特集 複雑さと精密さの接点／解説

フラクタル構造と物性*

高安秀樹**

Fractal Structures and Their Physical Properties / Hideki TAKAYASU

Key words: fractals, complex systems, surface, phase transition, self-organized criticality, $1/f$ noise

1. はじめに

コンピュータの進歩によって、これまでは方程式が解けないために手の付けられなかったような現象が次々と解析されるようになってきている。特に、強い非線形性を持ち、かつ、非常に自由度の大きい体系は、コンピュータの登場によって初めてその全体的な挙動が解明できるようになってきた。10年間で1000倍といわれる驚異的なコンピュータの進歩の傾向は今後もしばらくは持続すると期待されており、このような複雑な振舞いを示す体系の研究はますます盛んになるに違いない。

しかし、コンピュータの進歩に頼っているだけでは研究の量的な発展はあっても、質的な飛躍は期待できない。研究の質を高めるためには、新しい手法、新しい概念の導入が不可欠である。本論文の主題であるフラクタルは、ある意味で理想化された最も解析のしやすい複雑さである。計算機に頼らない理論的な解析もできる場合も多く、複雑さの研究には欠かすことのできない概念となってきている。地形や雲や樹木の形など身近な自然界の複雑な構造の多くが、第0近似としてフラクタルとして見なせることが80年代の研究によって明らかになっており、複雑な構造を研究の対象としたときにはまず最初にフラクタル次元を測定することが常套手段となっている。

本論文では、フラクタルの概念を改めて紹介し、様々な

物性との関連をレビューする。そして、著者らの研究内容を中心に最近の複雑な現象へのアプローチを紹介する。

2. フラクタルとは

形を扱う学問としては、直線と円によってあらゆる形を構成するユークリッド幾何学が2000年ほどの歴史を持って君臨してきたが、素朴な目で見ると、私たちの身の回りには直線や円でよく近似できる形はあまり存在しない。地形も雲も樹木の形も、どれをとっても非常に複雑に入り組んだ形をしている。このような複雑な形を考えたときには、理想的な複雑さを持った形を基本にした幾何学を構築すべきであるとフラクタルの生みの親であるマンデルブロは考えた。

フラクタル (fractal) は、1975年に彼が fractus というラテン語 (ものが壊れてばらばらになった状態を意味する) から作った造語である¹⁾²⁾。専門が細分化されている現在では珍しく、マンデルブロは数学、工学、物理学、経済学、そして生理学など様々な分野の仕事を手掛けてきた。その豊富な経験の中から、自然界の複雑な形に共通する本質として到達したのがフラクタルという概念である。

百聞は一見にしかず、であるから、まず典型的なフラクタル図形の例を示そう。図1は、シルピンスキーのギャスケットとよばれている基本的なフラクタル図形である。この図は、初めに与えられた正三角形の各辺の中点を結んでできる上下逆向きの正三角形をくり抜くという操作を順次残った正三角形に繰り返し施すことによって得られる。大小様々な穴が無数に空いた大変複雑な図形であるが、作り方からも明らかなように、どんなに小さな部分も全体と相似な構造になっており、部分を見ても全体と同じだけの複雑さを持っている。このように部分と全体が相似になっている性質を自己相似性とよぶ。この自己相似性が複雑さを

* 原稿受付 平成8年5月1日
** 東北大学大学院情報科学研究科 (仙台市青葉区荒巻字青葉)
1985年、名古屋大学理学研究科修了、理学博士。フラクタル理論全般に関心を持ち、理論的な側面から様々な分野の現象を研究している。「フラクタル」(朝倉書店)、「フラクタルって何だろう」(鏡の伝説)(ともにダイヤモンド社)などを出版

