局所性のある C^2 補間曲線のための最小化条件*

黒田 満** 木村 文彦*** 古川 進†

Minimization Conditions for C^2 Interpolating Curve with Local Behavior

Mitsuru KURODA, Fumihiko KIMURA and Susumu FURUKAWA

This paper introduces new local minimum properties into the C^2 interpolating curve, each span of which is determined by 6 or 8 neighboring given points. The marriage between the *fairness* based on variation problem and the *local behavior* obtained by degree-elevation or knot-insertion, the opposite-like concepts, of the curve is studied by various minimization conditions independent and dependent of the given set of interpolation points. The results are: (1) Every condition studied improves improper behavior in the previous curve. (2) One of the conditions may generate a curve with smaller value of “energy integral” and curvature plot consisting of fewer monotone pieces than the conventional cubic C^2 interpolating curve. (3) Applying a minimization condition to the blending function leads to a new curve in simple yet fairly effective way.

Key words: minimum property, fairness, local behavior, interpolation, S -splines, $B2$ -splines, B -splines, CAGD, CG

1. はじめに

著者らは既に、計算機援用の形状設計やコンピュータグラフィックスの分野で有用な、局所性を系統的に制御できる C^2 補間曲線を提案した¹⁾。この曲線は、各曲線分に影響を及ぼす通過点の範囲を増してゆくと極限で従来の 3 次の C^2 補間曲線に一致する。そしていわゆる「エネルギー・ミニマム」条件と呼ばれる最小性²⁾を有する。一方、局所性の強いところでは必ずしも満足のいく性質をもっているとはいえない¹⁾。それは局所性の手軽な制御に重点を置いたためである。このような曲線に、スプライン補間の「滑らかさ」の基と考えられている最小性を付与することは重要なことである。

そこで本研究では、局所的振舞いをする C^2 補間曲線として最も利用が見込まれる、1 スパンが 6, 8 個の通過点から決まる曲線のために最小化条件の導入をはかる。そして、近傍通過点からの影響の度合を反映する(重心結合の)係数を、関連する変分問題の解として導く。局所性と滑らかさという相反するような要求をどこまで追求できるのか検討する。通過点配置に依存するあるいは独立な条件、簡便さあるいは厳密さを重視する条件等を種々検討する。評価には、曲線の 2 次微分の内積の積分値、曲率自乗積分値や曲率グラフを使う。

これまでに、 S -スプライン³⁾あるいは $B2$ -スプライン⁴⁾⁵⁾を局所性のある補間曲線¹⁾⁶⁾⁷⁾とする研究はあるが、それに独自の最小化条件を導入する研究はない。1 スパンが 4 通過点から決まる $B3$ -スプラインのブレンディング関数が、その 2 次微分の自乗積分を最小化する条件から導かれているだけである⁶⁾。

この最小化条件の考え方は、3.3.1 節で S -スプライン補間曲線や $B2$ -スプライン補間曲線に適用して、計算量の少ない簡便な方法を導く。ほかに 3.2.1 節で、新しい局所的な最小化条件に基づいて、従来の 3 次の C^2 補間曲線より小さい曲率自乗積分値とより単調な曲率グラフをもつ「滑らかな」曲線を生成でき

ることを明らかにする。

本研究では平面曲線のみを扱う。曲線はスパンごとに逐次処理できるので、特にことわらないかぎり無限に続く通過点列を仮定している。従って、添字の範囲の記述を省略する。また、節点はユニフォームな間隔にとられているとする。

2. 局所性の系統的な制御

ここでは、新しく導く曲線の基礎として、局所性を系統的に制御できる C^2 補間曲線¹⁾について概観する。

これらの曲線は S -スプライン補間曲線、 $B2$ -スプライン補間曲線と呼ばれる。ユニフォーム 3 次の B -スプライン補間曲線の各スパンに次数上げ³⁾か節点挿入⁴⁾を行って得られる付加制御点を、次式のように近傍通過点の重心結合として定めるものである。

$$d_{2i+1} = \frac{1-\alpha}{1-\alpha^{m+1}} \sum_{j=0}^m q_{i,j} \alpha^j, \quad \alpha = -2 + \sqrt{3}, \quad (1)$$

$$q_{i,j} = \frac{p_{i-j} + p_{i+1+j}}{2}, \quad p_i: \text{ 与通過点.}$$

残りの偶数番の制御点も次式によって通過点で表される。

$$\begin{cases} d_{2i-1} + 2d_{2i} + d_{2i+1} = 4p_i, & : S\text{-スプライン} \\ d_{2i-1} + 4d_{2i} + d_{2i+1} = 6p_i, & : B2\text{-スプライン} \end{cases} \quad (2)$$

