高速・高精度制御実現のための制御アルゴリズム に関する研究（第3報）*

—— 変数変調デルタオペレーションの最適制御系への適用 ——

青 木 立** 古 川 勇 二***

A Study on Controlling Algorithm to Realize High-Speed & High-Accuracy Control Systems (3rd Report)

— An Application of Modified Delta Operation with V.M.M. to Optimal Control Systems —

Tatsu Aoki and Yuji Furukawa

In order to establish a delta operator technique in fixed-point arithmetic, the first report proposed a modified delta operator newly and verified its availability for the first-order systems. The second report tried to apply this operator to the n th-order systems. Furthermore, a new error reduction method named Variable Modulation Method (V.M.M.) was proposed. In the present paper, it is aimed to apply V.M.M. to an optimal control system. First, it is shown that the equivalence between a shift model and a delta model, which was proved in the first report by the help of transfer function, can be kept in a state-space equation too. Following this result, the modified delta model based on state-space equation was derived. Next, the design procedure of an optimal control system based on modified delta model with V.M.M. is described generally. Having applied this procedure to the optimal controlling of DC motor, the availability of V.M.M. was made clear for the cases of smaller word length, that could not be realized if the algorithm was represented by the conventional shift or delta operators.

Key words : delta operator, digital control, optimal control, variable modulation method, mechatronics

1. 緒 言

高速サンプリング時の数値的不安定性を低減する手法としてデルタオペレーション手法が評価されているが、固定小数点演算では係数の表現誤差や積における打ち切り誤差、さらに、狭いダイナミックレンジのため、制御アルゴリズムが再び数値的に不安定になるという問題があった。

そこで、第1報では固定小数点演算においてもデルタオペレーションが有効となる手法として修正デルタオペレータを提案し、一次系についてその実用性を確認した¹⁾。第2報では修正デルタオペレータの n 次系への適用方法について検討し、さらに、従来のモデルにおいて要求される語長より短い語長で精度良く演算可能な変数変調法 (Variable Modulation Method, 以下 V.M.M. と略す) を新たに提案し、その有効性を確認した²⁾。

本論文では、伝達関数に基づいて提案されたV.M.M.の最適制御系への応用について述べる。最適制御系では状態フィードバックを実現するためにオブザーバが不可欠であり、状態方程式に基づいたV.M.M.を新たに提案する。まず、状態方程式においてシフトモデルとデルタモデルの等価性を示し、これより状態方程式による修正デルタモデルを導出する。ついで、最適制御系への応用手順を一般的に示し、DCモータを例に最適制御系に関するシミュレーションを実施する。本手法により適応制御など他の制御手法にV.M.M.が応用可能となる。

* 原稿受付 平成8年9月30日

** 正 会 員 東京都立工業高等専門学校 (東京都品川区東大井 1-10-40)

*** 正 会 員 東京都立大学工学部 (東京都八王子市南大沢 1-1)

Fig.1 Block diagram of state feedback with observer

2. 状態方程式に基づいた修正デルタモデル

2.1 シフトモデルとデルタモデルの等価性

図1に示す状態フィードバック制御系について修正デルタモデルを導出する。第1報では伝達関数に基づいてシフトモデルとデルタモデルの等価性を示したが、状態方程式においても等価性が以下のように成立する。1入力1出力の n 次系に関する状態方程式は一般に次のように記述できる。

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) \quad (1)$$

$$y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t)$$

ただし、

$$\mathbf{x}(t): n \times 1 \quad u(t): 1 \times 1 \quad y(t): 1 \times 1$$

$$\mathbf{A}: n \times n \quad \mathbf{B}: n \times 1 \quad \mathbf{C}: 1 \times n$$

