クロソイド曲線を用いた平面曲線の記録と加工 に関する研究 (第1報)*

——クロソイド補間による楕円とインボリュート曲線の近似誤差——

邢 英 杰** 牧 野 洋*** 須 田 大 春†

Recording and Processing of Planar Curve Using Clothoids (1st Report)
— Approximation Error of Ellipse Curve and Involute Curve with Clothoidal Interpolation —

Yingjie XING, Hiroshi MAKINO and Hiroharu SUDA

NC machining of mechanical parts having free-form curve shapes such as cam's profile curves is usually done by using linear and circular interpolation. The problem with this approach, however, is that a large number of machining data is needed. Moreover, the tangent and curvature at the interpolated points are not continuous. In this report a practical method for clothoidal interpolation is discussed. Linear and clothoidal interpolation are compared each other in three methods. The first method divides the parameter angle equally with maximum allowable error. The second method divides the length of the curve equally with maximum allowable error. The last method selects every angle or length with equal allowable error. The results show that clothoidal interpolation requires less data than linear and circular interpolation to satisfy given tolerance between interpolation points.

Key words: clothoid, interpolation, planar curve

1. 緒 言

従来NC加工においては直線補間および円弧補間が一般的に用いられており、与えられた必要最小限のデータによって、NC装置側で駆動パルスまたは駆動位置データを創成することが行われている。また、自由曲線などの場合には、これを点列データに直し、プログラマ側で、Bスプライン補間やベジエ補間などを用いてより細かい点列データに直した上でNC装置側に送りこむことが行われるが、この場合にも、NC装置側では受け取った点列間を直線補間して加工を行うのが普通である。

これに対して筆者らのグループでは、NC装置側にクロソイド曲線の発生器（クロソイド・ジェネレータ）を設置して曲線創成を行うことを想定して研究を進めており、プログラマ側でどの程度粗いデータ（少ないデータ）を送ることが可能かを検討している。本報では性質が既知の楕円およびインボリュート曲線の場合につき、クロソイド近似を行った場合の誤差を検討した結果を報告する。

2. クロソイド曲線¹⁾

クロソイド曲線は曲線の長さに比例して曲率が $-\infty$ から $+\infty$ まで連続的に変化する曲線である。図1は一つのクロソイドセグメントを示す。 P_0 は始点の位置、 P_1 は終点の位置、 h はクロソイドセグメントの長さ(mm)、 ϕ_0 は初期方向、 ϕ_1 は長さ h の曲線が初期曲率を持つ円弧であるときの接線角の増分（これを円弧増

Fig. 1 Clothoid segment

分と名付ける)。 ϕ_u はこれに更にクロソイド分が加わることによる接線角の増分（これをクロソイド増分と名付ける）である。クロソイド曲線は次式のような無次元式で表される曲線である。

$$P = P_0 + h \int_0^S e^{i\phi} dS \quad (1)$$

$$\phi = \phi_0 + \phi_v S + \phi_u S^2 \quad (2)$$

$$c_v = \frac{d\phi}{dS} \frac{dS}{ds} = \frac{1}{h} (\phi_v + 2\phi_u S) \quad (3)$$

$$c_u = \frac{dc_v}{dS} \frac{dS}{ds} = \frac{1}{h^2} (2\phi_u) \quad (4)$$

ここで、

s : 曲線上の変位 ($0 \leq s \leq h$) (mm)

S : 無次元変位 ($S = s/h$, $0 \leq S \leq 1$)

ϕ : 接線方向角(rad)

c_v : 曲率

c_u : 縮率

終点 P_1 における ϕ の値を ϕ_1 とすると、

* 原稿受付 平成6年12月1日

** 学生会員 山梨大学大学院 (甲府市武田 4-3-11)

*** 正 会 員 山梨大学工学部

† 正 会 員 (株)ユニデータ(町田市鶴間 3-2-2)

$$\phi_1 = \phi_0 + \phi_v + \phi_u \quad (5)$$

となる。

以上により、一つのクロソイドセグメントは、次の四つのパラメータで表すことができる。

$$h, \phi_0, \phi_v, \phi_u$$

ここで、 h のみが図形の大きさに関係し、他の三つは大きさには関係せず、曲線の形のみに関係する。 $\phi_u=0$ とすると円弧が得られ、さらに $\phi_v=0$ とすると直線になる。すなわちクロソイドは円弧および直線を包含する。以下この無次元パラメータを用いる。図2は $\phi_0=70^\circ$ 、 $c_{v0}=-0.419\text{mm}^{-1}$ から $c_v=0.419\text{mm}^{-1}$ のクロソイド曲線を示す。