両曲線は式 (3) で表されて、ブレンディング関数 $f(t)$ の局所台はそれぞれ $4+2m$, $8+4m$ 区間となる。

$$r(u) = \sum f(u - u_i) p_i. \quad (3)$$

本研究では比較の便宜上、節点 u_i の間隔を S -スプラインで 1, $B2$ -スプラインで 0.5 とする。各スパンが S -スプラインでは 1 セグメント、 $B2$ -スプラインでは 2 セグメントで表されるからである。 S -スプラインは u_i をすべて 2 重節点とする 4 次の C^2 スプラインである。両曲線の各セグメントは大域パラメータ u の代わりに局所パラメータ t を使って次のように表される。

$$r_i(t) = \sum_{j=0}^l f_j(t) d_{(l-2)i-1+j}, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (4)$$

$$l = 4: S\text{-スプライン}, \quad l = 3: B2\text{-スプライン.}$$

$$[f_0(t), f_1(t), \dots, f_l(t)] = [1, t, t^2, \dots, t^l] M_l,$$

*原稿受付 平成 5 年 11 月 10 日

**正 会 員 豊田工業大学工学部(名古屋市天白区久方 2-12-1)

***正 会 員 東京大学工学部(東京都文京区本郷 7-3-1)

†正 会 員 山梨大学工学部(甲府市武田 4-3-11)

Fig. 1 (a) S - / $B2$ -splines with controllable locality, interpolating points (7.59, 15.88), (12.87, 16.86), (15.92, 12.69), (11.55, 10.35), (7.86, 14.3), (3., 15.075), (1.61, 10.)

$$M_4 = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3/2 & -3 & 3/2 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -5 & 2 & 0 \\ 1/4 & -3/2 & 5/2 & -3/2 & 1/4 \end{bmatrix}, \quad (5)$$

$$M_3 = \begin{bmatrix} 1/6 & 2/3 & 1/6 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & -1 & 1/2 & 0 \\ -1/6 & 1/2 & -1/2 & 1/6 \end{bmatrix}. \quad (6)$$

図1に曲線例を示す。実線が S -スプライン補間曲線、点線が $B2$ -スプライン補間曲線である。 $m \geq 3$ では、描画された両曲線を区別することがむずかしい。実際 $m = 5$ のときに、両曲線が従来の3次の B -スプライン補間曲線と誤差 0.1% 以内で一致することが知られている¹⁾。 m が小さい値から増すにつれて、凸部分の形状が大きく振動するようにして収束にむかう様子がみられる。そこで3章では、 $m = 1, 2$ の場合を対象に新しい最小化条件を導入してこの性質の改善をはかる。結果を明示するために、曲線の右上部分の拡大図を用いる。そしてそこに従来の3次の B -スプライン補間曲線を白抜き太線でそえる。

式(1)は具体的に次のように書きかえることができる。曲線は図2のようになる。

$$d_{2i+1} = (1 - \lambda - \mu)q_{i,0} + \lambda q_{i,1} + \mu q_{i,2}, \quad (7)$$

$$m = 1: \lambda = -0.36603, \quad \mu = 0,$$

$$m = 2: \lambda = -0.3333376, \quad \mu = 0.0893164.$$

3. 最小化条件

$m \rightarrow \infty$ のとき、曲線(3)の ($r(u)$ と記す) 各座標成分は、曲線全体にわたる2次微分の自乗積分最小化条件(8)を満たす²⁾。

$$\min E_0 = \min \int \{\ddot{r}(u)\}^2 du. \quad (8)$$

m が1, 2と小さい曲線は、この条件から大きくはずれて「滑らかさ」を欠くかもしれない。本節では、この局所性の強い補間曲

Fig. 2 (b) Interpolating S - / $B2$ -splines with controllable locality

線に新たな最小化条件を導入して、それを満たすように式(7')の λ_i, μ_i を決定する方法について述べる。

$$d_{2i+1} = (1 - \lambda_i - \mu_i)q_{i,0} + \lambda_i q_{i,1} + \mu_i q_{i,2}. \quad (7')$$

3.1 大域的な最小化条件

曲線の2次微分の内積を曲線全体にわたって積分して最小化する条件(9)を課する。これは成分ごとの最小化条件(8)より強い条件である。曲線は λ_i, μ_i に関する1次式であるので条件を満たす λ_i, μ_i を連立一次方程式の根として得ることができる。いずれの通過点を移動しても再計算する必要がある。

$$\min E_1 = \min \int \{\ddot{r}(u)\}^2 du = \min \int_0^1 \sum_i \{\ddot{r}(t)\}^2 dt. \quad (9)$$