図1 シルピンスキーのギアスケット

理解するための鍵であり、自己相似性を有するような複雑な構造をフラクタルと総称する。

拡大しても縮小しても見え方が変わらないということを数学的に表現すると、例えば相関関数や分布関数を $f(x)$ としたときに、次のような比例関係がすべての x について成り立つことになる。

$$f(ax) \propto f(x) \quad (1)$$

ここで、 $\propto$ は比例関係を表し、 $a > 0$ は拡大縮小の倍率を表す。簡単な議論によって a を連続的に変化させても式 (1) を満たすような関数は、べき関数、

$$f(x) \propto x^D \quad (2)$$

に限られることが示される³⁾。つまり、フラクタルとはべき関数によって特徴付けられるような形や現象であるといつてよい。

式 (2) において現れた指数 D は、拡大縮小対称性を特徴付ける定数である。式 (2) において特に x が長さを表す量である場合、指数 D をフラクタル次元とよぶ。次元とよぶのは、この指数が通常の次元を拡張したものであることに起因しているのであるが、それは次のような例を考えることによって理解できるだろう。例えば、宇宙の質量の分布を特徴付けようとしたとき、宇宙のどこか1点（例えば、地球）を原点として、仮想的に半径 x の球を考え、その球の中の総質量、 $M(x)$ 、を考える。 $M(x)$ は、質量が空間的に一様に分布していれば x^3 に比例し、平面的に分布していれば x^2 、直線的に分布していれば x^1 に比例する。ここでの指数が空間分布の次元と一致していることは明らかであろう。実際のデータから $M(x)$ の関数型を見積もると、およそ $x^{1.2}$ に比例することが確かめられている。このことから、宇宙の質量分布のフラクタル次元はおよそ1.2であると結論されるわけである。ちなみにシルピンスキーのギアスケットの場合には、左下端の点を原点として考えるとすぐにわかるように、半径を2倍したときに質量が3倍になることから、フラクタル次元 D は、 $2^D = 3$

を満たし、 $D = \log 3 / \log 2 = 1.58 \dots$ となる。

このように、自己相似性を有する理想的な複雑さを持った構造であるフラクタルは半端な次元によってその形を定量的に評価することができることになる。

3. フラクタルと物性

フラクタルに関する研究が本格化したのは1980年代に入ってからであるが、高度な数学を必要としないことも手伝い、多くの分野の研究者が参入し、研究は爆発的に進展した。天然・人工を問わず大部分の固体の表面の凹凸が、数十Å程度のスケールの領域では、フラクタル次元によってよく特徴づけられるという基本的な発見⁴⁾もそのころ報告されている。肉眼ではつるつるに見えるような物質でも純粋な結晶でもない限り原子レベルではランダムな凹凸を持っている場合が多い。その凹凸の仕方があるスケールの範囲では、例えば地形のように拡大しても縮小しても同じように見える性質を持っているというわけである。

大雑把に言えば、表面のフラクタル次元が大きいほど凹凸は複雑に入り組んだものとなる。例えば、表面がフラクタル構造を持つ典型的な例はシリカゲルであるが、そのフラクタル次元は2.9を越える。フラクタル次元が3に近いことから、ほぼ3次元空間を埋め尽くすように非常に複雑に入り組んだ表面構造を持っていることがわかる。シリカゲルが脱臭剤として機能するのは、臭いの分子を吸着しうる実効的な表面積が非常に大きいからであるが、フラクタル次元はそのような性質を定量的に評価していることになる。実際、ここでのフラクタル次元は、球に近い形を持つ分子を何モル吸着できるかを測定する実験を、大きさの異なる分子について何種類か繰り返すことによって測定されている。式 (2) における x を吸着させる分子の直径、 f を吸着しうるモル数としたときに表面がフラクタル構造を持つ場合には、べき乗則が成立し、 D が定義されることになるのである。もしも、原子の大きさという制限がなく無限小のスケールまでフラクタル性が成立するならば、表面の次元が2よりも大きい場合には表面積は無限大となる。

大部分の固体の表面がフラクタルになっているとはいっても、固体の表面のフラクタル次元は、2に近い値から、シリカゲルのように3に近い値まで、幅広く分布しており、ケース・バイ・ケースである。また、うるさいことをいうと表面の凹凸は面に垂直な方向と面に水平な方向とでは異なる統計性を示すような場合もしばしばあり、そのような場合には自己相似性ではなく、自己アフィン性とよばれる性質を持つことになり、正確にはフラクタル次元は定義されず、垂直方向と水平方向で別々のべき指数を導入することも必要となる⁵⁾。