以下のクロソイド補間においては、始終点の座標および原曲線の理論接線方向からクロソイドセグメントのパラメータを定める接線法¹⁾を用いた。

Fig. 2 Clothoid spiral

3. クロソイド・ジェネレータ²⁾

四つの値 $h, \phi_0, \phi_v, \phi_u$ を与えると1本のクロソイドを描くことができる。それによりクロソイドを描くソフトウェア（ないしはファームウェア）をクロソイド・ジェネレータと呼んでいる。図3はプロッタ用のクロソイド・ジェネレータの構成を示している。

Fig. 3 Clothoid generator for XY-plotter

入力するパラメータは上述の四つに加えて、

sf : プロッタ座標における尺度係数

nstep : 計算分割数

ndown : ペン・ダウン移動の分割数

nup : ペン・アップ移動の分割数

を指定する。出力値は、

Δx_i : x 軸移動の変化量

Δy_i : y 軸移動の変化量

pendown : ペン・ダウン信号

penup : ペン・アップ信号

x : x 軸移動の総量

y : y 軸移動の総量

である。以下の解析においては、クロソイドはこのクロソイド・ジェネレータを用いて描かれ、ここには誤差がないものと仮定する。

4. 近似誤差の評価方法

4.1 直線補間による誤差

Fig. 4 Straight line interpolation error

図4は理論的曲線を直線近似したときの誤差（コードル・エラー）を示している。理論的曲線は3点 P_i, P_m および P_{i+1} を通る弧上にあるが、直線補間は2点 P_i および P_{i+1} を結ぶ直線上にある。この誤差の最大値は直線 $P_i P_{i+1}$ と、直線 $P_i P_{i+1}$ に平行し、かつ弧上の点 P_m において曲線に接する直線との間の距離である。この誤差を δ_l で表す。切点 P_m の座標値 (x_m, y_m) は接線の傾きによって計算できる。直線 $P_i P_{i+1}$ の方程式を $Ax + By + C = 0$ (A, B, C は計算できる)とすると、点 P_m から直線 $P_i P_{i+1}$ までの距離が計算できる。従って、誤差の計算式は以下ようになる。

$$\delta_l = \frac{|Ax_m + By_m + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad (6)$$

4.2 クロソイド曲線補間による誤差

図5は理論的曲線とクロソイド補間した曲線との誤差を示したものである。理論的曲線は3点 P_i, P_m および P_{i+1} を通る弧上にあるが、クロソイド補間の場合は3点 P_i, P_h および P_{i+1} を通る弧上にある。この誤差の最大値は直線 $P_i P_{i+1}$ と平行し、かつ理論的曲線弧上の点 P_m に接する直線とクロソイド補間した曲線弧上の点 P_h に接する直線との間の距離である。このとき理論的曲線弧上の切点 P_m の座標値 (x_m, y_m) とクロソイド曲線弧上の接点 P_h の座標値 (x_h, y_h) は接線の傾きより計算できる。また接線の傾きを k にすると、点 P_m を通った接線の方程式は $y - y_m = k(x - x_m)$ になる。これらより式(6)によって点 P_m を通る接線から点 P_h までの距離を誤差 δ_c として計算できる。

Fig. 5 Clothoid curve interpolation error

4.3 曲線制御点の分割法

西岡⁹⁾は平面カムの輪郭を加工するために制御点を発生させる方法として下記の経験的等分割法，最大誤差等分割法，誤差一定法の3方法を提案している。著者らはこれに下記の曲線長等分割法を加えて考察を行った。

1) 経験的等分割法

カムの回転角度 θ を等分割する方法である。

2) 最大誤差等分割法

等分割法の一つであり，誤差の最大値が誤差の許容値 δ になるような一定の ΔT あるいは一定の角度 $\Delta\theta$ を用いる方法である。以下の楕円およびインボリュート曲線においては，パラメータ θ として，楕円の場合には長径に相当する円，インボリュートの場合には基円の回転角をとり，これを等分割している。

3) 曲線長等分割法

誤差の最大値が誤差の許容値 δ になるような一定の曲線長さ Δs を用いる方法である。

4) 誤差一定法

誤差 δ が全区間にわたって一定になるように ΔT あるいは角度 $\Delta\theta$ を求める方法である。

本研究では経験的等分割法以外の3方法を考察する。

5. 楕円の近似

楕円の1/4だけを考察する。楕円の長径は $2a=100\text{mm}$ ，短径は $2b=60\text{mm}$ ，誤差許容値は $\delta=0.05\text{mm}$ とする。各図中の×マークは点列データを示す。楕円の理論計算式として下式を用いる。

$$P = a \cos \theta + j b \sin \theta \quad (7)$$

1) 最大誤差等分割法

Fig. 6 Ellipse curve using linear interpolation by dividing the angle equally with given tolerance

Fig. 7 Ellipse curve using clothoidal interpolation by dividing the angle equally with given tolerance

