縮閉線に基づく曲率変化の滑らかな 曲線、曲面の生成（第4報）*

—— 縮閉面による形状制御と周辺曲面との接続 ——

東 正 毅** 山 根 道 敏***

Generation of Curves and Surfaces with Smoothly Varying Curvature Based on Evolutes (4th Report)

— Control of Shape and Connection to Surrounding Surfaces by Evolute Surface —

Masatake HIGASHI and Michitoshi YAMANE

This research proposes a surface generation method which satisfies the designer's intention to the surfaces and smoothness of the reflected images on them. The method directly determines the curvature distribution of a surface, which is represented by a locus of the evolute of the generatrix moved along the directrices. In this report, the evolute surface formed by the locus is modified according to the designer's intention which is given by an intermediate shape of a generatrix. It is also determined to satisfy the given first and second derivatives such as tangential plane and principal curvature along the boundaries. The generated surfaces by the method have been confirmed to become smooth for the appropriate boundary conditions.

Key words: Computer aided geometric design, evolute, smooth surface, curvature distribution, G^2 continuity

1. は じ め に

本研究では、デザイナの意図を満足する滑らかな曲面を生成することを目的としている。ここで滑らかな曲面とは、曲面上のハイライトや映像がひずまないものであり、面の法線方向の変化、すなわち曲率の変化のし具合に大きく影響され¹⁾、これを滑らかに定める必要がある。

現在広く用いられているスプライン補間や曲線のスイーブ（ロフティング）では、与えられた点群を通りパラメタによる微分値を連続とするような曲面を生成することはできるが、曲率の変化が滑らかとなることは保証しない²⁾。一方、薄板の弾性エネルギーを最小とするように、曲率の自乗和を最小とする手法も研究されている³⁾。この手法によると、滑らかな形状は生成できるが、デザイナ意図を満足するような拘束条件を与えると、必ずしも望むような形状が得られない。

そこで、本研究では、デザイナの意図を満足する滑らかな自由曲面を生成するため、曲率変化を表す縮閉線を規定することにより、その伸開線を用いて対象形状を決定する方法を検討している。第1報⁴⁾では、デザイナの好ましいとする単位曲線の評価基準を設定し、デザイナの意図を幾何的な境界条件（対象とする曲線の両端の位置、接線方向および曲率半径）として与え、縮閉線を円すい曲線で表現することにより、その伸開線を用いて曲率変化の滑らかな平面曲線を得る方法を提案した。第2報⁵⁾では、縮閉線を複数セグメントの円すい曲線で表現して、中間の位置での接線方向を指定することにより曲線形状を制御する方法を提案した。さらに、求められた2投影面上の平面曲線から曲率変化の滑らかな空間曲線の生成法を提案し、これを3次有理Bézier曲線群に近似する方法を示した。第3報⁶⁾では、境界条件として4境界線が与えられた場合に、これらの縮閉線を基に縮閉面を定義し、曲率変化の滑らかな曲面を生成する方

法を提案した。

本報では、縮閉面生成の際の自由度を増加し、微妙なデザイナ意図を満足するよう曲面形状の制御を行う方法を提案する。まず、第2章で縮閉線に基づく曲面生成法の概要と形状制御のための自由度の増加法を述べる。次に、第3章で、デザイナが中間曲線形状を与えて対象曲面を制御する方法を示し、デザイナ意図として境界線周辺での接平面や曲率が与えられたり、周辺の曲面形状が与えられてこれに接続する場合に、曲面形状を制御する方法を提案する。第4章で、これらの方法を適用した結果を示し、第5章で本研究のまとめを述べる。

2. 縮閉面の生成法と形状制御のためのパラメタ

2.1 曲面生成法

曲面は、曲線が曲線に沿って移動するとき、その掃引した軌跡と定義される。このとき移動する曲線を母線と呼び、母線に沿って動くガイドとなる線を導線と呼ぶ。母線の移動方式を規定して曲面を生成すると、両端の母線形状が大きく異なったり、ねじれ方が異なると滑らかな補間ができない。そこで、母線の曲率中心の変化のしかたを示す縮閉線を補間して、縮閉線の移動を定めることにする（図1参照）。母線の縮閉線の移動で生成される曲面を縮閉面と呼び、縮閉線に対する伸開線の移動で定まる曲面を生成曲面とする（図2参照）。

