符号付き同次座標に基づく図形の干渉処理*

新関雅俊** 小西史和*** 吉田 誠† 山口富士夫**

Intersection Detections Based on Signed Homogeneous Coordinates

Masatoshi Niizeki, Fumikazu Konishi, Makoto Yoshida and Fujio Yamaguchi

An intersection detection method for geometric modeling based on signed homogeneous coordinate is presented. Fundamental geometric objects such as line segments, triangles, tetrahedra and their duals are redefined using a signed homogeneous coordinate representation. These sets of points and planes are defined in a three-dimensional two-sided space. Then a method of geometric intersection detection between these sets is derived based solely on sign tests of determinants. This method has applications such as intersection detection of rational parametric curves and surfaces, and hidden line/surface removal algorithms.

Keywords: geometric modeling, interference problems, intersection tests

1. 緒 言

形状処理のさまざまな領域で同次座標の考え方が利用されている。同次座標のひとつの重要な応用分野として3次元空間の図形のディスプレイへの表示があげられる。図形の表示を確実に行うためには、透視変換などの射影変換を行ったあとの図形を扱う方法が必要になる。線分や多角形に対して射影変換を行うと、通常の線分や多角形とは異なる図形を得ることがある。例えば線分に対して透視変換を行うと無限遠点を通るような直線を得る場合がある^{1) 11)}。従来はこれらの図形に関する干渉処理を行うための理論は確立していない。任意の射影変換を行ったあとの図形に関する干渉処理を行う方法が確立すれば、透視変換を行ったあとの図形に対してクリッピングや隠れ線・面消去の処理を行うための確実な理論が得られる。一般の射影変換は、同次座標に対する行列の乗算という形で行うことができる。そのため、同次座標によって表現される図形に関する干渉処理の理論が望まれる。

同次座標を応用したもうひとつの重要な分野として有理多項式曲線・曲面の表現があげられる。図形・形状処理では曲線・曲面の表現方法として有理多項式Bézier曲線セグメントや曲面パッチが多く利用される。これらの曲線・曲面の制御点は同次座標によって表現される。同次座標の可能性を十分に引き出せば、これらの曲線・曲面の凸閉包性と分割アルゴリズムを利用して一貫した干渉処理を行うことができると予想される。そのため、はじめから同次座標によって表現された図形に関する干渉処理の理論が望まれる⁹⁾。

以上のような同次座標の適用例では、同次座標によって表現された一般的な図形を定義して扱えることが共通に必要なになる。そのための基礎として、同次座標によって表された点、線分、3角形、4面体やこれらの図形に対して射影変換を行って得ら

れる図形に関する干渉処理の方法が必要になる^{7) 9)}。

図形・形状処理におけるあらゆる干渉問題を同次座標による4次の行列式の符号判定だけによって行う方法を体系化したものが4×4行列式法である。一貫して同次座標を用いて処理を行う完全4次元処理の利点は既に多くの研究で示されている^{12) 32) 9)}。しかし、従来の4×4行列式法は、主にユークリッド空間の中の図形を対象としていた¹²⁾。同次座標の考え方は射影幾何学の一部である。射影幾何学では点の同次座標に零でない任意の数をかけても同じ点を表す。同次座標によって表現される点の全体は射影空間と呼ばれる。同次座標と4×4行列式法の利点を最大限に利用すれば、ユークリッド空間だけではなく射影空間の図形に関する処理を行うことができるはずである。

しかし、射影空間という空間は向き付け不可能な空間である。従って、射影空間において従来の同次座標の考え方をを用いて向きに関連する処理を一貫して行うことができないという問題点がある。例えば図形どうしの相対的な向きの判定や半空間テストなどは射影空間では行うことができない。

