面上線による自由曲面形状の操作*

—面上点列による操作法—

鈴木宏正** 山本貴史*** 金井 崇† 木村文彦**

A Curve-based Method for Manipulating Free Form Surfaces
— A Method based on Range of Points on Surface —

Hiromasa SUZUKI, Takashi YAMAMOTO, Takashi KANAI and Fumihiko KIMURA

Surface modelling systems are indispensable tools for designing aesthetic shapes of mechanical products. Contemporary CAD systems provide modelling functions for generating and modifying free form surfaces. They can also perform surface evaluation by rendering surfaces or drawing characteristic curves, such as iso-parametric curves, contour curves, high-light curves. The aim of this research is to propose a new and intuitive surface modification method based on those characteristic curves. With this method, designers can modify surfaces by directly manipulating those characteristic curves. The formalization of the problem is simple, but results in an inverse problem. This problem is solved by applying the standard regularization theory. A computer program is developed to numerically evaluate the method and applied to several examples. It is demonstrated that the method can be used as a basic surface modelling capability.

Key words: surface modelling, CAD, inverse problem, standard regularization theory

1. はじめに

自動車や家電製品の外形等の意匠設計においては、自由曲面モデリングが不可欠である。目的とする形状を作るためのモデリングの手法には様々なものがあるが、曲面の定義パラメータや構成曲線、接線ベクトル・曲率などの基本量を操作するのが一般的である。一方、このようにして生成した曲面の品質は、等高線や等曲率線、さらには反射線やハイライト線、陰影図などによって評価される³⁾。

本研究では、評価に利用されているこれらの図を操作することによって曲面を操作するという、より直観的なモデリング機能を実現することを目的とする^{1) 5) 6)}。具体的には自由曲面上の曲線(面上線)を変形することにより、曲面を変形する手法を提案する。

本研究では面上線を点列として扱う。研究の基本的な考え方は、面上の点列によって与えられる面上線を、目標とする曲線(点列)に近付けるという方法であり、これを制約付きの最適化問題として解く。この手法に基づきプログラムを試作し、Bスプライン曲面に対して数値実験を行なった。また、特徴線の一つである等高線に対して本手法を適用した。

本論文は4節から成る。第2節において曲面修正法の理論について述べる。第3節では、実装したプログラムを三つのテストケースに適用し、手法の基本的な能力を評価する。さらに、等高線に対して適用する。第4節で結論と展望を述べる。

2. 面上線による自由曲面の変形手法

本研究では、パラメトリック曲面の操作法⁴⁾として、面上線に対して目標線を指定し、その面上線が目標線に近づくように曲面を変形させるという手法を提案する。ここで面上線とは、曲面上の任意の点列で定義されるもので、各点の曲面パラメータ値の列で与える。目標線もまた点列で与える。図1にその概要を示す。

Fig.1 Curve-based method for surface manipulation

一般にパラメトリック曲面は、曲面上の点の位置ベクトルを S 、制御点を P_k 、実パラメータ対 $u = (u, v)$ の関数を $a_k(u)$ (ただし $k = 1, \dots, N$) とし、

$$S(u) = \sum_{k=1}^N a_k(u) P_k = a(u)^T P \quad (1)$$

と表される。ここで、

$$a(u) = \begin{pmatrix} a_1(u), \dots, a_N(u) \end{pmatrix}^T$$

$$P = (P_1, \dots, P_N)^T$$

さて、 L 個のパラメータ対の列 $(u_1, u_2, \dots, u_L)$ によって定義される面上の点列 $Q = (Q_1, Q_2, \dots, Q_L) = (S(u_1), S(u_2), \dots, S(u_L))$ を考える。それに対して目標線も、 L 個の点列 $Q' = (Q'_1, Q'_2, \dots, Q'_L)$ によって与えられているとする。本研究の目標は、制御点列 P を移動することによって、各 Q_i を Q'_i に近付けることである。言い換えると、 P を修正して Q' を面上点とするような曲面 S' を生成することである。以下では、このようにして得られる曲面を修正面と呼ぶことにする。