とする。ここで、状態方程式における $\mathbf{D}$ は0とし、入力 $u(t)$ から出力 $y(t)$ へのダイレクトな伝達はないものとする。

まず、式(1)を零次ホールド等により離散化し、シフトモデルを求める。

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}_s \mathbf{x}_k + \mathbf{B}_s u_k \quad (2)$$

$$y_k = \mathbf{C} \mathbf{x}_k$$

式(2)はシフトオペレータ z により次のように記述できる。

$$[z\mathbf{I} - \mathbf{A}_s] \mathbf{x}_k = \mathbf{B}_s u_k \quad (3)$$

$$y_k = \mathbf{C} \mathbf{x}_k$$

ここで、任意の定数 T_δ を用いて修正デルタオペレータを以下のように定義する¹⁾。

$$\delta' = \frac{z-1}{T_\delta} \quad (4)$$

式(4)より次式が求まり、

$$z = T_\delta \delta' + 1 \quad (5)$$

これを式(3)に代入して式(9)に示す修正デルタモデルを求める。

$$[(T_\delta \delta' + 1)\mathbf{I} - \mathbf{A}_s] \mathbf{x}_k = \mathbf{B}_s u_k \quad (6)$$

$$y_k = \mathbf{C} \mathbf{x}_k$$

$$T_\delta \delta' \mathbf{x}_k + (\mathbf{I} - \mathbf{A}_s) \mathbf{x}_k = \mathbf{B}_s u_k \quad (7)$$

$$y_k = \mathbf{C} \mathbf{x}_k$$

$$\delta' \mathbf{x}_k = \frac{\mathbf{A}_s - \mathbf{I}}{T_\delta} \mathbf{x}_k + \frac{\mathbf{B}_s}{T_\delta} u_k \quad (8)$$

$$y_k = \mathbf{C} \mathbf{x}_k$$

$$\delta' \mathbf{x}_k = \mathbf{A}_{\delta'} \mathbf{x}_k + \mathbf{B}_{\delta'} u_k \quad (9)$$

ただし、

$$\mathbf{A}_{\delta'} = \frac{\mathbf{A}_s - \mathbf{I}}{T_\delta} \quad \mathbf{B}_{\delta'} = \frac{\mathbf{B}_s}{T_\delta}$$

とする。なお、 $\mathbf{A}_{\delta'}$ 、 $\mathbf{B}_{\delta'}$ はそれぞれ、シフトモデル $\mathbf{A}_s$ 、 $\mathbf{B}_s$ に対応した修正デルタモデルとなる。さらに、演算アルゴリズムを導くために式(9)を逆修正デルタオペレータ表現に変換する。

$$\mathbf{x}_k = \delta'^{-1} (\mathbf{A}_{\delta'} \mathbf{x}_k + \mathbf{B}_{\delta'} u_k) \quad (10)$$

$$y_k = \mathbf{C} \mathbf{x}_k$$

次に、この逆修正デルタオペレータ演算アルゴリズムが元のシフトモデルと等価であることを示す。式(4)より逆修正デルタオペレータは以下になる。

$$\delta'^{-1} = \frac{T_\delta}{z-1} \quad (11)$$

式(11)を式(10)に代入し、

$$\mathbf{x}_k = \frac{T_\delta}{z-1} \left(\frac{\mathbf{A}_s - \mathbf{I}}{T_\delta} \mathbf{x}_k + \frac{\mathbf{B}_s}{T_\delta} u_k \right) \quad (12)$$

$$y_k = \mathbf{C} \mathbf{x}_k$$

整理すると元のシフトモデルに一致する。

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}_s \mathbf{x}_k + \mathbf{B}_s u_k \quad (13)$$

$$y_k = \mathbf{C} \mathbf{x}_k$$

この等価性は0を除く任意の T_δ について成立するため、 T_δ がどのような小さな値をとっても、入出力関係、すなわち、伝達関数は元のシフトモデルと等価になる。

2.2 感度係数

第1報において伝達関数表現における修正デルタモデルの感度係数を求めた。ここでは状態方程式表現における修正デルタモデルの感度係数について検討する。よく知られているように、シフトモデルの極は行列 $\mathbf{A}_s$ の固有値 p_{si} であり、この固有値に対応した固有ベクトルを $\mathbf{x}_{si}$ とすると次式が成立する。

Fig.2 Block diagram of state feedback with observer (Continuous-time systems)

$$\mathbf{A}_s \mathbf{x}_{si} = p_{si} \mathbf{x}_{si} \quad (14)$$

両辺から $\mathbf{x}_{si}$ を減算し、

$$\mathbf{A}_s \mathbf{x}_{si} - \mathbf{x}_{si} = p_{si} \mathbf{x}_{si} - \mathbf{x}_{si} \quad (15)$$