正のスケール倍と負のスケール倍の同次座標の点を区別した符号付き同次座標(signed homogeneous coordinates)の考え方を利用した向き付きの射影幾何学を利用することによって向きを扱うことができるようになることが既に示されている²⁾。符号付き同次座標によって表された点の全体は、2重空間(two-sided space)という空間をなす。2重空間そのものの性質、および2重空間の有向面(flat)については既によく研究されている²⁾。符号付き同次座標は従来の同次座標と同様の利点を保ちながら、向きに関して一貫して処理を行うことができるという特徴を持つ^{2) 9)}。符号付き同次座標によって表現された図形に関する干渉処理を行う方法はまだ確立していない。しかし、従来の4×4行列式法を拡張することによって符号付き同次座標によって表現された図形に関する干渉処理を行うことができると思われる。

また、符号付き同次座標の考え方により点と面に関して完全な双対性を実現する。従って、4×4行列式法によって点の集

* 原稿受付 平成4年12月24日

** 正 会 員 早稲田大学理工学部(東京都新宿区大久保3-4-1)

*** 早稲田大学大学院

† 学生会員 早稲田大学大学院

合とまったく同様の方法で面の集合に関する干渉処理を行うことができる。図形どうしの干渉処理を行う方法はほとんど点の集合を対象としたものであったが、曲線・曲面の干渉処理のように特に複雑な処理を行うようになると平面の集合に関する干渉処理の理論が必要になってくる⁹⁾。

以上のことにより本研究では、 4×4 行列式法を用いて符号付き同次座標によって表現される図形に関する干渉処理を行う方法を確立する。ここでは基本的な図形として点、線分、3 角形、4 面体を符号付き同次座標の考え方によって拡張して得られる新しい種類の図形に関する干渉処理の方法を示す。ここで示す干渉処理には双対性がある。この双対性に従って平面式係数によって点、線分、3 角形、4 面体の双対図形を定義し、これらの双対図形に関する干渉処理の方法も示す。 4×4 行列式法は拡張され、新しい図形を扱うことができる理論となる。従来のユークリッド空間の図形に関する干渉処理はここで示す理論の一部と考えることができる。ここで示した干渉処理の理論によって同次座標の利点がさらに引き出され、これらの理論は図形の表示アルゴリズムや有理多項式曲線・曲面の干渉処理アルゴリズムの基礎となる。

2. 諸 概 念

2. 1 2 重空間

体 K 上の 4 次元ベクトル空間 V^4 の 0 でないベクトルの集合を $*V^4 (= V^4 - \{0\})$ とする。 $*V^4$ の任意の 2 つのベクトル x と y の間の関係 $\sim$ を、

$$x \sim y \Leftrightarrow \exists \lambda > 0: \lambda x = y$$

とする。 $*V^4$ のベクトルを $\sim$ で同値類に類別して得られる同値類全体の集合を 3 次元 2 重空間 (two sided space) あるいは向き付き射影空間 (oriented projective space) と呼び、 T^3 で表す。それぞれの同値類は点と呼ばれ、同値類の任意の代表元 (ベクトル) によって点を指定することができる。このようなベクトルを $V_a = [X_a \ Y_a \ Z_a \ w_a]$ のように表し、点の (符号付き) 同次座標ベクトル (signed homogeneous coordinate vector) と呼ぶ。同次座標ベクトルに正の数をかけても同じ点を表す。2 重空間は従来の (古典的な) 射影空間とは異なり、向き付けが可能である²⁾。従って半空間テストのように向きに関連する判定を行うことができるという大きな特長がある。

2. 2 2 重空間のモデル

3 次元の 2 重空間は、3 次元のユークリッド空間が 2 個と、無限遠平面を合わせた集合と考えることができる。3 次元ユークリッド空間のうち一方は w が正の点、他方は w が負の点が集まったものとする。正の点の集合を前面 (front range)、負の点の集合を後面 (back range) とよぶ。また w が零の点は無限遠点と呼ばれ、無限遠平面という平面をなす。つまり、点 $[X \ Y \ Z \ w]$ は $(X/w, Y/w, Z/w)$ という位置にあるが、 $w > 0$ のとき前面に、 $w < 0$ のとき後面に存在すると考えたとよい。また負のスケール倍の同次座標ベクトルが表す無限遠点は相異なる点として区別されることに注意が必要である。2 重空間上では、楕円の幾何学 (double elliptic geometry) という種類の幾何学が成立する。つまりこの空間では 2 本の直線は必ず 2 点で交差するので、交差図形の算出には注意が必要である。その算出方法については既に研究されている²⁾。