まず、 Q_i を Q'_i に近付ける。この時 Q'_i のパラメータ値は Q_i のパラメータ値 u_i と同じであるとする。各制御点 P_k を P'_k に動かすことにより、 Q_i が完全に Q'_i まで移動したとすると、次式が成り立つ。

$$Q'_i = S'(u_i) = \sum_{k=1}^N a_k(u_i) P'_k = a(u_i)^T P'$$

* 原稿受付 平成7年6月30日

** 正会員 東京大学大学院工学系研究科(東京都文京区本郷7-3)

*** 学生会員 東京大学工学部

† 学生会員 東京大学大学院工学系研究科

$i = 1, \dots, L$ について同様にすると,

$$\begin{aligned} Q' &= \begin{pmatrix} a(u_1)^T \\ a(u_2)^T \\ \vdots \\ a(u_L)^T \end{pmatrix} P' \\ &= \begin{pmatrix} a_1(u_1) & a_2(u_1) & \dots & a_N(u_1) \\ a_1(u_2) & a_2(u_2) & \dots & a_N(u_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1(u_L) & a_2(u_L) & \dots & a_N(u_L) \end{pmatrix} P' \\ &\equiv AP' \end{aligned} \quad (2)$$

この連立1次方程式を解くことで、 P' を求めることができる。しかし、一般に A は正方行列でないため、直接解を求めることはできない。本研究では、これを標準正則化理論²⁾(付録参照)により求める。標準正則化理論では、式(2)の形式の問題を、その右辺と左辺の差($Q' - AP'$)を最小化する P' を求める最適化問題として扱う。そのため、次式のような目的関数を導入する。

$$\|Q' - AP'\|^2 \rightarrow \min \quad (3)$$

ここで $\|X\|^2 \equiv X^T X$ である。さらに、元の曲面から修正面への変形を抑制する制約項をこれに加える。

$$f(P') = \|Q' - AP'\|^2 + \lambda \|P' - P\|^2 \rightarrow \min \quad (4)$$

ただし、 λ は正の定数。

右辺第2項において、 $\|P' - P\|^2$ は、制御点の移動量の大きさを表すものに非負のパラメータ λ を乗じたものとなっている。すなわち、式(4)の目的関数 f は、面上線 AP' が目標線 Q' に近づくほど小さくなり、また制御点の修正量が大きいほど大きくなる。つまり、目標線に近付けるという局所的な評価と、曲面全体の形状を保つという大域的な評価とを表している。パラメータ λ は、この二つの評価量の相対的な寄与率を調整するもので、正則化パラメータと呼ばれる。

目的関数 f の未知数は P' であり、また f は P' の非負の2次式になっている。したがって、 P' に対する勾配 $(\frac{\partial f}{\partial P'})$ がゼロになる所で最小値を持つ。

$$\frac{\partial f}{\partial P'} = 2(q - AP')A + \lambda(2P' - 2P) = 0 \quad (5)$$

ここで、左辺はベクトルによる偏微分で、 $X = (X_1, X_2, \dots, X_N)^T$ について、

$$\frac{\partial g}{\partial X} = \left(\frac{\partial g}{\partial X_1}, \frac{\partial g}{\partial X_2}, \dots, \frac{\partial g}{\partial X_N} \right)^T$$

のように定義する。また、式(5)の計算では次の関係を用いた。

$$\frac{\partial}{\partial X}(X^T a) = a, \quad \frac{\partial}{\partial X}\|X\|^2 = 2X$$

式(5)を整理すると、次の P' についての連立一次方程式を得る。

$$(A^T A + \lambda I)P' - A^T q - \lambda P = 0 \quad (6)$$

このマトリクス $(A^T A + \lambda I)$ は $\lambda > 0$ の時、正則であるので、これを解くことによって P' を求められる。

3. 評価実験

3.1 実験方法

前節の手法の変形の能力を評価するために、単純なBスプライン曲面に適用してみる。曲面としては、 xy 平面上の、 x, y 方向の長さが 40×40 の正方形で、中央に原点をもつ、双5次のBスプライン曲面を用いた。制御点数は $8 \times 8 = 64$ 個であり、変形前の曲面は平面である。これに対して、面上線を定義し、さらに目標線を定義した。目標線のボタンとして、次の三つを用いた。

- (1) 直線ボタン：面上線は、線分($y = z = 0, -20 \leq x \leq 20$)上の等間隔な100点の点列とした。目標線は、この点列を z 軸方向に10だけ平行移動したものとした。(図2参照)
- (2) 十字ボタン：十字状に交差する二つの線分($x = z = 0, -20 \leq y \leq 20$ 及び $y = z = 0, -20 \leq x \leq 20$)をそれぞれ100等分する点列を面上線とした。目標線は、それを z 軸方向に10だけ平行移動したもの。(図3参照)
- (3) アーチボタン：面上線は十字基準と同じ。目標線は、原点を中心とし、 zx 平面および yz 平面の $z > 0$ の部分にある半径20の二つの半円をそれぞれ100等分した点列を目標線とした。(図4参照)

