幾何学的制約条件を伴う関連形体の評価方法 に関する研究 (第1報)*

——定式化および現行幾何偏差規格との比較——

岡本英明** 佐々木豊春*** 田中文基† 岸浪建史†

A Study on the Evaluation of Related Features with Geometrical Constraints in Coordinate Metrology (1st Report)
-Formulation and Comparative Analysis with Geometrical Deviation Standards-

Hideaki Okamoto, Toyoharu Sasaki, Fumiki Tanaka and Takeshi Kishinami

In the geometrical tolerance standards, related features are defined by the spatial relationship between datums and toleranced features. This relationship, therefore, must be taken into consideration for inspecting workpieces, which are designated on their drawings as related features. In this paper, an evaluation method for related features with geometrical constraints in coordinate metrology has been proposed. Geometrical constraints in position and orientation, which are formulated as linear equations, has been used in this method, which is based on the small displacement screw model. The results obtained by the proposed algorithm have also been analyzed in comparison with existing related standards. Computer simulation has been performed on some cases to verify the results and validity of the method has been confirmed.

Key words: coordinate metrology, evaluation, related features, geometrical constraints, position, orientation, small displacement screw model

1. はじめに

座標測定は機械部品の測定において、複雑な立体形状にフレキシブルに対応できるため、検査工程で大きな威力を発揮している。一方、機械部品においては高精度かつ高い経済効果が要求されるようになってきている。こうした状況において幾何公差方式の採用が不可欠になっており、座標測定においていかに幾何公差を検証するかは重要な問題となっている。

幾何公差は単独形体に関するものと関連形体に関するものに大別される。単独形体については、従来は座標測定データから最小自乗法により、対象となる形状パラメータの評価を行っていた。最近では様々な評価方法が研究され^{1)~3)}、最小領域法などによる評価も行えるようになりつつある。しかし、座標測定における関連形体の評価に関する議論はようやくその緒についた段階であり⁴⁾、関連する研究も少ない。関連形体の公差域はデータムによって規制されるため、偏差の評価においてもデータムと公差付き形体の幾何学的な制約条件を考慮しなければならない。Balluら⁵⁾によりこの問題は幾何学的制約条件下での最適化問題に帰着することが指摘されている。しかし幾何学的制約条件を考慮したときの関連形体評価の意味やその評価方法について十分な検討がなされていない。

そこで、本報では第1報として座標測定において、位置や姿勢に関する制約条件を伴う関連形体の評価方法を提案し、その意味について現行の幾何公差および偏差の規格と関連させて考察する。次に、この方法をいくつかの例に適用し、その有効性を確認する。

2. 幾何学的制約条件を伴う評価方法の提案

提案する評価方法は、被測定物の表面を測定して得た座標測定点列（以下測定データと呼ぶ）と設計形状のフィッティングに基礎を置いている。フィッティングとは、設計形状と測定データの間の誤差が最小となるように、設計形状を並進・回転移動させ、必要に応じてそのサイズ（寸法、角度）をも変化させることである。

2.1 微小変位スクリュー法⁶⁾

フィッティングには様々な理論や方法があるが、本研究においてはBourdetらの提案している微小変位スクリュー法⁶⁾を採用している。その理由として、

- 1) 線形近似により誤差が線形式で表現される。
- 2) 様々な最適化基準について統一的に解くことができる。
- 3) 制約条件式の付加による拡張が容易である。

などの利点があるためである。まず、この理論について簡単に説明する。図1において、 N 個の測定点から構成される測定データの i 番目の測定点の位置を M_i 、それに対応するフィッティング前の設計形状上の点の位置を M_{thi} 、 M_{thi} における設計形状の単位法線ベクトルを n_i 、 M_{thi} に対応するフィッティング

Fig.1 Illustration of small screw displacement model

* 原稿受付 平成7年1月17日

** 正会員 (株)ニコン (東京都品川区西大井1-6-3)

*** (株)ニコン

† 北海道大学工学部 (札幌市北区北13条西8丁目)

後の設計形状上の点の位置を M_{opt} 、 M_{thi} から M_{opt} へのベクトルを D_{Mthi} とする。ここで、フィッティングのための変位量が微小であり、フィッティング前後の設計形状上の点の単位法線ベクトルが実質的に変化しないと仮定すれば、フィッティング後の設計形状と測定点 M_i の間の誤差 e_i は次式で示される。

$$e_i = M_{thi} M_i \cdot n_i - \left\{ D_A \cdot n_i + (AM_{thi} \times n_i) \cdot R \right\} \quad (1)$$