この生成手順は以下になる⁶⁾。母線の曲率変化を補間するために、まず、両端の縮閉線を有理Bézier曲線で近似し、この制御多角形を用いて移動する縮閉線形状を補間する。次に、両端の縮閉線がのる平面を求め、この2つの平面をその間の角度や距離を用いて補間した中間の平面より、導線での対応位置を決定し、この位置に補間された縮閉線を配置する。以上により、対応位置での弦の大きさや傾きに対応した母線形状が、曲率変化を表す縮閉線の伸開線として定まる。この形状は配置に対応して大きさが定まり、オフセット曲線の一つとなる。

* 原稿受付 平成9年5月12日

** 正 会 員 豊田工業大学 (名古屋市天白区久方 2-12-1)

*** 学生会員 豊田工業大学

Fig. 1 Generatrix and evolute

Fig. 2 Evolute surface and generated surface

2.2 縮閉面の自由度の増加

対象曲面は，曲率中心を表す縮閉面を基に生成されるため，縮閉面形状を制御することにより生成曲面の形状を制御する．縮閉面の形状は，縮閉線の制御多角形を規定する形状パラメタにより表現され，これを境界条件に応じて定めることにする．本報では，境界条件として境界線4本の他に，中間線を与えた場合と，導線に沿っての境界横断微分値（接平面と曲率値）が与えられたり，周辺の曲面と接続する場合について検討する．

前報の曲面生成法では，縮閉線を1セグメント近似に制限していた．本報では，近似精度を向上し形状制御のための自由度を増加するため，縮閉線を2セグメントで表現する．入力母線を $\mathbf{G}$ ，その縮閉線を $\mathbf{g}$ とし，曲線パラメタ t の区間 $[0, t^*]$ ， $[t^*, 1]$ をそれぞれ有理2次Bézier曲線で近似する．本報では，処理が簡単となるよう入力母線を平面曲線に限定するが，空間曲線についても前報の有理3次Bézier曲線に対して同じ考え方が適用できる．近似のための条件を入力母線と，縮閉線から定める伸開線の各セグメントの端点の位置，接線，曲率が一致することとする．分割点のパラメタ t^* は，縮閉線の弦と縮閉線の接線が平行となる点，すなわち伸開線の接線が垂直となるときのパラメタとする（図3(a)参照）．このとき t^* は，

$$\dot{\mathbf{G}}(t^*) \cdot \{\mathbf{g}(1) - \mathbf{g}(0)\} = 0 \quad (1)$$

を満足する．近似した縮閉線を $\mathbf{E}_i (i = 0, 1)$ とすれば，

$$\mathbf{E}_i(u) = \frac{B_0^2(u)\mathbf{q}_{i0} + B_1^2(u)\omega_i\mathbf{q}_{i1} + B_2^2(u)\mathbf{q}_{i2}}{B_0^2(u) + B_1^2(u)\omega_i + B_2^2(u)} \quad (2)$$

で表される．ただし

Fig. 3 Representation of evolute with 2 segments

u : 曲線パラメタ ($0 \leq u \leq 1$)

$\mathbf{q}_{ij}$: i 番目のセグメントの j 番目の制御点

ω_i : i 番目のセグメントのウェイト

B_j^m : m 次の Bernstein 多項式

である．ここで， $\mathbf{q}_{i0}, \mathbf{q}_{i1}, \mathbf{q}_{i2}, \omega_i$ を，導線方向のパラメタ v で補間してやると，縮閉面が生成できる．

$$\mathbf{E}_i(u, v) = \frac{B_0^2(u)\mathbf{q}_{i0}(v) + B_1^2(u)\omega_i\mathbf{q}_{i1}(v) + B_2^2(u)\mathbf{q}_{i2}(v)}{B_0^2(u) + B_1^2(u)\omega_i + B_2^2(u)} \quad (3)$$