曲面の変形は、式(6)の正則化パラメータ λ の値によって変化する。すなわち、パラメータの値が小さいほど目標線に対する面上線の追従の度合いが大きくなることが予想される。そこでこれを評価するために、 λ を、5.0, 1.0, 0.1, 0.01, 1.0×10^{-15} のように変化させ、それぞれに対して対応点の差分ベクトルのノルムの平均 $E = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \|Q'_k - Q_k\|$ を求めた。

3.2 実験結果及び評価

それぞれのボタンと λ に対する変形の様子を図2, 3, 4に示す。それぞれ赤で示したものが目標線であり、青で示したものが面上線である。曲面は u, v 方向それぞれ10分割の等パラメータ線を用いて表している。正則化パラメータ λ と E の関係を表1に示す。

Table 1 Averaged gap between target curve and surface

λ	E		
	Straight	Cross	Arch
initial	10.0	10.0	15.6
5.0	4.55	5.54	6.42
0.10	0.220	0.269	0.314
1.0×10^{-2}	2.95×10^{-2}	3.28×10^{-2}	0.198
1.0×10^{-3}	3.56×10^{-3}	3.83×10^{-3}	0.203
1.0×10^{-5}	3.68×10^{-5}	3.94×10^{-5}	0.204
1.0×10^{-10}	3.68×10^{-10}	3.95×10^{-10}	0.204
1.0×10^{-15}	2.28×10^{-13}	2.21×10^{-13}	0.204

この表から、どのボタンでも正則化パラメータ λ の値が小さいほど面上線の目標線に対する追従の度合いが高くなることがわかる。直線ボタン・十字ボタンでは面上線と目標線は $\lambda = 0.01$ 以下であれば完全に一致しているといえる。しかし、 $\lambda = 1.0 \times 10^{-15}$ のように極端に正則化パラメータの値を小さくすると、十字ボタンやアーチボタンで曲面形状がゆがんでしまっていることも分かる。

適当な λ 値は、それを決める一般的な手法がないために、このような数値実験によってケースバイケースで決定するしかない。しかし、図2と図3のような類似した例において、同じ λ に対して同様な収束状態が得られていることから、適用する問題に対する予備的な数値実験によって、おおよその λ 値を決めることは可能であると考えられる。

$\lambda = 5.0$

$\lambda = 5.0$

$\lambda = 5.0$

$\lambda = 1.0$

$\lambda = 1.0$

$\lambda = 1.0$

$\lambda = 0.1$

$\lambda = 0.1$

$\lambda = 0.1$

$\lambda = 0.01$

$\lambda = 0.01$

$\lambda = 0.01$

$\lambda = 1.0 \times 10^{-15}$

$\lambda = 1.0 \times 10^{-15}$

$\lambda = 1.0 \times 10^{-15}$
Fig.4 Arch pattern

Fig.2 Straight pattern

Fig.3 Cross pattern

Gaussian curvature: $\lambda = 1.0$

Gaussian curvature: $\lambda = 0.01$

Fig.5 Straight pattern

図5は、直線ボタンにおける修正面の滑らかさを評価するために、ガウス曲率表示を行なったものである。色の青い部分がガウス曲率の大きい部分を示す。中央部の両端にひずみが生じていることが分かる。

計算時間は、Sun SPARC station 10 で、直線ボタンでは約2秒、十字とアーチボタンでは約7秒であった。なお、連立一次方程式の解法にはガウスの消去法を用いた。

3.3 等高線への適用例

本手法を用い、等高線を面上線として曲面を操作する。等高線を面上線として用い、目標線と面上線を同一平面上で定義することで、目標線を変形後の曲面の新しい等高線にできる。つまり、指定部分において望みの断面形状を生成することに用いることが出来る。