ここで、 D_A は設計形状上の基準点の並進移動を、 R は設計形状の基準点における回転移動を表すベクトルである。このベクトルの対 $[D_A, R]$ を微小変位スクリューと呼ぶ。誤差の表現式である式(1)をすべての測定点に対して最適化基準に従って最小化すれば、それぞれの基準に応じたフィッティングのための微小変位スクリューを算出することができる。誤差の最小化には様々な最適化基準が存在する。ここでは代表的な最小自乗基準、Min-Max（最小領域）基準、最大内接基準、最小外接基準についての制約条件、目的関数を表1に記す。なお、表1において、 ΔS はフィッティング後の設計形状から測定データの存在範囲での上境界面までの距離、 ΔI は下境界面までの距離である。

Table 1 Optimization criteria

Criteria	Constraint	Objective function
Least squares		$\sum_{i=1}^N (e_i)^2$
Min-max	$\Delta S - e_i \geq 0$ $\Delta I - e_i \leq 0$	$\text{Min}[\Delta S - \Delta I]$
Maximum inscribed	$\Delta I - e_i \leq 0$	$\text{Min}[-\Delta I]$
Minimum circumscribed	$\Delta S - e_i \geq 0$	$\text{Min}[\Delta S]$

2.2 幾何学的な制約条件を伴う評価方法の定式化

前節で述べた方法論を拡張し、幾何学的な制約条件を伴う評価方法の定式化を行う。本研究では、制約条件として位置および姿勢に関する制約条件を考える。なお、前節で述べた微小変位スクリュー法の利点を活かすため制約条件式は1次式に限定する。

2.2.1 位置に関する制約

図2(a)に示すように、指定した平面内にフィッティングの並進移動を制約することを考える。並進移動ベクトル D_A は指定平面の法線ベクトルと直交しているため、以下に示す制約式が得られる。

$$D_A \cdot N_1 = 0 \quad (2)$$

式(2)を制約条件に追加することにより、指定した平面内でのみ並進移動が可能となる。同様に、図2(b)に示すように互いに平行でない2平面の交線上に並進移動を制限する場合には、以下の式(3)を制約条件として追加する。さらに、次の式(4)を制約条件として追加すると、図2(c)に示すように位置は3平面の交点に固定され、移動は行われなくなる。

$$\left. \begin{aligned} D_A \cdot N_1 &= 0 \\ D_A \cdot N_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} D_A \cdot N_1 &= 0 \\ D_A \cdot N_2 &= 0 \\ D_A \cdot N_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

ここで、 N_1 、 N_2 、 N_3 は図2に示す移動を制約する平面の単位法線ベクトルである。なお、図2は円筒の場合を例に説明しているが、それ以外の形状についても同様である。

Fig.2 Illustration of position constraint (in case of a cylinder)

2.2.2 姿勢に関する制約

図3に示すように、フィッティングの回転移動の前後において回転軸と設計形状の方向ベクトルの間を一定角度に制約することを考える。回転移動前の方向ベクトルを P 、回転軸の単位方向ベクトルを C_D とすると、姿勢（角度）に関する拘束は次の式(5)で表現される。

$$P \cdot C_D = C_1 = \text{const} \quad (5)$$

例えば図3の場合、 P と C_D の間の角度を θ とすれば、 $C_1 = \cos \theta$ である。回転移動後の方向ベクトルを P' とすると、 P' は式(6)のように表される。

$$P' = (R \times P) + P \quad (6)$$

回転移動後も、角度関係は維持されているので、次の式(7)が成り立つ。

$$\{(R \times P) + P\} \cdot C_D = C_1 \quad (7)$$

式(5)と式(7)より、次の式(8)が得られ、最終的に式(9)が制約条件として得られる。ここで u 、 v は任意のスカラー変数である。

$$(R \times P) \cdot C_D = 0 \quad (8)$$

$$R = uP + vC_D \quad (9)$$

なお、図3については平面の場合を例に説明しているが、それ以外の形状についても同様に適用できる。

Fig.3 Illustration of orientation constraint (in case of a plane)