$\mathbf{E}_i(u, v)$ に対する伸開線の軌跡が生成曲面を表し，この表現式 $\mathbf{S}_i(u, v)$ は，

$$\mathbf{S}_i(u, v) = \mathbf{E}_i(u, v) + \{\rho_i(v) - \int_0^u |\mathbf{E}_{iu}(u, v)| du\} \frac{\mathbf{E}_{iu}(u, v)}{|\mathbf{E}_{iu}(u, v)|} \quad (4)$$

となる．ここで， $\rho_i(v)$ は， $\mathbf{G}(t)$ の曲率半径であり，縮閉線を配置した結果定まる．

いくつかの曲率変化が単調な Bézier 曲線について実験を行った結果，1セグメントの場合と比較して，誤差は1/10となり母線長を1とすると 10^{-5} 以下となった．この結果，実用的な曲線では，十分な精度となった．

2.3 縮閉面の制御パラメタ

前節の方法により，2セグメントで近似したときの縮閉線と制御多角形の関係は，図3(b)のようになる．曲率変化は，縮閉線の形状自体で定まるので，制御点の代わりにこれらの関係を表す形状パラメタを，

- 辺長 (A, B)
- 挟角 (ϕ)
- 内分比 (α, β)
- ウェイト (ω_0, ω_1)

とする（図4）．前二者は前報で使用したものであり，後二者が自由度を増加するため追加されたものである．境界母線のこれらのパラメタが，導線方向に滑らかに補間されると，滑らかな縮閉面を生成でき，対応する生成曲面の曲率変化は滑らかとなる．前報では，その変化は境界条件として特に規定されていないので，最も簡単な線形補間とした．しかし，線形補間では，縮閉面の形状が一意に決定されるため，生成曲面の形状を制御することができない．そこで，境界条件に応じて形状パラメタの中で必要なものを2次，3次など高次の関数を用いて補間することにより，縮閉面形状を制御する方法へと拡張する．境界条件に対して自由度が多いときは，高次化するものを選定し，残りを線形とする．

Fig. 4 Shape parameters for an evolute

3. 生成曲面の制御法

3.1 中間線指定による生成曲面の制御

デザイナーが中間線を指定することにより、生成曲面の形状を制御する。中間線に基づいて縮閉面を決定するため、中間線についても境界母線と同様に、2セグメントで近似した形状パラメータを算出する。境界母線の形状パラメータの値と中間線のものを用いて、パラメータを2次補間する。これにより、縮閉面を生成し、それに対応した生成曲面を生成する。

形状パラメータの集合を λ とおけば、

$$\lambda = \{A, B, \phi, \alpha, \beta, \omega_0, \omega_1\} \quad (5)$$

と表すことができ、境界母線の形状パラメータ $\lambda(0)$ 、 $\lambda(1)$ 、中間線の形状パラメータ $\lambda(0.5)$ を満たす $\lambda(v)$ はLagrange補間により、

$$\lambda(v) = (1-v)(1-2v)\lambda(0) + 4v(1-v)\lambda(0.5) + v(2v-1)\lambda(1) \quad (6)$$

で表す（図5）。これにより、デザイナーは中間線形状を変更することにより、曲面形状を制御することができる。

Fig. 5 Interpolation of shape using parameters

3.2 境界横断微分値の指定による生成曲面の制御

前節の中間線形状の指定により大まかな形状が規定できるが、さらに、デザイナーが形状を微妙に制御したい場合には、4本の境界線に沿っての接平面や境界線と交差する曲線の曲率値を指定する。この指定は、境界線に沿って隣接曲面形状が与えられ、これと曲率連続とすることと同じ拘束を与えることになる。導線の両側の曲面形状が規定され、生成曲面がこれらと曲率(G^2)連続とすると、母線形状に対しては補間平面による断面線での法線方向と曲率値が定まるので、形状パラメータのうち辺長 A 、 B 、挟角 ϕ が定まり、縮閉線の線長 L も規定される（図6参照）。 A 、 B 、 ϕ 以外の形状パラメータは、内分比 α 、 β 、ウェイト ω_0 、 ω_1 の4つとなる。ウェイトを任意に定めると、曲線形状がひずむので、境界母線上の4つのウェイト値に対して、対象とする