実際の処理を行うためには、まず 3 次元ユークリッド空間の

中の図形を同次座標で表現することにより 3 次元 2 重空間の中に埋め込む。この 2 重空間の中で以下に示す方法により干渉処理を行うのである。

2. 3 単体の定義

この節では 3 次元の 2 重空間 T^3 における基本的な図形である単体 (simplex) の定義を示す。単体として線分、3 角形、4 面体を定義する。図形の定義式は符号付き同次座標ベクトルの線形結合として表される。単体を定義するとき用いる媒介変数は、従来の線分、3 角形、4 面体のときのものとは異なる。これは、この定義に従えば計算機でのすべての処理を零との比較 (符号判定) として行うことができるようになるからである。また 2 重空間の線分、3 角形、4 面体の例を図で示すが、そのとき図形の前面上の部分は黒丸、実線および濃い色の塗りつぶしで示し、後面上の部分は白丸、鎖線および薄い色の塗りつぶしで示すことにする。

(1) 線分

V_0, V_1 を T^3 の 2 点を表す 1 次独立な 2 個のベクトルとする。これらのベクトルに対して、

$$V = \xi_0 V_0 + \xi_1 V_1, \\ ((\xi_0, \xi_1) \neq (0, 0)) \wedge (\xi_0, \xi_1 \geq 0)$$

で表される点の集合を T^3 における線分 $V_0 V_1$ (line segment) と呼ぶ。線分は、定義するベクトルの順序に依存しない。線分は T^3 の点の集合である。

線分は、その線分上に無限遠点を含むかどうかで現れ方が変わってくる。前面あるいは後面上に完全に含まれる線分は通常の (ユークリッド空間の) 線分と同じような形をしている。しかし線分の中には前面と後面にまたがって存在するものや、無限遠点を端点としているものがある。これらの種類の線分はすべて上の一つの定義に含まれる。図 1 に 2 重空間の線分の例を示す。図に示すことはできないが、無限遠線分もまたこの定義に含まれる。

Fig. 1 Examples of Line Segments in a Two-sided Space

(2) 3 角形

V_0, V_1, V_2 を T^3 の点を表す 1 次独立な 3 個のベクトルとする。このベクトルに対して、

$$V = \xi_0 V_0 + \xi_1 V_1 + \xi_2 V_2, \\ ((\xi_0, \xi_1, \xi_2) \neq (0, 0, 0)) \wedge (\xi_0, \xi_1, \xi_2 \geq 0)$$

で表される点の集合を T^3 における 3 角形 $V_0 V_1 V_2$ (triangle) と呼ぶ。3 角形は、定義するベクトルの順序に依存しない。3 角形は T^3 の点の集合である。3 角形の 3 辺、つまり $\xi_0 = 0, \xi_1 = 0, \xi_2 = 0$ の部分は線分である。

2 重空間の 3 角形は、その 3 角形に無限遠点を含むかどうかで現れ方が変わってくる。前面あるいは後面上に完全に含まれる 3 角形は通常の (ユークリッド空間の) 3 角形と同じような形をしている。しかし 3 角形の中には前面と後面にまたがって

Fig. 2 Examples of Triangles in a Two-sided Space

存在するものや、無限遠点を頂点や辺に含むものがある。このような3角形は普通に考える3角形とは違い、外側に広がった形をしているものがある。図2に2重空間の3角形のいくつかの例を示す。図の中に示すことはできないが、無限遠平面上に存在する3角形（無限遠3角形）も定義には含まれる。

(3) 4面体

V_0, V_1, V_2, V_3 を T^3 の点を表す1次独立な4個のベクトルとする。このベクトルに対して、

$$V = \xi_0 V_0 + \xi_1 V_1 + \xi_2 V_2 + \xi_3 V_3, \\ ((\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3) \neq (0, 0, 0, 0)) \wedge (\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3 \geq 0)$$