整理すると次のようになる。

$$(\mathbf{A}_s - \mathbf{I}) \mathbf{x}_{si} = (p_{si} - 1) \mathbf{x}_{si} \quad (16)$$

さらに、両辺を T_δ により除す。

$$\frac{\mathbf{A}_s - \mathbf{I}}{T_\delta} \mathbf{x}_{si} = \frac{p_{si} - 1}{T_\delta} \mathbf{x}_{si} \quad (17)$$

ここで、

$$p_{\delta'i} = \frac{p_{si} - 1}{T_\delta} \quad (18)$$

とし、式(9)を考慮すると式(17)は次のように記述できる。

$$\mathbf{A}_{\delta'} \mathbf{x}_{si} = p_{\delta'i} \mathbf{x}_{si} \quad (19)$$

式(19)から修正デルタオペレータ表現による行列 $\mathbf{A}_{\delta'}$ の固有値は $p_{\delta'i}$ であることがわかる。すなわち、シフトモデルの極 p_{si} は修正デルタオペレータにより極 $p_{\delta'i}$ に写像される。また、式(18)から連続時間系における極 p_{ci} との関係は以下になる。

$$p_{\delta'i} = \frac{p_{si} - 1}{T_\delta} = \frac{e^{p_{ci} T} - 1}{T_\delta} \quad (20)$$

式(20)より感度係数 $Q_{cs'}$ は以下になる。

$$\frac{\Delta p_{ci}}{p_{ci}} = Q_{cs'} \frac{\Delta p_{\delta'i}}{p_{\delta'i}} \quad ; \quad Q_{cs'} = \frac{e^{p_{ci} T} - 1}{p_{ci} T e^{p_{ci} T}} \quad (21)$$

伝達関数の場合と同様に感度係数 $Q_{cs'}$ は T_δ によらないことがわかる。以上より、状態方程式に基づいた修正デルタオペレーションは伝達関数に基づいた修正デルタオペレーションと同様に z 平面上の $1+j0$ に集中した極を分離し、数値的不安定性を低減できることがわかった。

3. 修正デルタオペレータの最適制御系への適用

3.1 最適制御系におけるフィードバックゲインの決定

図2に示す積分補償を加えた状態フィードバック制御系への適用手順について述べる。よく知られているように状態フィードバックによる閉ループ系全体に関する極配置とオブザーバに関する極配置は独立に考えることができる。そこで、制御対象に関する状態はすべて直接観測できるものと仮定する。まず、制御系全体を連続時間系として捉え、最適フィードバックゲイン及びオブザーバゲインを求める。ついで求めた制御アルゴリズムを離散化する。図2より以下の関係が成立する。

$$\dot{\mathbf{x}}_{n+1}(t) = \mathbf{r}(t) - \mathbf{y}(t) \quad (22)$$

$$u(t) = -\mathbf{K} \mathbf{x}(t) + k_I x_{n+1}(t) \quad (23)$$

ここで、状態変数を次のように定義すると

$$\bar{\mathbf{x}} = [x_{n+1}(t) \quad \mathbf{x}(t)]^T \quad (24)$$

式(1), (22), (23)から以下の状態方程式が求まる。

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{n+1}(t) \\ \dot{\mathbf{x}}(t) \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{A}} \begin{bmatrix} x_{n+1}(t) \\ \mathbf{x}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} r(t) + \bar{\mathbf{B}} u(t) \quad (25)$$

$$u(t) = \bar{\mathbf{K}} \begin{bmatrix} x_{n+1}(t) \\ \mathbf{x}(t) \end{bmatrix} \quad y(t) = \bar{\mathbf{C}} \begin{bmatrix} x_{n+1}(t) \\ \mathbf{x}(t) \end{bmatrix}$$

ただし、

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 0 & -\mathbf{C} \\ 0 & \mathbf{A} \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{B} \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{K}} = [k_f \quad -\mathbf{K}], \quad \bar{\mathbf{C}} = [0 \quad \mathbf{C}]$$

