖離する場合がある。その結果、図心-頂点間距離の分布状況が大きく異なり、固有な座標軸が望ましく設定できず、頂点の対応関係が良好に定まらないことがあり得る。したがって、頂点の分布状況が偏る場合には、固有な座標系の原点（図心）を再設定する操作を要する。
- (3) 頂点の照合においては、2 立体の頂点数の差分だけ対応関係が定まらない頂点が現れる。このとき、重複して対応関係を求めるか、または頂点の増減によりあらかじめ頂点数を同一にしてから、一対一の対応関係を求めるといった操作が必要になる。これには、近接頂点の識別と頂点の減少法、突出頂点の識別と頂点の増加法を適用する。
- (4) 類似性の識別においては、式 (1), (2) に示す

類似度を用いることを基本とするが、頂点数の異なる立体の類似性を説明するには、これに加えて、頂点数の違いを表す尺度を導入する必要があると考えられる。

4. 頂点数が異なるときのアルゴリズムの構築⁷⁾

本章では、3 章で述べた問題点を解決するための方法を中心に考察する。以下においては、便宜的に頂点数の少ない方を立体 A、多い方を立体 B として扱う。

4.1 分布表の修正と座標原点の再設定

1) 分布表の要素数の統一

距離分布表および角度分布表の要素数は頂点数の数に依存して決まるが、固有な座標系を設定し、頂点の対応関係を求めるに当たり、頂点数の多い立体 B に基づいて要素数を同一に設定する。これにより、各分布表の分割幅が小さくなり、1 要素に含まれる頂点数を減少させることができる。つまり、固有座標系の設定における頂点の組合せ数、ならびに頂点の照合における候補頂点の数を減らすことができる。

2) 固有な座標系の原点の再設定

頂点の分布密度の偏りにより、2 つの立体の図心が大きく乖離してしまうことがある。そこで、立体 B において非常に近い位置にある頂点同士は、その 1 つの頂点で代表させることにより頂点数を減じて、図心位置の再設定を行う。頂点の近接性は、頂点 V_i, V_j の図心-頂点間距離 d_i, d_j の平均に対する稜線 $\overline{V_i V_j}$ の長さ l_{ij} の比率 $r_{ij} (= 2l_{ij}/(d_i + d_j))$ を指標として、次式に示す基準を一つの目安に判断する。

$$r_{ij} < r_{\text{mean}} - 2r_{\text{std}} \quad (3)$$

ここで、 r_{mean} は r_{ij} の平均、 r_{std} は r_{ij} の標準偏差を表すものとする。

3) 頂点の照合

立体 A を基準に各頂点の照合を行っていくと、立体 B においては頂点数の差分だけ対応関係の未定の頂点が残る。これらの頂点については、立体 A の頂点のなかに重複して対応関係を見出すこととする。

4.2 頂点の増減法

1) 頂点の減少法

立体 B に近接頂点が存在する場合には、頂点数の減少によって、立体 A と頂点数を等しくする。その際、式 (3) を満足する r_{ij} の小さい順に、頂点数が等しくなるように減少させる。

図 4 に近接頂点の除外による頂点の減少例を示す。頂点数は、立体 A が 4、立体 B が 6 である。立体 B における頂点 ④, ⑤, ⑥ が近接頂点と識別され、この中で頂点 ④, ⑤ を除外し、頂点 ⑥ で代表する。この

Fig. 4 An example of the decrease of the neighboring vertices

ようにして頂点数の等しい立体 B^* を生成し、立体 A と立体 B^* を比較する。頂点を減少させた場合には当然、元の形状とは相違するので、類似度の計算に際しては、取り除いた頂点の違いの分を別に考慮する必要がある。このため、除外した頂点に対しては、その代表頂点のずれと同一のずれが生ずるものとして、その量を加算して求めることとする。

2) 突出頂点の識別と頂点の増加法

立体 B に突出頂点がある場合には、立体 A に頂点を増設することにより、両立体の頂点数を一致させる。

まず、立体 B において重複して対応関係が求められた頂点に着目し、その頂点間距離 dd_i 、および経度、緯度のいずれかの角度偏差 $d\theta_i, d\phi_i$ が、次式を満足すれば、頂点 V_i は突出しているものと見なす。

$$\left. \begin{aligned} dd_i &> dd_{\text{mean}} + 2dd_{\text{std}} \\ d\theta_i &> d\theta_{\text{mean}} + 2d\theta_{\text{std}} \\ d\phi_i &> d\phi_{\text{mean}} + 2d\phi_{\text{std}} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