Fig. 6 Control polygon determined by boundary condition

縮閉線の形状を示す ϕ と A/B をパラメータとして、ウェイトを双1次補間により定める。 $\beta(v)$ の値を滑らかに変化させると、縮閉面形状を滑らかに変化できることを実験的に確認したので、 β を境界条件に応じて高次化する。残りの内分比 α は、線長拘束を満たすために使用する。すなわち、パラメータ v に対する母線の両端の曲率の差 $L(v)$ は、2セグメントの縮閉線の線長となり、この式を満たすように α を定める。

$$L(v) = \sum_{i=0}^1 \int_0^1 |\mathbf{E}_{iu}(u, v)| du \quad (7)$$

導線に沿っての境界横断微分値が隣接面より規定されているので、残りの境界線である母線上での境界横断微分値を用いて、曲面形状を制御する。制御パラメータの数に応じて、 β の関数を定めることができるように、 β を接平面が与えられたときは2次Bézier関数で、曲率値まで与えられたときは有理3次Bézier関数で表す。

$$\beta(v) = B_0^2(v)\beta_0 + B_1^2(v)\beta_c + B_2^2(v)\beta_1 \quad (8)$$

$$\beta(v) = \frac{B_0^3(v)\beta_0 + B_1^3(v)\omega_l\beta_l + B_2^3(v)\omega_r\beta_r + B_3^3(v)\beta_1}{B_0^3(v) + B_1^3(v)\omega_l + B_2^3(v)\omega_r + B_3^3(v)} \quad (9)$$

上式の係数は、図7に示すものであり、両端での傾き μ_0 、 μ_1 をパラメータとして決定することができる。3次の場合の制御点は、2次のものを次数増加した位置、すなわち、辺長の2/3の位置とする。

 Fig. 7 Interpolation function of $\beta(v)$

境界母線上の境界横断微分値を、図8に示すように、2.2節で述べた両端母線の分割点($\mathbf{S}_0(1, v)$, $v = 0, 1$)における接平面と、母線がのる平面の法線方向($\mathbf{n}_{pl-i}$)の法曲率で指定する。接平面の法線を角度 θ_i ($i = 0, 1$)で表すと、 $\beta(v)$ の関数である生成曲面の法線ベクトル $\mathbf{n}(u, v, \beta(v))$ より、

$$\cos(\theta_i) = \mathbf{n}_{pl-i} \cdot \mathbf{n}(1, v_i, \beta(v_i)) \quad (i = 0, 1; \quad v_0 = 0.0, v_1 = 1.0) \quad (10)$$

Fig. 8 Tangent and curvature at the point on the generatrices

となる。同様に、それぞれの点における母線がのる平面の法線方向の法曲率値 κ_i も、 $\beta(v)$ の関数により、

$$\kappa_i = \kappa_i(1, v_i, \beta(v_i)) \quad (11)$$

と表現される。

以上より、式(10)を満足するように、傾き μ_0 、 μ_1 を決定し、式(11)を満足するように、ウェイト ω_l 、 ω_r を決定する。法線ベクトルには、 $\beta(v)$ の1回微分値が含まれており、曲率値には2回微分値が含まれている。したがって、この方程式を解くとこれらの値が定まり、これを用いて式(8)、(9)の係数が決定される。