とする。ここで、最適制御則を求めるため目標値 $r(t)$ に追従する制御系をレギュレータに変換する。このためには、ステップ応答に関する偏差及び状態変数を以下のように定義し、

$$\begin{aligned} \mathbf{e}(t) &= \mathbf{x}(\infty) - \mathbf{x}(t) \\ e_{n+1}(t) &= x_{n+1}(\infty) - x_{n+1}(t) \\ e_u(t) &= u(\infty) - u(t) \end{aligned} \quad \mathbf{x}_e = \begin{bmatrix} e_{n+1}(t) \\ \mathbf{e}(t) \end{bmatrix} \quad (26)$$

$r(t)$ が一定であることを考慮して式(25)を次のように変形する。

$$\dot{\mathbf{x}}_e = \bar{\mathbf{A}} \mathbf{x}_e + \bar{\mathbf{B}} e_u(t) \quad (27)$$

$$e_u(t) = \bar{\mathbf{K}} \mathbf{x}_e$$

さらに、評価関数 J を以下のように定義し、その値が最小になるようなフィードバックゲインを求める。

$$J = \int_0^\infty (\mathbf{x}_e^T \mathbf{Q} \mathbf{x}_e + q e_u^2) dt \quad (28)$$

ここで、 $\mathbf{Q}$ は状態の重み係数、 q は入力の重み係数で、これらを調整することにより制御系の応答が調節できる。そこで、望ましい応答が得られるまでシミュレーションにより重み係数を調整する必要がある。最適フィードバックゲイン $\bar{\mathbf{K}}_{\text{opt}}$ は以下に示す代数リカッチ方程式から行列 $\mathbf{P}$ を求め、

$$\mathbf{P}\bar{\mathbf{A}} + \bar{\mathbf{A}}^T \mathbf{P} - \mathbf{P}\bar{\mathbf{B}} q^{-1} \bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{P} + \mathbf{Q} = 0 \quad (29)$$

次式により求まる。

$$\bar{\mathbf{K}}_{\text{opt}} = q^{-1} \bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{P} \quad (30)$$

なお、代数リカッチ方程式は制御系CADソフトウェアを利用することにより容易に解くことができる。

3.2 オブザーバの設計

オブザーバゲインを $\mathbf{L}$ 、状態の推定値を $\hat{\mathbf{x}}(t)$ とすると式(1)に示す制御対象に関するオブザーバは次式で表現できる。

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C}) \hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}u(t) + \mathbf{L}y(t) \quad (31)$$

ただし、

$$\mathbf{A}: n \times n \quad \mathbf{B}: n \times 1 \quad \mathbf{C}: 1 \times n \quad \mathbf{L}: n \times 1$$

$$\hat{\mathbf{x}}(t): n \times 1 \quad u(t): 1 \times 1 \quad y(t): 1 \times 1$$

とする。そこで、制御系はまず式(31)、式(22)よりそれぞれ状態の推定値 $\hat{\mathbf{x}}(t)$ 及び $x_{n+1}(t)$ を求め、式(23)より $u(t)$ を求めて制御対象にフィードバックする。式(22)、式(23)、式(31)をまとめると制御系全体は以下の状態方程式により記述できる。

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \bar{\mathbf{A}} \mathbf{x} + \bar{\mathbf{B}}^r (r(t) - y(t)) + \bar{\mathbf{B}}^y y(t) \\ u(t) &= \bar{\mathbf{K}} \mathbf{x} \end{aligned} \quad (32)$$

ただし、

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \mathbf{B}k_f & \mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C} - \mathbf{B}\mathbf{K} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}(t) = [x_{n+1}(t) \quad \hat{\mathbf{x}}(t)]^T$$

$$\bar{\mathbf{B}}^r = [1 \quad 0 \quad \dots \quad 0]^T, \quad \bar{\mathbf{B}}^y = [0 \quad \mathbf{L}]^T, \quad \bar{\mathbf{K}} = [k_f \quad -\mathbf{K}]$$

とする。なお、式(32)において、さらに整理して $r(t)$ の項と $y(t)$ の項に分離せず、制御系の出力 $y(t)$ が入力 $r(t)$ に追従するように $r(t) - y(t)$ の項をそのまま残しておく。

Fig.3 Observer based on transfer function

3.3 状態方程式に基づいた修正デルタモデルの導出

式(32)に示す状態方程式は入力 $r(t)$ 、 $y(t)$ に関して線形であり、重ね合わせの原理を適用できる。このため $\bar{\mathbf{A}}$ と $\bar{\mathbf{B}}^r$ 、 $\bar{\mathbf{A}}$ と $\bar{\mathbf{B}}^y$ の各組に対して零次ホールド等を用いて離散化し、シフトモデルを求める。