2.2.3 評価アルゴリズム

以上の位置および姿勢に関する制約条件のもとで、表1に示した様々な最適基準に基づく目的関数を最小化することにより関連形体の評価を行う。式(1)は D_A 、 R について線形近似式となっているが、この近似は前に述べたように、フィッティングのための設計形状の変位量が微小であるということを前提としている。そのため、実際にはフィッティングを繰り返し行う必要がある。線形近似を繰り返し行うアルゴリズムについては本研究で採用している微小変位スクリュー法以外にも、例えば部分球面やトーラス面を繰り返し最小自乗法により評価するアルゴリズム⁷⁾⁸⁾が提案されている。ここで採用する評価アルゴリ

ズムも基本的にはこれらのアルゴリズムと同様であり、変位量が設定した値に収束するまでフィッティングを繰り返す。以下に、アルゴリズムを簡単に説明する。

- 1) 公差付き形体の初期設計形状およびデータを設定する。公差付き形体の初期設計形状はCADデータもしくは測定データから設定する。例えば、平面であれば、位置、法線ベクトルをCADシステムから与えるか、測定データのうち任意の3点を選んで設定する。データは制約条件を伴わない状態で測定データの評価を行い、設定する。
- 2) データと公差付き形体の設計形状の幾何学的関係から、前節で示した位置、姿勢に関する制約条件式を作成する。
- 3) 全ての測定データに対して、誤差の表現式(1)を作成する。
- 4) 表1に示した最適化基準に従い、制約条件式、誤差の表現式より、 D_A 、 R を算出する。最小自乗基準の場合は、線形方程式、それ以外の場合は線形計画法⁹⁾により算出する。
- 5) 算出した D_A 、 R を設定値 ε_{DA} 、 ε_R と比較する。

$|D_A| \leq \varepsilon_{DA}$ かつ $|R| \leq \varepsilon_R$ であれば計算を打ち切り、その時点での設計形状、偏差を解とする。そうでなければ D_A 、 R の並進、回転移動を設計形状に施し、2)からの処理を繰り返す。制約条件を伴わない状態で、平面、円筒面、球面について収束状態の確認を行い、 ε_{DA} 、 ε_R はどちらも 10^{-6} とした。なお、計算時の実数は倍精度を採用している。

3. 幾何学的制約条件を伴う関連形体評価の意味

前章で定式化した制約条件を伴う関連形体の評価方法の意味について、現行の幾何公差および偏差の規格と照らし合わせて考察する。なお、公差付き形体は平面、軸線を考える。

3.1 公差付き形体が平面の場合

3.1.1 姿勢偏差

図4に平面に対して、傾斜度が指定された例を示す。現行の規格¹⁰⁾に従えば測定データをデータ平面Aに対して理論的に正しく 40° 傾斜した平行な2平面で挟んだときの最小幅が偏差となる。これは、図5に示すようにデータの実測平面に対して、公差付き形体の設計平面の姿勢を保持しながら、測定データにフィッティングを行い、偏差 E を見つけることと等価である。従って、表1に示したMin-Max基準による目的関数に対して、式(9)の姿勢に関する制約条件を付加し、線形計画法により偏差 E および公差付き形体の実測平面のパラメータを算出することが可能となる。なお、公差付き形体の実測平面は偏差の中央の位置にある平面で代表させるのが一般的であるが、これは前記表1中の $\Delta S = -\Delta I = E/2$ とすることにより可能である。この方法はデータが直線の場合にも全く同様に適用できる。さらに直角度や平行度を含む、すべての姿勢偏差にも適用できる。

Fig.4 Angularity tolerance applied to a plane

Fig.5 Interpretation of angularity deviation

3.1.2 位置偏差

図6¹¹⁾に平面に位置度が指定された例を示す。(データ付きの輪郭度として公差指定される場合もある¹²⁾)。現行の規格¹⁰⁾に従えば、データ軸直線B上で、データ平面Aから35mm離れ、かつデータ軸直線Bに対し 105° 傾斜した理論的に正確な位置にある平面に対して、対称な平行2平面により測定データを挟んだときの2平面の間隔が偏差となる。これは図7に示す数学的解釈と等価である。すなわち、まずデータ平面Aの実測平面とデータ軸直線Bの実測の交点を求め、次にこの交点を原点とし、そこから35mm離れた実測軸上の点Fに公差付き形体の設計平面を固定し、実測軸に対する姿勢を保持しながら、測定データにフィットさせることと等価である。この際、設計平面に対し、対称な平行2平面の間隔が最小となるように目的関数を設定する。これは、表1に示したMin-Max基準による目的関数において $\Delta S = -\Delta I = E/2$ とすればよい。この目的関数に対して、式(4)の位置に関する制約条件と式(9)の姿勢に関する制約条件を同時に付加し、線形計画法により偏差 E および公差付き形体の実測平面のパラメータを算出することが可能となる。