次元という量は、通常、構造を与えれば唯一の値が決まるものなので、フラクタル次元も構造に対して固有の値を持つように誤解されることが多い。しかし、フラクタル次

図2 フラクタル表面の電気的特性（概念図）

元という量は、式(2)のようなべき乗則を満たすときの指数の総称であって、実際には観測する量（式(2)における f の定義）ごとに異なる値をとってもかまわない。フラクタル次元とは、単なるべき乗則の指数であることを忘れずに、どのような量をどのように観測して定義されているべき指数であるかを押さえておかないと、全く異なるべき乗則同士を混同する危険性があるので注意が必要である。ともかく、いずれにしても、半端なべき乗則が見られるときには、非常に複雑な自己相似的な幾何学構造が関与しているということは一般論としてまちがいない。

固体の表面がフラクタル的構造を持っていると、様々な物性が、フラクタル次元に依存した振舞いを示す。例えば、金属の表面がフラクタル的な凹凸を持つと、交流電流に対する応答に半端なべき乗則が見られるようになる。図2に示すようなフラクタル表面の断面を考えると、インピーダンス Z は、振動数 ω に対して、

$$Z(\omega) \propto \omega^{-3+D}, \quad D = \frac{\log 2}{\log(a)}$$

となる（ただし、 $a > 2$ は水平方向の相似性の倍率を表す）ことが知られている⁶⁾。ここでの D の値は水平断面のフラクタル次元を表しており、 $3-D$ が表面のフラクタル次元を与えることになる。このような例からも推測されるように、固体表面での波の反射、液体が付着したときの表面張力、そして、摩擦などにも直接表面のフラクタル構造は大きな影響を及ぼすことになる。

ガラスのような物質は、表面はつるつるであっても分子がランダムに配置されたアモルファス状態になっているため、分子の連結の仕方にフラクタル性が現れる。分子の連結は振動のモードに直接関係があり、振動のモードの数は比熱と結びついているので、ガラスの比熱の温度依存性などには内部構造のフラクタル性を反映したような振舞いが見られる⁶⁾。振動モードという視点から見たフラクタル構造はフラクトンとよばれる指数を導入して特徴付けが行われることが多い。また、アモルファス物質の分子の連結のフラクタル性は緩和現象とも密接な関係があり、複雑な内部構造を持つような物質の力学的な緩和や電氣的な緩和によく見られる非指数関数型のゆっくりした緩和を説明するためにはフラクタルは欠くことのできない重要な概念となっている⁷⁾。また、高分子が溶媒に溶けている状態ではフラクタル的な構造を持っていることが多く、そのフラクタル性は粘弾性のみならず光の散乱などにも関係してい

図3 拡散律速凝集体

る³⁾。

超伝導の相転移に代表されるような2次相転移では、一般に相互作用が系全体を支配した秩序的な状態と、熱的なゆらぎが秩序を壊した無秩序状態の間の相転移であり、ちょうど相転移点では秩序状態と無秩序状態がフラクタル的に入り交じった状態を実現することが知られている。この相転移点でのフラクタル的な振舞いを臨界現象とよんでおり、臨界指数とよばれている一連の物理量は系のフラクタル性を特徴づけるのに使われている⁸⁾。2次相転移を示す系の例は無数にあるが、磁性体、超伝導体、高分子のゾルゲル転移、パーコレーションなどが代表的である。

4. フラクタルの成因

フラクタル構造が形成されるメカニズムは、様々な角度から解析されてきている。表面を形成する物理的なメカニズムとしては、付着、蒸着、凝集、破壊、浸食など様々であるが、そのどれからでも、ランダムなゆらぎとゆらぎを成長させる不安定性がある場合にはフラクタル構造が実現することが明らかになってきている⁹⁾¹⁰⁾。単純に言えば、非常に基本的で簡単な方法でフラクタル的な表面ができるので、多くの固体表面はフラクタルになっているのである。本章では、フラクタルの成因にかかわる幾つかの最近の話題を紹介する。

