サイクロイドボール減速機の基礎解析 (第3報)*

— 強度設計 —

寺田 英嗣** 牧野 洋*** 今瀬 憲司***

Fundamental Analysis of Cycloid Ball Reducer (3rd Report)
- Strength Design -

Hidetsugu TERADA, Hiroshi MAKINO and Kenji IMASE

The Cycloid Ball Reducer has been developed for use for servo mechanism elements. Motion principle of the reducer has been analyzed, and it becomes clear that there is the optimal value of trochoid factor which affects on pressure angle and radius of curvature. In this report, the fundamental design parameters of Cycloid Ball Reducer are investigated and derived, to adapt external type reducers with trochoidal groove or teeth. The strength of trochoidal groove for this reducer is analyzed using Hertz's theory. It is proved that the strength of reducer is influenced on center distance modification factor, ball diameter factor, ball number and module of this reducer. As the results, one of the design method that is based on theoretical strength, can be shown. Also, this method is able to evaluate the allowable load torque for this reducer.

Key words: reducer, cycloid ball reducer, theoretical strength, Hertz's theory, allowable torque

1. はじめに

サーボ機構用減速機として開発されたサイクロイドボール減速機の基礎解析を行い、運動伝達メカニズムについて明らかにしてきた¹⁾²⁾。その結果、減速機の各ボールに負荷される荷重が圧力角変動の影響によって複雑な挙動を示すことが確認された。また近年、トロコイド曲線の創成軌跡を持つ減速機の一つとして提案されたトロコイド歯車³⁾や、通常のインボリュート歯車との比較を行うためにも設計パラメータの再定義が必要となってきた。一方、サイクロイドボール減速機を設計する際には許容伝達トルクを求めることが不可欠であり、何らかの設計指針が必要とされている。本報では外接型にも適用できるような設計諸元の見直しを行うとともに、減速機的设计指針を与えるために強度設計法について検討を行った。

2. 中心距離増加係数を用いた諸元の一般化

本報で解析するサイクロイドボール減速機は図1に示したようにエピトロコイド曲線を中心軌跡に持つ溝が切られた固定円板とハイポトロコイド曲線を中心軌跡に持つ溝が切られた減速回転円板、ボール、偏心入力軸及び偏心運動を取り除いて減速回転運動のみを出力する機構で構成されている。この減速機は内接型遊星歯車的一种であり、ボールを介してトロコイド曲線をかみあわせることにより減速している。前報ではトロコイド曲線の曲線形状決定変数としてトロコイド係数を用いたが、インボリュート歯車の場合と設計条件が異なるために機構設計の際に比較しにくいことが挙げられる。またトロコイド歯車のようなトロコイド曲線の歯型創成軌跡を持つ外接型減速機も提案されていることから、これらの設計にも適用できるように諸元を再定義した(表1参照)。

Fig.1 Structure of Cycloid Ball Reducer

Table 1 Specification of the Cycloid Ball Reducer

Term	Symbol	Specification
Pitch diameter	d_1	Base circle diameter of epitrochoidal wave
	d_2	Base circle diameter of hypotrochoidal wave
Wave number	Z_1	Number of epitrochoidal wave
	Z_2	Number of hypotrochoidal wave
Module	m	Basic rolling diameter $m = \frac{d_1}{Z_1} = \frac{d_2}{Z_2}$
Ball number	Z_b	$Z_b = Z_1 + 1 = Z_2 - 1$
Center distance modification factor	y	$y \leq 0$
Center distance	a	$a = a_0 + ym = \left\{ \frac{Z_2 + Z_1}{2} + y \right\} m$
Ball diameter	d_b	
Ball diameter factor	C_d	$C_d = \frac{d_b}{m}$
Groove radius factor	C_g	$C_g = 1.04$

* 原稿受付 平成7年1月10日

** 正会員 山梨大学工学部(甲府市武田4-3-11)

*** 加茂精工(株)(愛知県西加茂郡藤岡町御作1166)

Fig. 2 Motion principle

モジュール m はトロコイド曲線基礎円直径をトロコイド曲線の波数で除した値で、サイクロイド曲線の場合の転がり円直径に相当する。またトロコイド曲線軌跡を用いた減速機では、通常のインボリュート歯車とは異なり転位係数がそのまま中心距離増加係数 y になっている。すなわちこの係数が0に近づけばサイクロイド曲線になり、離れるに従ってトロコイド曲線になっている。なおこの減速機の場合は中心距離増加係数は常に負となっている。また中心距離 a は表1中の式で与えられるが、ここで基礎円が外接する場合には式中の符号が+、内接する場合には符号が-となり、トロコイド係数 α と中心距離増加係数の関係は次のようになっている。