パラメータ θ を n 個に等分割して各区間における誤差の最大値が許容誤差をこえないような最少の n を求める。図6は最大誤差等分割法の直線補間による楕円の作図例を示す。誤差許容値を満足するための最低分割数は18であり，そのときの補間誤差は $\varepsilon=0.048\text{mm}$ である。それに対して図7に示す最大誤差等分割法のクロソイド補間による場合は最低分割数が3ですみ，しかもそのときの補間

Fig. 8 Ellipse curve using linear interpolation by dividing the length of curve equally with given tolerance

Fig. 9 Ellipse curve using clothoidal interpolation by dividing the length of curve equally with given tolerance

Fig. 10 Ellipse curve using linear interpolation by selecting the angle with equal error

Fig. 11 Ellipse curve using clothoidal interpolation by selecting the angle with equal error

誤差は $\varepsilon=0.028\text{mm}$ と小さくなっている。

2) 曲線長等分割法

曲線長さ s を n 個に等分割して各区間における誤差の最大値が許容誤差をこえないような最少の n を求める。図8は曲線長等分割法の直線補間による楕円の作図例を示す。誤差許容値を満足するための最低分割数は24であり，そのときの補間誤差は $\varepsilon=0.048\text{mm}$ である。それに対して図9に示す曲線長等分割法のクロソイド補間による場合は最低分割数が3ですみ，しかもそのときの補間誤差は $\varepsilon=0.020\text{mm}$ と小さくなっている。

3) 誤差一定法

曲線の誤差が許容値以下になるようにするため， $\Delta\theta$ を小さくする必要があるが，データ数をできる限り少なくするためには $\Delta\theta$ を大きくしなければならない。このため最少のデータ数で誤差が許容値以下になるように，適当な $\Delta\theta$ を決めて誤差を計算し，誤差許容値にならない場合は $\Delta\theta$ を大きくして誤差を再計算して誤差許容値と比較する。また小さい場合には $\Delta\theta$ を小さくして誤差許容値になるまで補間点座

標値を繰り返し計算する。そして同じ方法で次々に補間点座標値を計算していく。図10は誤差一定法の直線補間による楕円の作図例を示す。誤差 ε が全区間にわたって誤差許容値 $\delta = 0.05\text{mm}$ になるように角度 $\Delta\theta$ を求める。分割数は16が必要である。しかし、この場合は最後のセグメントの誤差が $\varepsilon = 0.0036\text{mm}$ となり他のセグメントのそれとは違う値になってしまう。この問題は最後のものも含めたすべてのセグメントの誤差が等しくなるように設定し直すことにより分割数が16のままで解決できる。図11に誤差一定法のクロソイド補間による楕円の作図例を示す。最低分割数は3である。

図12は各方法の分割数と誤差の関係を示す。図において記号は下記の通りである。

- A: 最大誤差等分割法による直線補間
- B: 最大誤差等分割法によるクロソイド補間
- C: 曲線長等分割法による直線補間
- D: 曲線長等分割法によるクロソイド補間
- E: 誤差一定法による直線補間
- F: 誤差一定法によるクロソイド補間

Fig. 12 Relationship between error and number of subdivisions

図12は、前述した例の楕円の誤差を解析した結果であるが、補間点列のデータ量を比較すると誤差一定法が一番少なく、次は最大誤差等分割法であり、曲線長等分割法が一番多いことが分かる。また全般的に、クロソイド補間のほうが直線補間よりデータ量をかなり少なく出来ることがわかった。直線補間は1分割当たり2データ、クロソイド補間は1分割当たり4データであるが、このことを考慮しても、なおかつクロソイド補間の方がデータ量を少なくできる。クロソイド補間と直線補間のデータ量と分割数について、1)最大誤差等分割法、2)誤差一定法、3)曲線長等分割法の3つの方法で比較する。許容誤差0.05mmの場合のデータ量を比較すると、1)2)の方法ではクロソイド補間の方が約1/3であり、3)の方法ではクロソイド補間の方が約1/4であった。許容誤差0.001mmの場合の最低分割数について比較すると、1)の方法ではクロソイド補間では8であるのに対して、直線補間では125である。2)の方法ではクロソイド補間では7であるのに対して、直線補間では108である。3)の方法では、クロソイド補間では11であるのに対して、直線補間では168である。データ量については3つの方法すべてにおいて、クロソイド補間の方が約1/8と少なくなった。

もし楕円の長径を短径と等しくとると、円弧になる。円弧の場合について考えてみると、円弧はクロソイドに含まれているため、クロソイド補間の場合は誤差が零である。直線補間の場