まず、単純な物理的なメカニズムによって作られるランダムなフラクタル構造の例として、もはやフラクタルの研究の分野の中では古典的となった拡散律速凝集体を図3に挙げておく。これは、粘着性を持った微粒子がランダムウォークをしながら外部から次々と付着していった結果でできる構造で、フラクタル次元としては、面上で作った場合には1.7、3次元空間中で作った場合には2.5程度の値になることが知られている⁹⁾。

破壊によってできる構造のフラクタル性の研究は80年

図4 衝撃破壊のクラック形状

図5 衝撃破壊による質量分布

代から行われているが、3次元物質の破壊のシミュレーションは最近ようやく実験と検証できるレベルのものが現れた。岩石やガラスなどの不均質なぜい性物質を衝撃によって破壊すると大小さまざまな破片が生じるがその破片の質量分布を測定するとべき分布に従うことが経験則としてよく知られてきた。図4は衝撃破壊のシミュレーションによって得られたクラックの形状の例であり、結果として得られた破片の質量分布は、図5に示すようにべき分布に従うことが数値的に確認できる¹¹⁾。べき分布は、先に述べたように、フラクタル的な性質を持った分布であるので、衝撃破壊によってフラクタル性が自発的に生まれてくる様子が今後詳しく解析されることが期待できる。

浸食によってできる地形のような構造もフラクタル構造の典型としてよく例に出されるが、その形成メカニズムも数値シミュレーションによって明らかになってきている。図6は、水は低いところに流れ、流れに応じて地面が浸食されるという基本的なルールに基づいたシミュレーションによって作られた雨水による地面の浸食によってできた川の 패턴の例であるが、流域のサイズ分布や分岐の仕方

図6 浸食によってできた川のパターン

は自然界のものと数値的にも十分な精度で一致することが確かめられている¹²⁾。川は浸食と共に成長していくのであるが、おもしろいのは、河川のパターンが表面を覆い尽くすとそのパターンは凍り付いたように不変に保たれ、しかも、そのときのパターンは図6のようなフラクタル的な複雑な構造になっていることである。

これらの現象に共通するのは、フラクタル性を有する複雑さが自発的に形成され、しかも、安定に存在し続けるという一般的な性質である。このような性質は、自己組織臨界現象と名付けられ、理論的な側面からも解析されている¹³⁾。自己組織臨界現象のモデルとしては、砂山に砂を少しずつ落としたときに生じるなだれのモデルが代表的であり、繰込み群を用いた近似理論によって、ミクロなダイナミクスの詳細によらずにマクロな振舞いとしてはフラクタル的な状態が唯一の安定状態であることも証明されている¹⁴⁾。また、微粒子の凝集する系に外部からの注入が絶えずあるような場合には、厳密な理論によってどんな初期条件から出発しても定常的なフラクタル状態に必ず収束していくことが証明されている¹⁵⁾。

5. フラクタルゆらぎ

時間的なゆらぎがフラクタル性を示す現象に関する研究も数多くなされている。熱平衡状態でのゆらぎは、ガウス分布でよく近似できるが、熱平衡から離れた系では非ガウスのゆらぎがしばしば重要な物理量のゆらぎの中に観測される。ランダムな輸送現象の一般的な定式化の中からどのような場合にゆらぎがフラクタル性を持つのかということも明らかになりつつある。例えば、一度にまとまった量を輸送させるような数値モデルの解析により、ガウス分布が実現するのは、単位の輸送量が全体に比べて無限小の場合だけであり、一度に輸送する量が多くなればなるほどゆらぎはフラクタル性を持つべき分布に近づいていくことが