式(7')は付加制御点を近傍通過点だけから決めることによって曲線に局所性を持たせようとするものである。しかし、上記のようにすべての通過点の影響を受けることになる λ_i, μ_i を式の中にもち込むならば、生成曲線も大域性をもつことになる。図3は、このような補間曲線である。形状が似たりよったりなので $B2$ -スプライン補間曲線を省略している。 $m = 1$ のときには、曲線はまだ大域性のある従来の3次の B -スプライン補間曲線から離れている。しかし、 $m = 2$ になると、曲線は従来の3次の C^2 補間曲線と完全に一致する。

従って、局所性のある補間曲線の λ_i, μ_i は、次節のように最小化条件を局所的に適用しながら決めていく必要がある。

3.2 局所的な最小化条件

$m = 1, 2$ のときには付加制御点をそれぞれ近傍4, 6通過点から定めることになる。この範囲の通過点で近傍の1あるいは3スパンを仮に定めて、これに局所的な最小化条件(10)を適用して対応する λ_i や μ_i を決定する。

$$\min E_2 = \min \int_0^1 \sum_{j=-lm+l}^{lm-1} \{\ddot{r}_{i+j}(t)\}^2 dt, \quad (10)$$

$$l = 1: S\text{-スプライン}, \quad l = 2: B2\text{-スプライン}.$$

従って、隣接の付加制御点は中央の付加制御点に比べて少ない通過点から決めざるを得ない。 $m = 1$ のときには、仮想通過点を加えて最小化条件を課する。

Fig. 3 Interpolating S-splines with (global) minimum property

3.2.1 $m=2$

3 スパンにわたる最小化条件を適用して、近傍 6 通過点から一組の λ_i, μ_i を定める。このとき、 $\mu_{i-1} = \mu_{i+1} = 0$ として、 $\lambda_{i-1}, \lambda_i, \mu_i, \lambda_{i+1}$ に関する 4 元連立一次方程式を解く。

3.2.2 $m=1$

1 スパンへの最小化条件を適用して λ_i を 1 つ定める。このとき、近傍 4 通過点を補間する曲線が次のように外に延びていると考えて 2 つの仮想通過点を加える。4 通過点 $p_{i-1}, p_i, p_{i+1}, p_{i+2}$ に対して、点 p_{i-1} における Bessel の接線²⁾を求めて、その法線に関する P_i の対称点を仮想通過点 p_{i-2} と考える。

$$\begin{cases} T_{i-1} = -3p_{i-1} + 4p_i - p_{i+1}, \\ t_{i-1} = \frac{T_{i-1}}{|T_{i-1}|}, \\ p_{i-2} = p_i - 2(p_i - p_{i-1}) \cdot t_{i-1} t_{i-1}. \end{cases} \quad (11)$$

仮想通過点 p_{i+3} も同様に決める。1 スパンへの最小化条件の適用にあたっては、曲線の自由度を制限しないと曲線分が直線的になりすぎる。そこで、 $\lambda_{i-1} = \lambda_{i+1} = \lambda_i, \mu_{i-1} = \mu_i = \mu_{i+1} = 0$ とする。曲線は図 4 となる。

3.3 通過点配置に独立な最小化条件

3.1, 3.2 節における最小化条件は通過点の配置に依存するために、いずれの通過点を移動しても関連する部分を再計算する必要がある。本節では、通過点配置に独立な最小化条件によって式 (7) の λ, μ を決定する。

3.3.1 ブレンディング関数への最小化条件

式 (3) のブレンディング関数 $f(u)$ における λ, μ をここでは通過点に独立と考えているので、式 (8) から次のような最小化条件を得る。

$$\min E_3 = \min \int_{-2-m}^{2+m} \{\tilde{f}(u)\}^2 du. \quad (12)$$

実際、近傍 4 通過点から 1 スパンが決まる 3 次の C^2 連続な B3-スプライン補間曲線がこの条件で導かれている⁶⁾。

$f(u)$ は B-スプラインで表される。曲線のクロスプロットを求める方法²⁾によって付加制御点を求める。ゼロでない縦座標は u の負の側から順に

$$\frac{\mu}{2}, \frac{\lambda}{2}, \frac{1-\lambda-\mu}{2}, \frac{1-\lambda-\mu}{2}, \frac{\lambda}{2}, \frac{\mu}{2}.$$