で表される点の集合を T^3 における4面体 $V_0 V_1 V_2 V_3$ (tetrahedron) と呼ぶ。4面体は、定義するベクトルの順序に依存しない。4面体は T^3 の点の集合である。4面体の4つの面、つまり $\xi_0 = 0, \xi_1 = 0, \xi_2 = 0, \xi_3 = 0$ の部分は3角形である。

Fig. 3 Examples of Tetrahedra in a Two-sided Space

2重空間の4面体は、その4面体に無限遠点を含むかどうかで見え方が変わってくる（図3）。前面あるいは後面上に完全に含まれる4面体は通常の4面体と同じような形である。しかし4面体の中には前面と後面にまたがって存在するものや、無限遠点を頂点や辺として含むものがある。このような4面体は

普通に考える4面体とは違い、外側に広がった形をしているものがある。4面体の各面は3角形であり、各辺は線分である。

2. 4 双対単体の定義

次に3次元の2重空間 T^3 双対単体を定義する。これらの図形は前節で定義した線分、3角形、4面体と双対の関係にある図形である。つまり単体の定義の中の点の同次座標ベクトルを $[a \ b \ c \ d]$ のような平面式係数ベクトルに置き換えて得られる図形である。従って、図形の定義式は平面式係数ベクトルの線形結合として表される。このとき、平面上に存在する点は、 $aX + bY + cZ + dw = 0$ によって表現される。

(1) 双対線分

r_0, r_1 を T^3 の平面を表す1次独立な2個のベクトルとする。このベクトルに対して、

$$r = \xi_0 r_0 + \xi_1 r_1, \\ ((\xi_0, \xi_1) \neq (0, 0)) \wedge (\xi_0, \xi_1 \geq 0)$$

で表される平面の集合を T^3 における双対線分 $r_0 r_1$ (dual line segment) と呼ぶ。双対線分は、定義するベクトルの順序に依存しない。双対線分は T^3 の有向平面(oriented plane)の集合である。

3次元2重空間の双対線分は、一つの直線を含む有向平面の集合（面束）の一部である。2枚の有向平面に挟まれた領域に存在する向きのそろった有向平面の集合と考えるとよい。ただし、この直線が無限遠点の場合もある。双対線分の例を図4に示す。

Fig. 4 Dual Line Segments in a Three Dimensional Two sided Space

(2) 双対3角形

r_0, r_1, r_2 を T^3 の平面を表す1次独立な3個のベクトルとする。このベクトルに対して、

$$r = \xi_0 r_0 + \xi_1 r_1 + \xi_2 r_2, \\ ((\xi_0, \xi_1, \xi_2) \neq (0, 0, 0)) \wedge (\xi_0, \xi_1, \xi_2 \geq 0)$$

で表される平面の集合を T^3 における双対3角形 $r_0 r_1 r_2$ (dual triangle) と呼ぶ。双対3角形は、定義するベクトルの順序に依存しない。双対3角形は T^3 の平面の集合である。双対3角形の3辺、つまり $\xi_0 = 0, \xi_1 = 0, \xi_2 = 0$ の部分は双対線分である。

双対3角形は、一つの点を通る平面（有向平面）の集合の一部である。1点で交わる3枚の平面の向きを考慮することによって一つのすい体が決まる。つまり3枚の平面は空間をいくつかのすい体部分に分けるが、図のようにそのうち前面と後面にそれぞれ構成するそれぞれの面の向きが一貫している1個だけすい体がある（図5）。このすい体と交わらない平面の集合と

考えることができる。もちろんこれらの平面が通る共通の点が無限遠点である場合もある。双対3三角形の例を図5に示す。

Fig. 5 A Dual Triangle in a Three Dimensional Two-sided Space

(3) 双対4面体

r_0, r_1, r_2, r_3 を T^3 の平面を表す1次独立な4個のベクトルとする。このベクトルに対して、

$$r = \xi_0 r_0 + \xi_1 r_1 + \xi_2 r_2 + \xi_3 r_3, \\ ((\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3) \neq (0, 0, 0, 0)) \wedge (\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3 \geq 0)$$