4. 適用結果

境界条件に対応して、制御パラメタに対し曲面形状がどのように変化するかの実験を行った。この評価をシルエットパターンと曲率プロファイルで行う¹⁾。シルエットパターンは、自動車デザイナーにより直線の映像線をシミュレートした疑似ハイライト線として使用されているものであり、平行投影における輪郭線を表している。投影方向を指定された軸方向に回転して得られる曲線群により、複数の輪郭線をパターンとして示すものである。これはまた、この軸方向に垂直な断面線に対して、等しい傾きを持つ点をつないだものであり、各断面線がどのように変化していくかを示している。曲率プロファイルは、各断面線の曲率中心がどう分布しているかを、曲率半径の1/10の点を曲線に沿って連続的に表示したものである。

図9は4境界線に加えて中間形状を指定したときの制御形状を示し、(1)は縮閉面と生成曲面であり、(2)は母線方向の断面のシルエットパターン、(3)は導線方向の断面のシルエットパターンを示す。(4)、(5)は、それぞれ母線および導線方向の断面線の曲率プロファイルを示す。(a)は縮閉線の形状パラメタを線形補間したものであり、残りは中間線を与え2次補間したものである。中間線の形状に対応して、曲面の曲率が変化し縮閉面の形状が大きく変わっている。この結果、導線方向の断面線の端点での曲率の大きさが違ってきている。(b)は、(a)に比べて曲率半径が小さく形状が丸くなっており、(c)は曲率半径が大きくフラットな形状となっている。これに対応して、シルエットパタンの曲線の丸みが変わっている。左3つのいずれの曲面も曲率変化が滑らかであることが分かる。しかし、右図(d)のように中間線のパラメタが両端の値の範囲の外側である場合は、滑らかな曲率変化とならない。これは、シルエットパターンが波打っている(図中の矢印部分)ことより分かる。これに対して、曲率プロファイルでは、母線方向の断面間の変化は滑らかとなっているが、導線方向の断面間の変化は、中間部の断面線ではS字状になっており、滑らかとはいえない。ただし、曲率プロファイルでは、曲面としての滑らかさの判定は非常に微妙となるので、以降はシルエットパターンにより、滑らかさを評価する。

Fig. 9 Control of shape by intermediate curve

次に、導線周辺の曲面が規定された場合に、境界母線上の点において接平面方向を指定したときの適用結果を図10に示す。(1)、(2)に2方向による断面のシルエットパターンを示し、(3)にそれぞれに対応する制御関数 β を示す。入力された4境界線に対し、導線周辺の曲面を与えることはむづかしく、適当に定めると境界条件が適切とならない。そこでこの例では、図9(a)によって得られた曲面の導線に沿っての境界横断微分値が固定されているとして、境界母線上の点(2セグメント近似による分割点)の導線方向の接線値を制御パラメタとした。接線値は、境界母線の接触平面と生成曲面の接平面の法線のなす角で表し、 β を線形とした場合(図10(b))の角度に対する変化分で表す。この値は、(a)では、 $\Delta\theta_0 = -0.01^\circ$ 、 $\Delta\theta_1 = -0.01^\circ$ であり、(c)では、 $\Delta\theta_0 = +0.01^\circ$ 、 $\Delta\theta_1 = +0.002^\circ$ である。これに対し(d)では、 $\Delta\theta_0 = +5.4^\circ$ と大きくした。この結果、(d)ではシルエットパタンの一部(矢印部分)が直線的になっている。この例におけるシルエットパターンが滑らかとなる接線値の範囲は、 $\pm 0.01^\circ$ であり非常に狭い。この原因は、導線方向の横断微分が規定されているため、コーナでのツイストベクトルが規定され、母線に沿っての境界横断微分値を大きくは変化できないためである。中央の位置で指定された接線方向に対して決定された母線に沿っての横断微分ベクトルの変化を、図11に示す。 $\Delta\theta_0 = 0.1^\circ$ で、この変化に乱れが生じていることが分かる。もう少し形状

Fig. 10 Control of shape by tangent direction on the generatrices with constraints of tangential plane and curvature along directrices