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \bar{\mathbf{A}}_s \mathbf{x}_k + \bar{\mathbf{B}}_s^r (r_k - y_k) + \bar{\mathbf{B}}_s^y y_k \\ u_k &= \bar{\mathbf{K}} \mathbf{x}_k \end{aligned} \quad (33)$$

次に修正デルタモデルを求めるため、 T_s を1に設定して式(33)と式(9)より $\bar{\mathbf{A}}_s$ 、 $\bar{\mathbf{B}}_s^r$ 、 $\bar{\mathbf{B}}_s^y$ を求める。

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \bar{\mathbf{A}}_s \mathbf{x}_k + \bar{\mathbf{B}}_s^r (r_k - y_k) + \bar{\mathbf{B}}_s^y y_k \\ u_k &= \bar{\mathbf{K}} \mathbf{x}_k \end{aligned} \quad (34)$$

ただし、

$$\bar{\mathbf{A}}_s = \bar{\mathbf{A}}_s - \mathbf{I}, \quad \bar{\mathbf{B}}_s^r = \bar{\mathbf{B}}_s^r, \quad \bar{\mathbf{B}}_s^y = \bar{\mathbf{B}}_s^y$$

とする。式(34)は行列 $\bar{\mathbf{A}}_s$ と状態 $\mathbf{x}_k$ の積を演算する必要があり、モデルの次数 n の2乗のオーダーで演算量が増える。そこで、演算量を減らすため、相似変換により行列 $\bar{\mathbf{A}}_s$ と $\bar{\mathbf{B}}_s^r$ 、または $\bar{\mathbf{A}}_s$ と $\bar{\mathbf{B}}_s^y$ を可制御標準形式にし、行列の各成分について1と0を増やす手法も考えられるが、倍精度浮動小数点演算によるシミュレーションの結果、サンプリング周期を0.1ms変化させただけでも変換行列が正則ではなくなり、変換行列が存在しなくなった。また、変換行列が正則であっても数値的に不安定で制御アルゴリズム係数が微小に変化しただけでも極と零点の位置が大きく変化してしまうことがわかった。しかも、このような現象が希ではなくしばしば発生することがわかった。これはオブザーバが2入力1出力のシステムであり、二つの伝達関数が定義できるが、係数の個数が少なくなればなるほど精度良く演算可能な係数の表現が競合し、一方の伝達関数の演算精度を向上させると他方の演算精度が減少するためと考えられる。さらに、式(34)は1個の状態変数に対して $r_k - y_k$ と y_k の2入力となっており、固定小数点演算の狭いダイナミックレンジでは、状態変数がオーバーフロー、アンダフローしないように設計パラメータを調整することは容易ではないことがわかった。従って、語長や演算時間等の制約の中で式(34)の行列演算を直接、精度良く演算することは非常に困難であることがわかった。

3.4 伝達関数に基づいた修正デルタモデルの導出

上記の問題を解決するため、伝達関数に基づいた修正デルタモデルの導出法を提案する。図3に示すように式(34)から入力が $r_k - y_k$ 、出力が u_k の伝達関数 $H_c(s)$ と入力が y_k 、出力が u_k の伝達関数 $H_c(s)$ の二つの伝達関数が定義できる。ところで、一般に式(1)に示す状態方程式は次式の伝達関数で表現できる。

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B \quad (35)$$

状態方程式を伝達関数に変換する式(1)と式(35)の関係は s を δ' に置き換えても同様に成立する。そこで、この関係を利用すると以下の二つの修正デルタモデル $H_r(\delta')$ 、 $H_y(\delta')$ が求まる。

$$H_r(\delta') = \bar{K}(\delta'I - \bar{A}_\delta)^{-1} \bar{B}_\delta' = \frac{N_r(\delta')}{D(\delta')} \quad (36)$$

$$H_y(\delta') = \bar{K}(\delta'I - \bar{A}_\delta)^{-1} \bar{B}_\delta' = \frac{N_y(\delta')}{D(\delta')} \quad (37)$$