Fig. 4 Interpolating S- / B2-splines based on local minimization conditions

ほかの制御点を式 (2) で定めて、式 (12) から λ, μ を得る。

(i) S-スプライン

$$m=1: \lambda = -0.295455,$$

$$m=2: \lambda = -0.344011, \mu = 0.0821727,$$

(ii) B2-スプライン

$$m=1: \lambda = -0.29,$$

$$m=2: \lambda = -0.343014, \mu = 0.0803244.$$

図 5 はこのようにして得られる曲線である。

3.3.2 その他

S-スプラインの場合に、3.2.2 節の隣接付加制御点を次のように決めて

$$\begin{cases} d_{2i-1} = \nu_{-1}p_{i-1} + (1-\nu_{-1}-\nu_{-2})p_i + \nu_{-2}p_{i+1}, \\ d_{2i+3} = \nu_2p_i + (1-\nu_1-\nu_2)p_{i+1} + \nu_1p_{i+2}, \end{cases} \quad (13)$$

仮想通過点を 4 通過点の両端点に関して点対称にとる。すると、式 (1) における $q_{i,0}, q_{i,1}, q_{i,2}$ が同一直線上にのって、詳細はわからないが、 λ は通過点配置に関係なく一定値、 -0.2 となる。

ほかに、3.1 節におけるすべての λ_i, μ_i をそれぞれ λ, μ として平均的な値を求めて、通過点位置変更後も用いることが考えられる。我々は、乱数を使って平面上にとられた点列を補間するといった一般的な場合を扱おうとしているのではなく、かなり制約された範囲内で可能な形状を取り扱っていることが多い。従って、初期の時点で対象曲線について計算した λ, μ を平均的に最小化条件を満たす代表値として用いることには十分妥当性がある。

図 6 は、上記の 2 種類の曲線を示している。前者は $\lambda \equiv -0.2$ とする曲線である。後者は、大域的な最小化条件によって λ, μ を決めて図の点線のような補間曲線を得た後、2 通過点を移動

Fig. 5 Interpolating S- / B2-splines with blending functions subject to minimization conditions

Fig. 6 Interpolating S- / B2-splines with the previous λ , μ after some interpolation points were repositioned

Table 1 E s and E_1 s for 2nd to 4th spans and all spans. Upper entry: value in S-splines, lower entry: value in B2-splines, (): value for all spans

m	Sec.	E		E_1	
∞		0.23430	(0.39898)	188.16	(295.57)
2	2.	0.25070	(0.42438)	191.98	(300.22)
		0.25409	(0.42882)	194.10	(302.63)
	3.1	0.23430	(0.39898)	188.16	(295.57)
		0.23430	(0.39898)	188.16	(295.57)
	3.2.1	0.22833	(0.39533)	186.63	(296.35)
		0.23596	(0.40708)	187.90	(296.11)
	3.3.1	0.23550	(0.40396)	188.61	(297.28)
		0.23531	(0.40368)	189.07	(297.81)
1	3.3.2	0.23587	(0.40653)	188.22	(296.02)
		0.23602	(0.40686)	188.29	(296.13)
	2.	0.21265	(0.37907)	216.66	(355.01)
		0.22186	(0.39283)	233.40	(380.43)
	3.1	0.25351	(0.43655)	191.83	(299.92)
		0.25838	(0.44374)	191.99	(301.05)
	3.2.2	0.24558	(0.43793)	196.61	(306.59)
		0.25152	(0.45033)	197.61	(308.29)
	3.3.1	0.21691	(0.38277)	196.77	(313.42)
		0.21861	(0.38510)	200.84	(318.49)
	3.3.2	0.27309	(0.46874)	196.04	(302.10)

してくだんの通過点配置とした後にも同じ λ , μ を使った曲線である。

4. 比較・検討

前章で、局所性を維持したまま最小性を付与するためにいくつかの局所的最小化条件を導入した。これらと同じ局所的範囲に適用しつつ移動するのであれば、全域での総計値によって結果を比較しても良いであろう。従って、曲線を比較・評価する1つの指標として E_1 と、次のより強い曲率自乗積分値 E も使う。

$$E = \int \{\kappa(u)\}^2 du = \int_0^1 \sum_i \{\kappa(t)\}^2 dt.$$

さらに、「曲線はその曲率グラフが連続で、数少ない単調な部分からなるときに美しい²⁾。」という考え方を受け入れて、曲率グラフも採用する。すなわち、 E_1 を小さくするという目標のほか、 E を小さくすることと「連続な曲率グラフの単調化」という間接的な目標も加えて比較・検討する。