Fig. 11 Cross derivative along the generatrix

が丸い曲面では，滑らかに制御できる範囲は $\pm 0.1^\circ$ となる．

図12に，境界母線上の曲率値を指定した例を示す．図12(b)が図10(b)と同じ形状であり，これに対して(a)では曲率半径を大きくし，(c)，(d)では曲率半径を小さくしている．この結果について，(1)，(2)に2方向による断面のシルエットパターンを示し，(3)に断面の曲率プロファイルを示す．接線の場合と異なり，曲率値の場合は，両端の中間の値であれば曲率値を大きく変化しても，シルエットパターンはほとんど変化せず，滑らかな曲面を得ることができる．(d)は，曲率半径を両端のものより小さい値を指定したため，曲率プロファイルは単調でなく，シルエットパターンにもその影響が微妙に現れている（図中矢印）．

以上の実験結果より，適切な境界条件（形状パラメタ）を与えると，デザイナー意図にしたがった微妙な曲面形状を，曲率変化の滑らかな曲面として生成できることが分かる．また，4境界の周辺の曲面と曲率連続な曲面を生成する場合に，縮閉面を滑らかとなるようにできれば，内部の曲面の曲率分布が滑らかとなる形状を生成できる．ただし，導線での境界横断微分値が規定されると，母線上での接平面は大きく変更できない．

5. ま と め

縮閉面の形状を，デザイナーの意図や接続条件に対応して滑らかに変化させることにより，曲率変化の滑らかな形状を生成できた．本方法は，従来のCoonsやGregoryの接続では規定できなかった曲面内部の曲率変化を規定できる．また，形状パラメタにより形状を直接規定しているため，不適切な境界条件を検出でき，適切なパラメタの範囲内で形状を自由に制御できる．いくつかの曲面形状について実験を行った結果，次の結論を得た．

Fig. 12 Control of shape by tangent direction and curvature on the generatrices with constraints of tangential plane and curvature along generatrix

- (1) 中間形状の指定では，その縮閉線の形状パラメタが，両端母線の中に入っていれば，滑らかな曲面を生成できる．
- (2) 導線に沿っての境界横断微分値が与えられると，形状パラメタが適切に変化し滑らかな縮閉面が生成できることが，滑らかな対象曲面を生成するための必要条件となる．
- (3) 導線に沿っての境界横断微分値に加えて，母線上での境界横断微分値を規定すると，

- 接線方向を変化して，滑らかな曲面を得ることのできる範囲は大変狭い．
- 曲率値の指定は，両端の値の中間に入っていれば，滑らかな曲面を得ることができる．

今後は，各種形状，条件に対する評価（弾性エネルギーとの対応），曲率変化が単調でない母線への拡張，母線形状の空間曲線への拡張を検討する．

参 考 文 献

- 1) 東 正毅，近藤 学：曲面の基本的性質の解明と美的意匠曲面の評価—等主曲率線，曲率極値線による曲面の解析—，精密工学会誌，**59**, 3 (1993) 441.
- 2) G. Farin: Curves and Surfaces for Computer-Aided Geometric Design: A Practical Guide (4th ed.), Academic Press, San Diego, CA (1996).
- 3) H. Hagen and G. Shulze: Automatic smoothing with geometric surface patches, Computer Aided Geometric Design, **4** (1987) 231.
- 4) 東 正毅，毛利 仁，齊藤 剛：縮閉線に基づく曲率変化の滑らかな曲線，曲面の生成（第1報）—縮閉線の決定と有理Bézier曲線による表現—，精密工学会誌，**59**, 11 (1993) 1891.
- 5) 東 正毅，川畑弘幸，毛利 仁：縮閉線に基づく曲率変化の滑らかな曲線，曲面の生成（第2報）—曲線形状の制御と空間曲線の生成—，精密工学会誌，**60**, 4 (1994) 519.
- 6) 東 正毅，薦森秀夫：縮閉線に基づく曲率変化の滑らかな曲線，曲面の生成（第3報）—4曲線を境界とする曲面の生成—，精密工学会誌，**62**, 9 (1996) 1272.