ここで、添字 mean, std は、それぞれの平均と標準偏差を表すものとする。

次に、この突出頂点の立体 A における近接面を求め、その面上に新たに頂点を設ける。このとき、近接面は、突出頂点と立体 A の各面との垂線の長さが最小となる面とする。頂点の増設位置は、近接面に下ろした垂線の交点とする。面上に設定できない場合には、もっとも近い稜線上に設けるものとする。

突出頂点の識別と頂点の増加の一例を図5に示す。立体 B に一つの突出頂点が存在し、これを立体 A の近接面に設けることで立体 A^* を生成する。頂点の増設位置は面上もしくは稜線上であるため、立体 A の形状は保持されることになる。立体 A^* と立体 B を比

Fig. 5 An example of the increase of the projecting vertices

較して、類似度を算出する。

比較する立体の頂点の分布状況によっては、突出頂点と近接頂点の双方を有することも考えられる。この場合には、立体 A の頂点の増加と立体 B の頂点の減少とを同時に考慮して、両立体の頂点数を同一にする。また、頂点の分布状況によっては突出頂点と近接頂点が存在せず、頂点の増減によって頂点数を同一にした比較が行えない場合がある。このときには、頂点の重複した対応関係から求められる類似度を用いる。

4.3 頂点数の違いを表す尺度の定義

類似性を定量的に表現する尺度として、対応する頂点の位置のずれに着目した類似度 μ, σ を定義しているが、立体形状を規定する頂点の数が異なる場合には、その差異自体も類似性に影響する因子の一つとして考慮する必要があると考えられる。そこで、次式のように頂点数の違いを直接的に表現するファクタ f_n を新たに導入する。

$$f_n = \frac{n_B - n_A}{n_A} \quad (5)$$

ここで、 n_A, n_B は、それぞれ立体 A 、立体 B の頂点数を表す。頂点数が等しいとき f_n は 0、その差異が大きくなれば f_n は相対的に大となる。類似性の判断においては、頂点の増減法を適用して求めた類似度 μ^*, σ^* に加えて、 f_n も考慮することにする。任意の基準立体に対して、頂点数の等しい立体と頂点数の異なる立体とを同時に比較して類似性を評価する場合や、頂点数の増大に伴う類似性を説明する際に、 f_n は有効である。

4.4 類似部分の抽出法

立体形状の類似性を論ずるとき、形状が全体として類似しているか否かの判別が行えると同時に、部分的

にどの辺りが類似しているかあるいは相違しているかを識別できることも、定量化された類似度を担保する意味で重要であると考えられる。先に提案した、頂点数が等しい場合における比較立体の重ね合わせによってもこの識別はある程度可能であるが、頂点数が異なる場合には重複して対応関係の定められた頂点に着目して類似部分の抽出を行い、類似性をより明確に表現することとする。

近接頂点が存在するような立体との比較の場合には、一つの頂点に集中して重複した対応関係の定まる頂点が現れる。これらの対応頂点を除いて残存する頂点から形成される形状について再度、類似判定を行うことで、類似部分を明示することができる。図4の例では、集中的に対応関係の求められる頂点を除くことにより、3頂点で構成される底面の図形が比較され、この部分がきわめて類似しているあるいは一致しているといった識別が可能となる。

また、突出頂点がある場合には、その頂点のみを除いた残存部分の立体形状を再度比較することにより、類似部分がより明白になる。図5においては、突出頂点を除いた形状、すなわち直方体部分での比較が行われて、類似性がより明確にされる。

比較する立体形状によっては、頂点の重複した対応関係は求められるが、近接頂点や突出頂点が存在しない場合、または近接頂点は存在するものの、集中的に対応関係が求められる頂点がない場合がある。このときには、部分的な形状の抽出は行えず、形状全体としての類似性の判別になる。

5. 適用例

頂点数の異なる凸多面体に対し、前章までに述べられた処理手続きに従って類似判定を行った結果について述べる。

図6は、近接頂点を有する立体について類似度を計算した例である。角すいAに対して、頂点付近を切断して形成される立体Bを比較した場合と、直方体Aを基準として、その1頂点部分を切断した立体Bを比較した場合を示す。 μ, σ は、頂点の対応関係の重複を認めて算出した類似度である。一方、 μ^*, σ^* は、頂点の減少法を適用して求めた類似度である。4つまたは3つの近接頂点を1つの頂点で代表したため、全般に類似度 μ^*, σ^* の値は μ, σ の値に比較し小さく求められている。いずれにおいても、この値が大きくなるにしたがって、立体形状が相違していく状況が分かる。直方体の1頂点を切断した立体B3においては、近接頂点が存在しないため、頂点の減少法は適

Fig. 6 The results of similarity tests of the objects with the neighboring vertices