以上のように、提案した方法は公差付き形体が平面の場合には現行規格の検証方法を具現化するものである。

Fig.6 Position tolerance applied to a plane

Fig.7 Interpretation of position deviation

3.2 公差付き形体が軸線の場合

公差付き形体が円筒や円すいなどの軸線の場合、制約が被測定物表面の測定データではなく、求めるべき軸線に直接与えられる。そのため、本方法で評価するとデータムに対して全く正しい位置、姿勢を持った軸線が得られることになり、偏差が生じない。従って、この場合には関連形体の評価に本方法は適用できないことが分かる。

3.3 従来の評価方法との比較

従来、座標測定においてはデータムが規制する幾何学的な制約条件の下で測定データから偏差を評価するための理論が十分確立されていなかった。そのため、データム、公差付き形体の測定データに対して、それぞれ別個に設計形状を当てはめ、主に最小自乗法を用いて、その形状の位置、姿勢、寸法などのパラメータを算出していた。関連形体の幾何偏差は、こうして得られた公差付き形体側の形状に対して境界条件を与えることで便宜上、偏差を求めていた。図8は2平面の平行度を例に、その様子を説明するものである。2つの境界平面を設定することにより、はじめて偏差が算出できることが分かる。しかし、この方法では、前図4および6で示した例に対して測定データの最小幅を算出することは極めて困難である。また、公差付き形体が平面の場合にはどのように境界平面を設定すればよいかという問題がある。特に傾斜度のように傾いた平面に対しては、三次元的な境界平面の設定が必要となり、容易ではない。公差付き形体が軸線の場合には、境界平面の設定は軸線に沿った指定となるので平面の場合に比べ、比較的容易である。

以上に示した従来の評価方法に比べ、公差付き形体が平面の場合には、提案した方法は上記のように測定データの最小幅を算出することが可能であり、しかも境界を与える必要もないため極めて有効である。しかし、軸線に対しては適用できないため、上に述べた従来の方法を用いる必要がある。

Fig.8 Conventional method to estimate deviation of parallelism

4. 計算機シミュレーションによる検証

前章において、提案する方法は公差付き形体が平面の場合、現行の規格の検証方法を具現化することを示した。その検証のため、前記姿勢偏差（図4）、位置偏差（図6）の例に対して計算機シミュレーションを行った。

4.1 姿勢偏差の検証

図4の例に対するテストピースデータを図9に示す。最小領域法により指定された公差（0.08mm）と同じ偏差が得られるように、設計平面を中心としてその法線およびその逆方向に0.04mmの位置に公差域の境界平面を考え、まずこの境界平面上に3点ずつ計6点の測定点を発生させた。この設計平面のパラメータを表2に示す。次に、一様乱数により公差域内部に14点を発生させた。以上のように発生させた20点のテストピ

ースデータに対し、図10および表3に示すような初期平面をフィッティングさせた。その結果を図11に、最終的に評価された平面のパラメータおよび偏差を表4に示す。フィッティングにより、テストピースデータを発生させた設計平面と同一の平面が得られていることが分かる。なお、法線ベクトルのx方向成分および座標系原点からの距離には無視し得る程度の誤差が発生しているが、これは繰返し計算の打ち切り条件により発生する誤差であると考えられる。偏差については設定した値と全く同じ結果が得られている。

Fig.9 Test piece data to verify angularity tolerance shown in Fig.4

Table 2 Parameter of the toleranced plane to generate test piece data

Normal vector	x-component: 0
	y-component: $-0.642788 (-\sin 40^\circ)$
	z-component: $0.766044 (\cos 40^\circ)$
Distance from the origin	0mm

Fig.10 Initial plane before fitting

Table 3 Parameter of the initial plane before fitting

Normal vector	x-component: 0.642788
	y-component: 0
	z-component: 0.766044
Distance from the origin	71.9392mm

Fig.11 The plane evaluated after fitting

Table 4 Final results

Normal vector	x-component: 2.0809×10^{-15}
	y-component: -0.642788
	z-component: 0.766044
Distance from the origin	9.9476×10^{-14} mm
Deviation	0.08 mm