まず、これまでと同じデータ点列に対する各曲線の E , E_1 値を表1に示す。 E , E_1 とも比較的小さい値となっている曲線について、始めの同じ3スパン部分の曲率グラフを見てみると図7のようになる。点線がB2-スプライン曲線である。これまでの曲線の出力図、表1、図7とから次のようなことがわかる。

- (1) いずれの方法も、系統的に局所性を制御できる曲線の $m = 1, 2$ のときの好ましくない振動現象を取り除いている。
- (2) $m = 1$ のときには通過点依存の最小化条件を適用することがむずかしい。当然、通過点独立の3.3.1節の場合よりも小さい E_1 を期待するが、 $m = 2$ の場合には得られるのに $m = 1$ の場合には得られない。滑らかさと両立させるには局所性が強すぎるのかもしれない。
- (3) プレンディング関数へ最小化条件を適用する通過点独立の3.3.1節の方法は、一応の成果を計算量少なく得る簡便法である。

Fig. 7 Curvature plots

- (4) おおまかにいって、いずれの最小化条件も全域の値 E_1 を小さくするとともに E も小さくするように働く。
- (5) 図 7 のほとんどの曲率グラフは節点間と節点とで極値をとり、極値間で「強い意味で」単調である。従って、グラフは同じ数の単調な部分からなるので、 E の小さい曲線の方が好ましい。しかし、 $m=1$ のとき、2 章や 3.3.1 節の方法では E の値は小さくなるけれども、変曲点が入り込んでグラフが不安定に推移するのであまり好ましくない。
- (6) 結局、 $m=2$ のときには 3.2.1 節の方法がすぐれていて、次に、3.3.1 節か 3.3.2 節の方法が良い。 $m=1$ のときには 3.3.1 節の簡便法が良い。

図 8 には上記 (6) で各 m ごとに選んだ優れた方法によるほかの曲線例を示している。

5. おわりに

局所的振舞いをする C^2 補間曲線のための局所的な最小化条件を導入して、次のような主要な成果を得た。

- (1) 系統的に局所性を制御できる曲線の $m=1, 2$ のときの好ましくない振動現象を取り除いた。

Fig. 8 Superior S-spline curve in each case

- (2) $m=2$ のとき、通過点依存の最小化条件が局所性のある滑らかな曲線を生成できることを示した。実例は、従来の 3 次 C^2 補間曲線よりも小さい曲率自乗積分値を達成した。
- (3) $m=1, 2$ のとき、ブレンド関数へ最小化条件を適用する簡便法が、計算量少なく一応の成果を与えることを示した。
- (4) $m=1$ のときには局所性が強すぎて通過点依存の最小化条件を適用することがむずかしい。

得られる曲線は B -スプライン表現されているので、従来曲線と整合性がある。また、 $m=3$ として式 (7') に $\mu_i q_{i,3}$ を加えて、付加制御点が空間内の任意の点を表せるようにして空間曲線に拡張できる。今後、上の成果 (2) に関連する連立方程式を数式処理システムを用いて簡潔に整理し、計算量を減らすことによって利用の便をはかっていきたい。

参考文献

- 1) 黒田 満, 古川 進, 木村 文彦: 局所性を制御できる補間曲線としての S -スプラインと B_2 -スプライン, 情報処理学会論文誌, **34**, 11 (1993) 2294.
- 2) G. Farin (木村 文彦 監修, 山口 泰 監訳): CAGD のための曲線・曲面理論-実践的利用法-, 共立出版, (1990) 99, 85, 148, 277.
- 3) 河合利幸, 藤田卓志, 大村皓一: 2 重節点をもつスプライン基底の一構成法, 電子情報通信学会論文誌 D, **J71-D**, 6 (1988) 1149.
- 4) C. D. Woodward: B_2 -splines -A Local Representation for Cubic Spline Interpolation-, In Proc. CG International '87, T. L. Kunii (ed.), Springer-Verlag, New York, (1987) 197.
- 5) M. A. Krokos and M. Slater: Interactive Shape Control of Interpolating B -splines, Computer Graphics Forum (EUROGRAPHICS '92), **11**, 3 (1992) C-435.
- 6) Kai-Ching Chu: B_3 -splines for Interactive Curve and Surface Fitting, Computer & Graphics, **14**, 2 (1990) 281.
- 7) 古川 進, 伊藤 誠, 黒田 満, 清水誠司: 自由曲線, 曲面の生成時における制御点決定の一手法, 精密工学会誌, **58**, 4 (1992) 715.