わかっている¹⁶⁾。また、一方向にドリフトをしながらランダムに輸送する場合には自発的にゆらぎが増幅し、べき分布に漸近することも知られている¹⁷⁾。

人類が作り出した最も精密で複雑な構造物はインターネットであるが、そのネットワーク中の情報流のゆらぎも自発的にフラクタル的になっていることが最近明らかになっている¹⁸⁾。フラクタル的になる原因の解明も進められており、ゲートウェイなどよばれているネットワーク同士を連結するコンピュータの情報処理能力を超えた情報が一度に入ってくると、そこで情報の渋滞が生じ、渋滞によってゆらぎが増幅され、パワースペクトルがフラクタル性を持ち、いわゆる $1/f$ ゆらぎになることが報告されている¹⁹⁾。

6. 終 わ り に

複雑な体系は、自然界のもの、人工のものを問わず、フラクタル的なゆらぎを好むようである。単純な構造を求める科学の潮流の中でフラクタルはバックグラウンドノイズとして長い間見過ごされてきたが、単純さを求める研究はあらゆる分野で極限的なところまで到達してきており、単純なものが複合した体系を扱わざるを得ない状況になってきている。複雑さを科学的に扱う方法としては、フラクタルは最も基盤がしっかりしているので、今後とも様々な分野の複雑さに関する基礎研究において役立つことと期待する。

文 献

1) B. B. マンデルブロ：フラクタル幾何学，日経サイエンス，(1985)。

- 2) 高安秀樹：フラクタル，朝倉書店，(1986)。
- 3) H. Takayasu：Fractals in the Physical Sciences, John Wiley and Sons Ltd., Chichester, (1989)。
- 4) D. Avnir, ed.：The Fractal Approach to Heterogeneous Chemistry: Surfaces, Colloids, Polymers, John Wiley and Sons Ltd., Chichester, (1989)。
- 5) 松下 貢編著：医学・生物学におけるフラクタル，朝倉書店，(1992)。
- 6) S. H. Liu：Fractals and Their Applications in Condensed Matter Physics, Phys. Rev., B 32, (1985) 7360。
- 7) 村山和郎：アモルファスとフラクタル，「フラクタル科学」(高安秀樹編)，朝倉書店，(1987) 170。
- 8) 田崎清明：相転移，臨界現象，フラクタル，「フラクタル科学」(高安秀樹編)，朝倉書店，(1987) 117。
- 9) タマス・ヴィチュック：フラクタル成長現象，朝倉書店，(1990)。
- 10) A.-L. Barabasi and H. E. Stanley：Fractal Concepts in Surface Growth, Cambridge University Press, (1995)。
- 11) H. Inaoka and H. Takayasu：Universal Fragment Size Distribution in a Numerical Model of Impact Fracture, Physica A, 229, (1996) 5。
- 12) H. Takayasu and H. Inaoka：New Type of Self-Organized Criticality in a Model of Erosion, Phys. Rev. Lett., 68, (1992) 966。
- 13) P. Bak, C. Tang and K. Wiesenfeld：Self-Organized Criticality: An Explanation of $1/f$ Noise, Phys. Rev. Lett., 59, (1987) 381。
- 14) L. Pietronero, A. Vespignani and S. Zapperi：Renormalization Scheme for Self-Organized Criticality in Sandpile Models, Phys. Rev. Lett., 72, (1994) 1690。
- 15) M. Takayasu, H. Takayasu and Y.-h. Taguchi：Non-Gaussian Distribution in Random Transport Dynamics, Int. J. Mod. Phys., 8, (1994) 3887。
- 16) H. Takayasu and Y.-h. Taguchi：Non-Gaussian, Distribution in Random Advection Dynamics, Phys. Rev. Lett., 70, (1993) 782。
- 17) H. Takayasu, T. Kawakami, Y.-h. Taguchi and T. Katsuyama：Fractal Limit Distributions in Random Transports, Fractals, to appear。
- 18) W. E. Leland, M. S. Taqqu, W. Willinger and D. V. Willson：On the Self-Similar Nature of Ethernet Traffic (Extended Version), IEEE/ACM Trans. Net., 1, (1994) 1。
- 19) M. Takayasu, H. Takayasu and T. Sato：Critical Behaviors and $1/f$ Noise in Information Traffic, Physica A, to appear。