で表される平面の集合を T^3 における双対4面体 $r_0 r_1 r_2 r_3$ (dual tetrahedron) と呼ぶ。双対4面体は、定義するベクトルの順序に依存しない。双対4面体は T^3 の有向平面の集合である。双対4面体の4つの境界、つまり、 $\xi_0=0, \xi_1=0, \xi_2=0, \xi_3=0$ の部分は双対3三角形である。

双対4面体は、一つの4面体と交わらない有向平面の集合の一部である。一般の位置にある4枚の平面の向きを考慮して決まるひとつの4面体を考えることができる。つまり4枚の平面は空間をいくつかの4面体の部分に分けるが、前面と後面にそれぞれ1個だけ平面の向きが一貫したものがある。その4面体に交わらない平面の集合が双対4面体である。双対4面体は簡単な図で示すことはできない。

3. 図形の干渉の条件

3.1 単体の干渉条件

4点を表す同次座標ベクトル V_0, V_1, V_2, V_3 の成分で構成される 4×4 行列式を S_{0123} で記す。これらの行列式の符号判定を用いて前節の図形どうしの干渉条件をすべて表すことができる。

- ① 点 V_a が4面体 $V_0 V_1 V_2 V_3$ に含まれる条件
 $((S_{0123} > 0) \wedge (S_{a123}, S_{0a23}, S_{01a3}, S_{012a} \geq 0)) \\ \vee ((S_{0123} < 0) \wedge (S_{a123}, S_{0a23}, S_{01a3}, S_{012a} \leq 0))$
- ② 点 V_a が3三角形 $V_0 V_1 V_2$ に含まれる条件 (ただし V_N は $V_0 V_1 V_2$ と4面体をなす任意のベクトルとする)
 $(S_{012a} = 0) \\ \wedge ((S_{012N} > 0) \wedge (S_{a12N}, S_{0a2N}, S_{01aN} \geq 0)) \\ \vee ((S_{012N} < 0) \wedge (S_{a12N}, S_{0a2N}, S_{01aN} \leq 0))$
- ③ 点 V_a が線分 $V_0 V_1$ に含まれる条件 (ただし V_N, V_M は $V_0 V_1$ と4面体をなす任意の2個のベクトルとする)
 $(S_{01Ma} = S_{01aN} = 0) \\ \wedge ((S_{01MN} > 0) \wedge (S_{a1MN}, S_{0aMN} \geq 0)) \\ \vee ((S_{01MN} < 0) \wedge (S_{a1MN}, S_{0aMN} \leq 0))$
- ④ 点 V_a と点 V_0 の一致条件 (ただし V_N, V_M, V_L は V_0 と4面体をなす任意の3個のベクトルとする)
 $(S_{0LMa} = S_{0LaN} = S_{0aMN} = 0) \\ \wedge ((S_{0LMN}, S_{aLMN} > 0) \vee (S_{0LMN}, S_{aLMN} < 0))$