$$\alpha = 1 + y \quad (1)$$

これらをもとに図2に示した減速機のエピトロコイド曲線軌跡を式(2)、ハイポトロコイド曲線軌跡を式(3)、また入力回転角を θ_2 、減速回転角を δ とすると（式(4)参照）、かみあい状態を式(5)のように表すことができる。

$$P_3 = \frac{Z_1 + 1}{2} m e^{j\theta_3} - \frac{1 + y}{2} m e^{j(1+Z_1)\theta_3} \quad (2)$$

$$P_4 = \frac{Z_2 - 1}{2} m e^{j\theta_4} + \frac{1 + y}{2} m e^{j(1-Z_2)\theta_4} \quad (3)$$

$$\delta = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2} \theta_2 \quad (4)$$

$$P_2 = e^{j\delta} \cdot P_4 - (1 + y) m e^{j\theta_2} \quad (5)$$

さらにボール径についてもモジュールを用いてボール径係数 C_d を定義して無次元化を図っている。すなわちこの係数が同一であれば相似形を保ちながら圧力角等のパラメータを変更せずに寸法を変えることが可能である。

3. 理論強度解析

3.1 接触状態と圧力角・曲率半径

本報で解析したサイクロイドボール減速機は図3に示したよ

Fig. 3 Geometry of contact points

Fig. 4 Contact locus

うにゴシックアーチ形状の溝を用いていることから理論上4点で接触する。しかし本報告では実際に荷重がかかっている図中のA、B点の各ボール2点接触として解析している。また軸方向には予圧が与えられて軸方向の力が釣りあっていることから、圧力角 ψ は前報で報告したように軸直角方向のみで定義している。ここでは性能に影響を与える減速回転側について検討を行った。なお固定側の場合でも基本ベクトル式の角度比が異なるだけで考え方は同一である。また回転方向によってとりうる接触点の方向が変わるが、形状対称性によりどちらの回転方向でも全体の許容トルクは同一になることから1方向のみについて検討している。更に曲率半径については、ボール半径の他に溝断面方向の曲率半径 r_g （式(6)参照）および軌跡方向曲率半径が考えられる。

$$r_g = C_g \cdot C_d \cdot \frac{m}{2} \quad (6)$$

特に軌跡方向の曲率半径は溝中心軌跡に対して r_{co} だけ曲率半径が変化していることから（式(7)参照）、前報にて報告した中心曲率半径 ρ を用いて接触点の曲率半径 ρ_{co} を求めている。

$$r_{co} = \pm C_d \cdot \frac{m}{2} \cdot \sin \lambda_0 \quad (7)$$

Fig. 5 Pressure angle

Fig. 6 Radius of curvature

ここでボール1個において軌跡、圧力角、曲率半径の変動を求めると図4に示したように接触軌跡が1/2波ごとに接触方向が変化しているため不連続な曲線になっている。なおハイポトロコイド曲線上での接触軌跡 P_{5p} 、 P_{5n} は式(8)、(9)で与えられる。但し ϕ は中心軌跡の接線ベクトル $\dot{P}_4$ の方向を示しており、 P_{5p} は溝の内側、 P_{5n} は溝の外側を示している（式(10)参照）。

$$P_{5p} = \frac{Z_2 - 1}{2} m e^{j\theta_4} + \frac{1 + y}{2} m e^{j(1-Z_2)\theta_4} + \frac{d_b}{2} \sin \lambda_0 e^{j(\phi + \frac{\pi}{2})} \quad (8)$$

$$P_{5n} = \frac{Z_2 - 1}{2} m e^{j\theta_4} + \frac{1 + y}{2} m e^{j(1-Z_2)\theta_4} + \frac{d_b}{2} \sin \lambda_0 e^{j(\phi - \frac{\pi}{2})} \quad (9)$$

$$\dot{P}_4 = \dot{s} e^{j\phi} = j \frac{Z_2 - 1}{2} m \dot{\theta}_4 \{ e^{j\theta_4} - (1 + y) e^{j(1-Z_2)\theta_4} \} \quad (10)$$

また接線ベクトルを微分することによって $\dot{\phi} \dot{s}$ を含む式を導くことができることから（式(11)参照）、中心軌跡曲率半径 ρ および接触点曲率半径 ρ_{co} は式(12)、(13)で与えることができる。

$$\ddot{P}_4 = \ddot{s} e^{j\phi} + j \dot{\phi} \dot{s} e^{j\phi} \quad (11)$$

$$= -\frac{Z_2 - 1}{2} m \dot{\theta}_4^2 \{ -e^{j\theta_4} - (1 + y)(Z_2 - 1) e^{j(1-Z_2)\theta_4} \}$$

$$\rho = \frac{\dot{s}}{\dot{\phi}} = \frac{\dot{s}^2}{\dot{\phi} \ddot{\phi}} \quad (12)$$

$$\rho_{co} = \rho \pm r_{co} \quad (13)$$

これらに基づいて圧力角および接触点曲率半径の挙動を求める。1/2波ごとに变化する複雑な挙動を示している（図5、6参照）。まず圧力角についてはトロコイド曲線は1波において理論接触軌跡は対称形をしているため、入力軸回転角とともに符号が変わるものの絶対値の変動挙動も対称形になっている。但し、図5にも示したように接触軌跡には干渉部分があるために実際の軌跡では圧力角変動は非対称になっている。一方、曲率半径では接触方向が変化すると符号だけでなくボール接触半径だけずれるために絶対値をとっても非対称である。更に溝の干渉部分の影響は圧力角の場合と同様であり、入力軸回転角の影響は曲率半径の方が大きいことがわかる。