変形前の曲面形状及び等高線と目標線の様子を図6に示す。図中

Fig.6 Original surface(contour map), surface curve and target curve

Contour map: $\lambda = 1.0$

Contour map: $\lambda = 0.01$

Fig.7 Surface modification using contour curve

の曲面は双5次Bスプライン曲面で、1辺の長さが約40であり、制御点数は $8 \times 8 = 64$ 個である。等高線は間隔1.0の z 軸に垂直な平行曲面群と曲面の交線となっている。赤いものが目標線であり、青いものが面上線である。この目標線の半径は14.0であり、面上線と同一の $z = 4.0$ の平面上にある。等高線は133点の点列に分解

して計算を行なった。なお、図中の点は、制御点を表している。

$\lambda = 1.0, 0.01$ の際の曲面の様子を図 7 に示す。E の値は、 $\lambda = 1.0$ の時 0.457, $\lambda = 0.01$ の時 4.04×10^{-2} であった。後者の場合、面上線が目標線によく近付いているのがわかる。

4. 結 論 と 展 望

本研究では、面上線を用いて曲面を変形する手法を提案し、B スプライン曲面に適用した。そして手法の能力を評価するために、平面状の曲面に対し、直線ボタン・十字ボタン・アーチボタンの 3 種の目標線を用意し、正則化パラメータ λ の値を変化させ変形の様子を調べた。これにより、適当な λ を選べば、面上線が目標線に十分近付けるように曲面を修正できることを確認した。さらに、等高線を面上線として用いた曲面操作の実験を行ない、同様の結果を得た。これによって、本手法により望みの等高線形状となるよう曲面を操作することが可能であることを示した。

このような面上線による操作を用いることにより、直接的で直観的な曲面操作が可能にできると考えられる。また、本手法は計算が簡単で、一般的であるため、B スプライン曲面以外のパラメトリック曲面に適用することも容易である。

本手法の問題点としては、制御点の移動量にのみ制約条件を課しているの、例えば面上線として反射線などを対象にすると、曲面修正によってその部分の法線や接線が変化してしまい、修正後の曲線が反射線とならない問題が挙げられる。そのためには、微分量を含めた制約条件を考える必要がある。また、一般に反射線などの特徴線を修正する場合には、修正の前後で特徴線が幾何学的・位相的に大きく変化する場合がある。本手法は面上線の各点のパラメータを固定しているために、このような場合に対応することができない。特徴線の属性が大きく変化しない場合にのみ適用可能である。

また、展望としては、まず複数パッチからなる曲面モデルに拡張することと、アルゴリズムを高速化による実時間修正を実現することが挙げられる。

付 録

標準正則化理論²⁾は、コンピュータビジョン分野で用いられる理論である。ここでは、その要点を示す。

ある観測量に対応する m 行列ベクトル y から未知量 z (l 行列ベクトル) を推定する逆問題を考える。ここで、 y と z の間には、行列 A を介して、次の関係が知られているとする。

$$Az = y \quad (A-1)$$

行列 A が正方行列でかつ正則である場合には、

$$z = A^{-1}y$$

として y から z を求めることができる。しかし、一般に A が正方行列でない場合、あるいは正方行列であっても正則でない場合、式 (A-1) の解は一意に定まらない。このような場合には、新たに評価関数：

$$\|Az - y\|^2 + \lambda \|Pz\|^2 \quad (A-2)$$

を定義し、これを最小にすることでこの逆問題を解く。式 (A-2) の第 1 項は式 (A-1) の両辺の差のノルムの自乗であり、第 2 項は z の線形汎関数 Pz のノルムの自乗に正則化パラメータ λ を乗じたものとなっており、これは問題に応じて設定される。

参 考 文 献

- 1) 加藤都夫：反射線の幾何学的特徴量最適化による自由曲面の自動修正法、平成 4 年度東京大学大学院工学研究科精密機械工学専攻修士論文、(1992)。
- 2) 日本技術振興協会ニューロコンピュータ研究部会 編：ニューロコンピューティングの基礎知識、海文堂、(1990)。
- 3) 穂坂衛、東正毅、久志本琢也：自由曲面の特徴および評価に関する諸量および表示、「グラフィクスと CAD」シンポジウム、(1989) 45。
- 4) G. Farin (木村文彦 監修、山口泰 監訳)：CAGD のための曲線・曲面理論、共立出版、(1991)。
- 5) E. Kaufmann and R. Klass : Smoothing Surfaces Using Reflection Lines for Families of Splines, Computer-Aided Design, **20**, 6, (1982) 312。
- 6) R. Klass : Correction of Local Surface Irregularities Using Reflection Lines, Computer-Aided Design, **12**, 2, (1980) 73。