- ⑤ 線分 $V_a V_b$ が3三角形 $V_0 V_1 V_2$ と立体交差する条件
 $((S_{a012}, S_{b012}) \neq (0, 0)) \\ \wedge (((S_{01ab}, S_{12ab}, S_{20ab} \geq 0) \wedge (S_{a012} \geq 0 \wedge S_{b012} \leq 0)) \\ \vee ((S_{01ab}, S_{12ab}, S_{20ab} \leq 0) \wedge (S_{a012} \leq 0 \wedge S_{b012} \geq 0)))$
- ⑥ 立体交差する線分 $V_a V_b$ と3三角形 $V_0 V_1 V_2$ の交点
 $(S_{a012} \geq 0 \wedge S_{b012} \leq 0)$ のとき、 $V = S_{a012} V_b - S_{b012} V_a$
 $(S_{a012} \leq 0 \wedge S_{b012} \geq 0)$ のとき、 $V = S_{b012} V_a - S_{a012} V_b$
- ⑦ 線分 $V_a V_b$ が線分 $V_0 V_1$ と1点を共有する条件 (平面的な交差) (ただし V_N は $V_0 V_1$ と3三角形をなす任意のベクトルとする)
 $(S_{01ab} = 0) \\ \wedge ((S_{0abN}, S_{1abN}) \neq (0, 0)) \wedge ((S_{a01N}, S_{b01N}) \neq (0, 0)) \\ \wedge (((S_{0abN} \leq 0 \wedge S_{1abN} \geq 0) \wedge (S_{a01N} \geq 0 \wedge S_{b01N} \leq 0)) \\ \vee ((S_{0abN} \geq 0 \wedge S_{1abN} \leq 0) \wedge (S_{a01N} \leq 0 \wedge S_{b01N} \geq 0)))$
- ⑧ 線分 $V_a V_b$ が線分 $V_0 V_1$ と点を共有する時の交点 (ただし V_N は $V_0 V_1$ と3三角形をなす任意のベクトルとする)
 $(S_{a01N} \geq 0 \wedge S_{b01N} \leq 0)$ のとき、 $V = S_{a01N} V_b - S_{b01N} V_a$
 $(S_{a01N} \leq 0 \wedge S_{b01N} \geq 0)$ のとき、 $V = S_{b01N} V_a - S_{a01N} V_b$

Fig. 6 Intersections between Line Segments

これら以外の干渉判定はこの条件の組合せと考えることができる。干渉条件で必要になった補助点 V_L, V_M, V_N は4個の基本ベクトル $[1 \ 0 \ 0 \ 0], [0 \ 1 \ 0 \ 0], [0 \ 0 \ 1 \ 0], [0 \ 0 \ 0 \ 1]$ の中から必ず選ぶことができる。これらの補助点は、補助点を求める処理においても、計算の効率から考えても有利である。しかし必ずしもこれらの点から選ぶ必要はなく1次独立であるという条件が満たされていればよい。

2重空間の単体の干渉処理の例として、線分と線分の交差判定を示す(図6)。図で交点が存在しているときには、その交点は丸で示している。この図では前面あるいは後面どうしで重なっているものに限り、交差している。どの場合でも単一の干渉判定の条件によって調べることができる。

3.2 双対単体どうしの干渉条件

4面 r_0, r_1, r_2, r_3 のベクトルの成分で構成される 4×4 行列式を T_{0123} で記す。これらの行列式の符号判定を用いて前節の双対単体どうしの干渉条件をすべて表すことができる。この条件は双対2重空間の中の単体どうしの干渉条件になっている。しかも2重空間の単体どうしの干渉条件の双対条件になっている。