また圧力角の絶対値がもっとも小さくなる点すなわち動力伝達ロスが最小になる点は接触点軌跡の曲率半径の変曲点に一致している。なお前報で述べたように中心距離増加係数を修正して溝の干渉がないようにすることも考えられるが、減速機全体では各ボールの圧力角変動の位相がずれているために、接触点の圧力角が同時に90°にならないことを考慮して、機構学条件としては中心距離増加係数には限定範囲を設定していない。

3.2 弾性接触理論に基づく強度計算式

減速機の運動伝達に影響を与える溝部分の許容面圧より許容トルクを求める方法を検討した。最大法線力 F_{max} がかかる場合の最大面圧 σ_{max} は、Hertzの弾性接触理論に基づいて許容面圧を求めたLundberg-Palmgrenの式⁴⁾より式(14)で与えられる。このときの最大面圧が減速回転円板の表面疲れ限度 σ_{Hlim} ⁵⁾以下であれば損傷は発生しないことから、表面疲れ限度に相当する面圧を発生する法線力を許容法線力としている。また接触楕円半径 a_{d1} 、 b_{d1} 及び等価曲率半径 ρ_e 、補助変数 τ_{d1} はヤング率 E_1 、 E_2 、ポアソン比 ν_1 、 ν_2 として式(15)～(18)で与えられる（図7参照）。

$$\sigma_{Hlim} = \sigma_{max} = \frac{3F_{max}}{2\pi a_{d1} b_{d1}} \quad (14)$$

$$a_{d1} = \mu_{d1} \left\{ \frac{3F_{max} \rho_e}{2} \left(\frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \right) \right\}^{\frac{1}{3}} \quad (15)$$

$$b_{d1} = \xi_{d1} \left\{ \frac{3F_{max} \rho_e}{2} \left(\frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \right) \right\}^{\frac{1}{3}} \quad (16)$$

$$\frac{1}{\rho_e} = \frac{4}{C_d m} - \frac{1}{r_g} + \frac{\sin \lambda_0}{\rho_{co}} \quad (17)$$

$$\cos \tau_{d1} = \left(-\frac{1}{r_g} + \frac{\sin \lambda_0}{\rho_{co}} \right) \rho_e \quad (18)$$

なお式(17)、(18)で中心軌跡に対して外側軌跡の場合には+、内側軌跡の場合には-をとる。また μ_{d1} 、 ξ_{d1} は楕円の長径、短径の比を表しており、補助変数 $\cos \tau_{d1}$ を変数とする第1種、第2種楕円積分によって求められる⁶⁾。ここで曲率半径のうち ρ は x y 平面上のものであり、実際に必要な主曲率の方向は接触角 λ_0 だけ角度を持っていることから ρ_{co} を $\sin \lambda_0$ で除して等価曲率半径を求めている。

また許容面圧を発生する共通法線力 F_k の従節回転方向の分力が伝達トルク q_k を発生する力に相当することから（図8参

Fig. 7 Contact area

Fig. 9 Allowable torque for Cycloid Ball Reducer

照), これらの関係は接触軌跡 P_5 から求めた作用半径 r_{5k} , 圧力角 ψ_k , 接触角 λ_0 を用いて以下の式で与えることができる.

$$F_k = \frac{q_k \sin \lambda_0}{r_{5k} \cos \psi_k} \quad (19)$$

この式を変形すればボール1個について任意の接触点の伝達トルクを求めることができる. なお, 圧力角が 90° になる場合には伝達トルクは計算上0になるが, 減速機全体で見れば各ボールの圧力角状態は位相がずれているために各接触点で同時に圧力角が 90° になることはない. このため減速機全体の伝達トルクは各ボールごとに求められたトルクの総和で求めることができ, これを伝達可能トルク q として強度の基準とすることにした(式(20)参照).

$$q = \sum_{k=0}^{Z_b-1} \frac{F_k r_{5k} \cos \psi_k}{\sin \lambda_0} \quad (20)$$

($k=0, 1, 2, \dots, Z_b-1$)