Fig. 7 The results of similarity tests of the objects with the projecting vertices

用されない。また、類似部分の抽出を行うと、角すいの例では底面の四角形の部分が一致し、直方体の例では切断部分に相当する1頂点を除いた残り7頂点から構成される形状の部分が一致することが分かる。

立体Bに突出頂点が存在し、これに対応した頂点を立体Aに増設することにより頂点数を一致させ、類似度を求めた例を図7に示す。立体A*が1頂点を増設した例である。この頂点の増加法の適用により、突出頂点のずれの量が修正され、 μ^*, σ^* が求められる。この値の大小により形状の類似性がおおよそ識別できる。さらに、これらの突出頂点を有する立体に対して類似部分の抽出を行うと、直方体部分が合同形となることが分かる。

図8は、角柱を例として頂点数が増大することによ

Fig. 8 The results of similarity tests to the increase of the number of vertices

る類似度の変化を示す。7角柱と8角柱, 15角柱と16角柱, および31角柱と32角柱の比較例にみるように, 頂点数の増大に対して頂点数の差異が相対的に小さくなれば, 類似度 μ, σ の値は小となり, 形状はきわめて類似していくことが分かる。なお, この例では2立体で距離分布表が同一になるため, 近接頂点を取り除くことによる図心の再設定および頂点の減少は行われない。

頂点数の差異が大きくなり, 形状の相違が認められるにもかかわらず, 各対応頂点間のずれの量あまり変化せず, したがって, μ, σ の値からは類似性の識別が困難となることがある。たとえば, 図8の16角柱と32角柱の比較の場合に相当する。この例では, 頂点の照合においてその半数の頂点が一致してしまうことによる。これは, 高さと底面の半径を一定として頂点数を増大させた多角柱を比較するような場合にはすべて当てはまる。このとき, 頂点数の差異を表現するファクタ f_n を考慮することで, 類似性がある程度識別できる。

また, この角柱の例では, 集中的に対応関係が求められる頂点がないので, 対応の重複する頂点の除外による類似形状部分の抽出は行えない。したがって, 全体的にみて類似するあるいは相違するとはしか判断できない。

6. 結 言

本論文では, 立体形状の分類を自動的に行う方法を確立することを目標として, 頂点数の異なる凸多面体を対象に類似判定を実現する一手法について述べた。その特徴は, (1) 頂点の照合に際して, 突出頂点, 近接頂点を識別し, それらの頂点の増減によって頂点数をあらかじめ同一にすること, (2) 重複して対応関係の求められる頂点に着目して類似部分を抽出することの2点である。これを適用した実験例では, おおむね良好に類似判定が実現できることを示した。

もとより, 形状の類似性を識別する問題はいまいきを伴い, それを定量的に判断するのはかなり困難であるが, 本論文で提案した方法を適用することにより, 形状を規定する頂点数の違いにかかわらず, 凸多面体形状の全般において類似性の説明がある程度可能である。

今後は, 多くの凸多面体群への適用を通して, より実用的な手法に高めていくことと, これをさらに拡張して, 一般の多面体形状の類似問題进行处理する方法の検討を考えている。

終わりに, 本研究の一部はカシオ科学技術振興財団の援助によるものであることを記し, 関係諸氏に感謝の意を表する。

参 考 文 献

- 1) 向井伸治, 古川 進, 木村文彦, 佐田登志夫, 小尾 誠: 凸多面体の類似判定について, 精密工学会誌, 58, 6 (1992) 987.
- 2) 古川 進, 木村文彦, 佐田登志夫: 類似形状立体の識別に関する研究(第2報), 昭和61年度精密工学会秋季大会学術講演会講演論文集, (1986) 411.
- 3) 古川 進, 木村文彦, 佐田登志夫: 類似形状立体の識別に関する研究(第3報), 昭和62年度精密工学会春季大会学術講演会講演論文集, (1987) 373.
- 4) 杉原厚吉: 多面体の合同判定のための $n \log n$ アルゴリズム, コンピュータ・ビジョン研究会資料, 情報処理学会, 18-1 (1982) 1.
- 5) M. D. Atkinson: An Optimal Algorithm for Geometrical Congruence, J. Algorithm, 8, (1987) 159.
- 6) A. Helmut et al.: Congruence, Similarity, and Symmetries of Geometric Objects, Discrete Computational Geometry, 3, (1988) 237.
- 7) 向井伸治, 古川 進, 木村文彦, 佐田登志夫, 小尾 誠: 凸多面体の類似性について——頂点数の異なる場合, 1992年度精密工学会春季大会学術講演会講演論文集, (1992) 833.