合は最大誤差等分割法、曲線長等分割法、誤差一定法がすべて同じことを意味することになる。

6. インボリュート曲線の近似

インボリュート曲線の基礎円半径を $b=20\text{mm}$ 、補助角 α を $0 \sim 120^\circ$ 、誤差許容値を $\delta = 0.05\text{mm}$ とする。各図中の×マークは点列データを示す。インボリュート曲線の計算式は

$$P = be^{j\alpha} - j\alpha be^{j\alpha} \quad (8)$$

を用いた。誤差の計算方法は楕円のそれぞれと同じで分割するのは補助角 α である。

1) 最大誤差等分割法

図13に最大誤差等分割法の直線補間によるインボリュートの作図例を示す。誤差許容値を満足するために分割数は22が必要である。補間誤差は $\varepsilon = 0.046\text{mm}$ である。図14は最大誤差等分割法のクロソイド補間によるインボリュートの作図例を示す。誤差許容値を満足するための最低分割数は4であり、その時の補間誤差は $\varepsilon = 0.043\text{mm}$ である。

Fig. 13 The involute curve using linear interpolation by dividing the angle equally with given tolerance

Fig. 14 The involute curve using clothoidal interpolation by dividing the angle equally with given tolerance

Fig. 15 The involute curve using linear interpolation by dividing the length of curve equally with given tolerance

Fig. 16 The involute curve using clothoidal interpolation by dividing the length of curve equally with given tolerance

2) 曲線長等分割法

図15は曲線長等分割法の直線補間によるインボリュートの作図例を示す。誤差許容値を満足するために分割数は33が必要である。補間誤差は $\varepsilon = 0.048\text{mm}$ である。図16は曲線長等分割法のクロソイド補間によるインボリュートの作図例を示す。誤差許容値を満足するための最低分割数は15であり、その時の補間誤差は $\varepsilon = 0.047\text{mm}$ である。インボリュート曲線は曲率半径が零から始まるため、始点近傍での近似精度が悪くなる。

3) 誤差一定法

図17は誤差一定法の直線補間によるインボリュートの作図例を示す。誤差 ε が全区間にわたって誤差許容値 0.05mm になるように角度 $\Delta\theta$ を求める。分割数は15が必要である。しかし、この場合は最後のセグメントの誤差が 0.0024mm となり他のセグメントのそれとは違う値になってしまう。この問題は最後の

Fig. 17 The involute curve using linear interpolation by selecting the angle with equal error

Fig. 18 The involute curve using clothoidal interpolation by selecting the angle with equal error

ものも含めたすべてのセグメントの誤差が等しくなるように設定し直すことにより分割数が15のままで解決できる。図18に誤差一定法のクロソイド補間によるインボリュートの作図例を示す。分割数は3である。

図19は前述した例のインボリュート曲線の場合の各方法の分割数と誤差の関係を示す。図中のA,B,C,D,E,Fの意味は図12と同じである。

Fig. 19 Relationship between error and number of subdivisions

この結果は楕円の場合と同様に、曲線制御点の分割法として、補間点列のデータ量は誤差一定法が一番少ない、次は最大誤差等分割法である、曲線長等分割法が一番多い。また補間方法として、クロソイド補間のほうが直線補間よりデータ量をかなり少なく出来ることがわかった。

7. 結 言

- (1) 楕円およびインボリュート曲線について、直線補間およびクロソイド補間を行い、その結果を比較した。例にあげた大きさの場合、 0.05mm の許容誤差を与えた場合、クロソイド補間では直線補間に比べて分割の数を1/4程度に少なくすることができる。これはデータの数で比較すれば約1/2となる。
- (2) より高い精度を与えた場合、この比はさらに大きくなり、クロソイド補間を採用することによって点数を1/15、データ数を1/8程度に圧縮することが可能である。
- (3) 補間点の与え方としては誤差一定法による場合の点数がもっとも少なくすることができ、最大誤差等分割法がこれに次ぐ。曲線長等分割法ではやや多くの分割点数を要する。

参 考 文 献

- 1) 牧野 洋：接線法を用いた自由点列のクロソイド補間，精密工学会誌，60,1,(1994) 80.
- 2) H.Makino and H.Suda: Continuous Path Control Using Clothoidal Interpolation, Proc. 20th ISIR, Tokyo, (1989) 1159.
- 3) 西岡雅夫：平面カムの輪郭成形法（第1報，直線補間制御点の決定），日本機械学会論文集（C編）60,571 (1994) 1047.
- 4) H.Makino: Clothoidal Interpolation - A New Tool for High-Speed Continuous Path Control, CIRP Ann., 37-1, (1988) 25.
- 5) 仇 時雨，牧野 洋：クロソイド補間によるコーナー軌跡制御，精密工学会誌，57,7,(1990) 1268.
- 6) 仇 時雨ほか：クロソイド補間による自由曲線補間法，日本ロボット学会誌，8,6,(1990) 680.