以上より, 入力軸回転角に対する伝達可能トルクの変化を求めると図9に示したように, 圧力角変動と溝の干渉の影響によって伝達可能トルクは回転角度によって大きな差が見られる. なお本報告では減速回転円板表面の疲れ限度 σ_{Hlim} を材質がクロム鋼 (SCM440H, 硬度HV600) で, 転走面上の1点当たりのボール総通過回数が 1×10^9 回の場合の値の1190MPaを用いている⁷⁾. また図中の中心距離増加係数が0の場合, 伝達可能トルクが平均的に大きくなるが軌跡の干渉の影響が大きくなっている. ここで減速機を設計する際に性能設計の目安にするために, 伝達

Fig. 8 Geometry of pressure angle and forces

可能トルクの最小になる値を許容トルク q_{max} と定義して性能を評価することにした.

3.3 強度設計に基づいた設計条件

サイクロイドボール減速機の諸元を決定するパラメータを変えることにより伝達可能トルクを任意にできることから, ここでは影響が大きい4つのパラメータについて解析を行い, 要求されている伝達トルクを満足する設計条件の範囲を求めた.

まず中心距離増加係数についてであるが, サイクロイド曲線に近いほど最小圧力角が 0° に近くなるため, 法線力は増大して許容トルクが大きくなることからわかる(図10参照). しかし, 中心距離増加係数が0では溝の干渉の増大による影響によって伝達可能トルクが減少しており使用条件としては推奨できない. ここで一例として要求される性能として伝達可能トルクの下限値を $20.0 \text{ N} \cdot \text{m}$ とすると, 中心距離増加係数の条件として妥当な範囲は以下になる.

$$-0.55 \leq y \leq -0.05$$

また, モジュールが変化すると伝達可能トルクが大きく変動する(図11参照), モジュールをどこまで小さくできるかが減速機を小型化するためには重要である. ここで前述の許容トルクの下限値を用いれば以下の条件が必要になる.

$$m \geq 9.0$$

一方, ボール直径係数が大きくなれば接触楕円の大きさが大きくなるため伝達可能トルクが大きくなる. ここで図12に示したものについては前述の下限値を用いれば次の条件内でボール直径係数を選択する必要がある.

$$1.0 \leq C_d \leq 3.25$$

しかし C_d が2.5以上の場合, 溝の干渉の影響が大きくなるために許容トルクは急激に低下していることから, ボール径を大きくしても強度が増大するとは限らないことを示している.

またボール個数が増えると個数に比例して有利になる(図12参照). 同様に前述の下限値を用いれば次の条件が必要である.

$$Z_b \geq 5$$

なおボール個数を多くすると全体の大きさが大きくなってしまいうため実際の設計ではモジュールを小さくしなくてはならない, また構造的にボール個数が3個以上でないと予圧を均一にかけることが難しいことから, 設計条件を決定する際にはこれを念頭において設計しなければならない. 特に小型化を主眼に設計する場合にはボール直径, モジュールが最小になるように他のパラメータを修正して設計しなければならない.

Fig. 10 Relations between center distance modification factor and transmissive torque

Fig. 11 Relations between module and transmissive torque

Fig. 12 Relations between ball diameter factor and transmissive torque

Fig. 13 Relations between ball number and transmissive torque

4. 結 論

本報ではサイクロイドボール減速機の設計諸元の見直しを行うとともに、減速機の設計指針を与えるために許容面圧を満足する理論強度の検討を行った。その結果、要求性能を満足する設計条件を求めることができ、減速機を設計する際の一つの指針を示すことが可能になった。なお中心軌跡のトロコイド曲線の曲率符号変化部付近での圧力角変動が、伝達可能トルクの変動を大きくしていることから、この影響をできる限り小さくできるような溝の軌跡の改良も含めた構造の再検討が今後の課題である。

参 考 文 献

1) 寺田英嗣, 牧野 洋, 今瀬憲司: サイクロイドボール減

速機の基礎解析 (第1報), 精密工学会誌, 54, 11 (1988) 2101.

- 2) 寺田英嗣, 牧野 洋, 今瀬憲司: サイクロイドボール減速機の基礎解析 (第2報), 精密工学会誌, 56, 4 (1990) 751.
- 3) 本多 浩, 牧野 洋: トロコイド歯車に関する研究 (第1報), 精密工学会誌, 60, 7 (1994) 949.
- 4) 岡本純三: ころがり軸受・ころ軸受の動的負荷容量 - Lundberg-Palmgren理論の詳解 -, (1988) 13.
- 5) 大西 清: 機械設計製図便覧, 第8版, 理工学社, (1993) 11-26.
- 6) 石井章夫: 弾性体の接触について - いわゆるヘルツ理論について -, NTN Tech. Rev., No. 55 (1989) 110.
- 7) 歯車強さ設計資料出版分科会編: 技術資料 - 歯車強さ設計資料 -, 日本機械学会, (1979) 64.