- ① 面 γ_a が双対4面体 $\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$ に含まれる条件
 $((\langle T_{0123} \rangle > 0) \wedge (\langle T_{a123}, T_{0a23}, T_{01a3}, T_{012a} \rangle \geq 0))$
 $\vee ((\langle T_{0123} \rangle < 0) \wedge (\langle T_{a123}, T_{0a23}, T_{01a3}, T_{012a} \rangle \leq 0))$
- ② 面 γ_a が双対3角形 $\gamma_0\gamma_1\gamma_2$ に含まれる条件 (ただし γ_N は $\gamma_0\gamma_1\gamma_2$ と双対4面体をなす任意のベクトルとする)
 $(T_{012a} = 0)$
 $\wedge ((\langle T_{012N} \rangle > 0) \wedge (\langle T_{a12N}, T_{0a2N}, T_{01aN} \rangle \geq 0))$
 $\vee ((\langle T_{012N} \rangle < 0) \wedge (\langle T_{a12N}, T_{0a2N}, T_{01aN} \rangle \leq 0))$
- ③ 面 γ_a が双対線分 $\gamma_0\gamma_1$ に含まれる条件 (ただし γ_N, γ_M は $\gamma_0\gamma_1$ と双対4面体をなす任意の2個のベクトルとする)
 $(T_{01Ma} = T_{01aN} = 0)$
 $\wedge ((\langle T_{01MN} \rangle > 0) \wedge (\langle T_{a1MN}, T_{0aMN} \rangle \geq 0))$
 $\vee ((\langle T_{01MN} \rangle < 0) \wedge (\langle T_{a1MN}, T_{0aMN} \rangle \leq 0))$
- ④ 面 γ_a と面 γ_0 の一致条件 (ただし $\gamma_N, \gamma_M, \gamma_L$ は γ_0 と双対4面体をなす任意の3個のベクトルとする)
 $(T_{0LMa} = T_{0LaN} = T_{0aMN} = 0)$
 $\wedge ((\langle T_{0LMN}, T_{aLMN} \rangle > 0) \vee (\langle T_{0LMN}, T_{aLMN} \rangle < 0))$
- ⑤ 双対線分 $\gamma_a\gamma_b$ が双対3角形 $\gamma_0\gamma_1\gamma_2$ と立体交差する条件
 $((\langle T_{a012}, T_{b012} \rangle \neq (0, 0))$
 $\wedge ((\langle T_{01ab}, T_{12ab}, T_{20ab} \rangle \geq 0) \wedge (\langle T_{a012} \rangle \geq 0 \wedge \langle T_{b012} \rangle \leq 0))$
 $\vee ((\langle T_{01ab}, T_{12ab}, T_{20ab} \rangle \leq 0) \wedge (\langle T_{a012} \rangle \leq 0 \wedge \langle T_{b012} \rangle \geq 0))$
- ⑥ 立体交差する双対線分 $\gamma_a\gamma_b$ と双対3角形 $\gamma_0\gamma_1\gamma_2$ の共有面
 $(\langle T_{a012} \rangle \geq 0 \wedge \langle T_{b012} \rangle \leq 0)$ のとき, $\gamma = T_{a012}\gamma_b - T_{b012}\gamma_a$
 $(\langle T_{a012} \rangle \leq 0 \wedge \langle T_{b012} \rangle \geq 0)$ のとき, $\gamma = T_{b012}\gamma_a - T_{a012}\gamma_b$
- ⑦ 双対線分 $\gamma_a\gamma_b$ が双対線分 $\gamma_0\gamma_1$ と1面を共有する条 (ただし γ_N は $\gamma_0\gamma_1$ と双対3角形をなすベクトルとする)
 $(T_{01ab} = 0)$
 $\wedge ((\langle T_{0abN}, T_{1abN} \rangle \neq (0, 0)) \wedge ((\langle T_{a01N}, T_{b01N} \rangle \neq (0, 0))$
 $\wedge ((\langle T_{0abN} \rangle \leq 0 \wedge \langle T_{1abN} \rangle \geq 0) \wedge (\langle T_{a01N} \rangle \geq 0 \wedge \langle T_{b01N} \rangle \leq 0))$
 $\vee ((\langle T_{0abN} \rangle \geq 0 \wedge \langle T_{1abN} \rangle \leq 0) \wedge (\langle T_{a01N} \rangle \leq 0 \wedge \langle T_{b01N} \rangle \geq 0)))$
- ⑧ 双対線分 $\gamma_a\gamma_b$ が双対線分 $\gamma_0\gamma_1$ と面を共有する時の共有面 (ただし γ_N は $\gamma_0\gamma_1$ と双対3角形をなすベクトルとする)
 $(\langle T_{a01N} \rangle \geq 0 \wedge \langle T_{b01N} \rangle \leq 0)$ のとき, $\gamma = T_{a01N}\gamma_b - T_{b01N}\gamma_a$
 $(\langle T_{a01N} \rangle \leq 0 \wedge \langle T_{b01N} \rangle \geq 0)$ のとき, $\gamma = T_{b01N}\gamma_a - T_{a01N}\gamma_b$

これ以外の干渉判定はこれらの条件の組合せと考えることができる。干渉条件で必要になる補助面 $\gamma_L, \gamma_M, \gamma_N$ は4個の基本ベクトル $[1 \ 0 \ 0 \ 0], [0 \ 1 \ 0 \ 0], [0 \ 0 \ 1 \ 0], [0 \ 0 \ 0 \ 1]$ の中から選ぶようにすると計算の効率から考えて有利である。