4.2 位置偏差の検証

図6の例に対するテストピースデータを図12に示す。姿勢偏差の場合と同様な方法でテストピースデータを発生させているが、設計平面から、その法線方向に0.025mmの位置を上側境界平面、法線の逆方向0.02mmの位置を下側境界平面とした。表5はこの設計平面のパラメータである。フィッティング前の初期平面を図13および表6に示す。フィッティングにより、図14および表7に示すようにテストピースデータを発生させた設計平面と同一の平面が得られていることが分かる。なお、法線ベクトルのx方向成分に無視し得る程度の誤差が発生しているが、これは繰返し計算の打ち切り条件に起因する誤差である

Fig.12 Test piece data to verify position tolerance shown in Fig.6

Table 5 Parameter of the tolerated plane to generate test piece data

Normal vector of the test piece plane	x-component: 0 y-component: 0.258819($\sin 15^\circ$) z-component: 0.965926($\cos 15^\circ$)
Distance from the origin	33.8074mm ($35 \times \cos 15^\circ$)

Fig.13 Initial plane before fitting

Table 6 Parameter of the initial plane before fitting

Normal vector	x-component: -0.258819 y-component: 0 z-component: 0.965926
Distance from the origin	33.8074 mm

Fig.14 The plane evaluated after fitting

Table 7 Final results

Normal vector	x-component: 8.43151×10^{-15} y-component: 0.258819 z-component: 0.965926
Distance from the origin	33.8074 mm
Deviation	0.05 mm

と考えられる。偏差についても設計平面から遠い位置にある上側境界平面までの距離の2倍(0.05mm)と全く同じ値が得られている。

以上の結果から、公差付き形体が平面の場合には提案する方法により評価される結果が現行の規格と合致することが検証され、提案した方法の有効性が確認された。

5. 結 言

本研究で得られた成果を以下に示す。

- (1) 座標測定において、位置や姿勢に関する制約条件を伴う関連形体の評価方法を新たに提案した。
- (2) 提案した関連形体の評価方法と現行の幾何偏差関連の規格と照らし合わせて、以下のことが分かった。
 - ・公差付き形体が平面の場合には本方法で得られた評価結果は現行の規格に従う。
 - ・公差付き形体が軸の場合には、本方法は適用できない。
- (3) 公差付き形体が平面の場合に、本方法で得られた評価結果は現行の規格に従うことを、姿勢偏差、位置偏差を例に計算機シミュレーションにより検証し、その有効性を確認した。

提案した方法は、データムの位置、姿勢についてはあらかじめ与えられているという前提で公差付き形体の評価を行っているが、現実にはデータムの評価をいかに行うかは重要な課題であり、引き続き検討を行う予定である。さらに、機能ゲージシミュレーション、軸線の評価なども課題として残されている。

参 考 文 献

- 1) 塚田忠夫, 金田 徹, 奥田謙造: 最適化技法を用いた最小領域法真円度の評価法, 精密機械, 49, 10 (1983) 1351.
- 2) 下河辺 明, 豊山 晃, 福田 真: 最小領域法による形状精度の評価, 精密機械, 50, 4 (1984) 697.
- 3) T.S.R.Murthy and S.Z.Abdin: Minimum Zone Evaluation of Surfaces, Int. J. MTDR, 22, 4 (1980) 123.
- 4) ISO TR10 360-1: Coordinate Metrology-Part1: Definitions and applications of the fundamental geometric principles.
- 5) A.Ballu, P.Bourdet and L.Mathieu: The Processing of Measured Points in Coordinates Metrology in Agreement with the Definition of Standardized Specifications, Ann. CIRP, 40, 1 (1991) 491.
- 6) P.Bourdet and A.Clement: A Study of Optimal-Criteria Based on the Small-Displacement Screw Model, Ann. CIRP, 37, 1 (1988) 503.
- 7) 塚田忠夫, 周文豪, 笹島和幸: 円筒度測定機による赤道近傍の球面形状測定と評価 (第1報. 形状評価アルゴリズム), 設計・製図, 25, 3 (1990) 24.
- 8) 塚田忠夫, 周文豪: 円筒度測定機による赤道近傍部分トーラス面の形状評価に関する研究 (第1報. 測定法とデータ処理アルゴリズム), 設計・製図, 25, 6 (1990) 24.
- 9) H.P.Kunzi, H.G.Tzschach and C.A.Zehender: Numerical Methods of Mathematical Optimization, Academic Press, New York (1971).
- 10) JIS B 0621 幾何偏差の定義及び表示, 日本規格協会, (1984) 8.
- 11) JIS B 0021 幾何公差の図示方法, 日本規格協会, (1984) 25.
- 12) ANSI Y14.5M-1982: Dimensioning and tolerancing, 104.