面、双対線分、双対3角形、双対4面体どうしの干渉条件は前節で示した点、線分、3角形、4面体どうしの干渉条件とちょうど双対の条件になっている。つまり条件の S を T にし、 V を γ に入れ換えた条件になっている。

2重空間の双対単体の干渉処理の例として、双対線分どうしの交差判定を示す(図7)。共有している面は向きが一致していなければならない。

双対単体どうしの干渉判定は、2つの曲面に関する接平面を求める場合などに非常に便利である。曲面を接平面の集合として表現し、上記の方法で共通平面が存在するかどうかを調べ、共通平面が存在する場合にはその平面を求めることができる⁹⁾。

Fig. 7 An Intersection between Two Dual Line Segments

4. ま と め

本研究では、2重空間で符号付き同次座標ベクトルおよび平面式係数ベクトルを用いて定義される図形どうしの干渉処理を 4×4 行列式法によって行う方法を確認した。すべての干渉判定は行列式の符号判定によって行われる体系を得ることができた。そのため、従来から指摘されている 4×4 行列式法の利点を継承している。点、線分、3角形、4面体を符号付き同次座標の考え方によって拡張して得られる新しい種類の図形および平面式係数によって表現される双対図形に関する干渉処理の方法を示した。ここで示す干渉処理には双対性があり、干渉処理の方法もまた双対なものであった。従来のユークリッド空間の図形に関する干渉処理はここで示す理論の一部と考えることができることを示した。ここで示した干渉処理の理論によって同次座標の利点がさらに引き出され、これらの理論によって図形の表示アルゴリズムや有理多項式曲線・曲面の干渉処理アルゴリズムの基礎を得ることができた。ソリッドモデリングの集合演算での干渉処理もまた、ここで示した処理の一部であると考えられる。この理論は 4×4 行列式法に基づいて行列式の符号判定だけを利用しているので、これらの干渉処理においては適応的無誤差演算を行うこともできる⁹⁾。

参 考 文 献

- 1) 山口富士夫：コンピュータディスプレイによる形状処理工学 [Ⅲ]，日刊工業新聞社，(1988) 127-273.
- 2) J. Stolfi: Oriented Projective Geometry, Academic Press, Boston, (1991) 1.
- 3) 新聞雅俊, 林高, 山口富士夫: 4×4 行列式法による点と面の双対な干渉処理, 情報処理学会「グラフィクスとCAD」シンポジウム, (1990) 73.
- 4) 弥永昌吉, 平野鉄太郎: 射影幾何学, 朝倉書店, (1964) 1.
- 5) 新聞雅俊, 小西史和, 高木健次, 光川利弘, 山口富士夫: 頂点座標と平面式係数間の双対な干渉処理体系 (第2報) (射影空間での干渉処理), 1990年度精密工学会秋季大会学術講演会講演論文集, (1990) 453.
- 6) 新聞雅俊, 小西史和, 高木健次, 光川利弘, 山口富士夫: 頂点座標と平面式係数間の双対な干渉処理体系 (第3報) (交点公式とその他の概念), 1991年度精密工学会春季大会学術講演会講演論文集, (1991) 1125.
- 7) 新聞雅俊, 小西史和, 高木健次, 光川利弘, 山口富士夫: 頂点座標と平面式係数間の双対な干渉処理体系 (第4報) (曲線・曲面の双対性と干渉処理), 1991年度精密工学会春季大会学術講演会講演論文集, (1991) 1127.
- 8) 新聞雅俊, 林高, 小西史和, 山口富士夫: 頂点座標と平面式係数間の双対な干渉処理体系 (第5報) (2重空間での干渉処理), 1992年度精密工学会春季大会学術講演会講演論文集, (1992) 841.
- 9) F. Yamaguchi and M. Niizeki: A Proposal of Geometric Processing of Rational Polynomial Curves, to appear.
- 10) 山口富士夫: コンピュータディスプレイによる図形処理工学, 日刊工業新聞社, (1981) 1.
- 11) J.F. Blinn and M.E. Newell: Clipping Using Homogeneous Coordinates, ACM Computer Graphics, Vol. 12, No. 3, (1978) 237.