式(36)、式(37)は修正デルタオペレータによる伝達関数であり、それぞれの伝達関数は一般的に次のように表現できる。

$$H(\delta') = \frac{c_1''\delta'^{n-1} + \dots + c_{n-1}''\delta' + c_n''}{\delta'^n + a_1''\delta'^{n-1} + \dots + a_{n-1}''\delta' + a_n''} \quad (38)$$

式(38)を次のように変形し、制御アルゴリズムを求める。

$$\begin{aligned} H(\delta'^{-1}) &= \frac{c_1''\delta'^{-1} + \dots + c_{n-1}''\delta'^{1-n} + c_n''\delta'^{-n}}{1 + a_1''\delta'^{-1} + \dots + a_{n-1}''\delta'^{1-n} + a_n''\delta'^{-n}} \\ &= k \frac{b_1''\delta'^{-1} + \dots + b_{n-1}''\delta'^{1-n} + b_n''\delta'^{-n}}{1 + a_1''\delta'^{-1} + \dots + a_{n-1}''\delta'^{1-n} + a_n''\delta'^{-n}} \end{aligned} \quad (39)$$

ただし、

$$k = c_1'' \quad , \quad b_n'' = \frac{c_n''}{c_1''}$$

とする。入力を v_k 、出力を u_k とし、さらに、制御アルゴリズムの設計パラメータを $T_1 \sim T_n$ とすると、式(39)より制御アルゴリズムは以下になる²⁾。

$$\begin{aligned} x_k^0 &= v_k - a_1'x_k^1 - \dots - a_{n-1}'x_k^{n-1} - a_n'x_k^n \\ u_k &= k(b_1'x_k^1 + \dots + b_{n-1}'x_k^{n-1} + b_n'x_k^n) \\ x_{k+1}^n &= x_k^n + T_n x_k^{n-1} \\ &\vdots \\ x_{k+1}^1 &= x_k^1 + T_1 x_k^0 \end{aligned} \quad (40)$$

ただし、

$$a_j' = \frac{a_j''}{T_1 \cdot T_j} \quad , \quad b_j' = \frac{b_j''}{T_1 \cdot T_j}$$

とする。

3.5 伝達関数表現によるオブザーバの特徴

本手法ではオブザーバを二つの伝達関数に分離したため、3.3節で述べた係数の競合を避けることができ、設計パラメータの調整が容易になる。また、オブザーバに関する状態方程式が求まるとそれに対応した二つの伝達関数はそれぞれ一意に定まり、かつ、必ず求まる。このため、相似変換行列が存在しない、あるいは、数値的に不安定になるなどの問題がない。さらに、本手法では式(34)に示す行列の成分すべてを用いて演算する手法に比べて演算量が少なく、制御系CADソフトウェアを利用して $\bar{A}_\delta$ から単位行列 I を減じ、さらに、状態方程式から伝達関数への変換により容易に修正デルタモデルが導出できる。

4. 変数変調デルタオペレーション(V.M.M.)の適用

伝達関数に基づいて提案されたV.M.M.²⁾のオブザーバへの適用手順を示す。式(34)に示す状態方程式に関して二組の行列の組 $\bar{A}_\delta$ 、 $\bar{B}_\delta'$ 、 $\bar{K}$ と $\bar{A}_\delta$ 、 $\bar{B}_\delta'$ 、 $\bar{K}$ に分離し、それぞれの行列の組で形成される状態方程式について以下の[1]～[8]を適用する。

[1] 修正デルタオペレータの再定義

$$\delta' = z + 1 \quad (41)$$

[2] シフトモデルの極及び零点の符号の反転

V.M.M.ではシフトモデル $H(z)$ の極と零点の符号を反転するため $H(-z)$ を求める必要がある。そこで、式(3)の z に $-z$ を代入して整理すると以下になる。

$$x_{k+1} = -A_k x_k - B_k u_k \quad (42)$$

$$y_k = C x_k$$

従って、シフトモデルを次のように変換する。

$$A_k' = -A_k \quad , \quad B_k' = -B_k \quad (43)$$

[3] シフトモデルから修正デルタモデルへの変換

式(2)に示すシフトモデルを式(43)により変換する。ついで、式(41)に示す修正デルタオペレータを用い、式(9)の導出過程と同様にして修正デルタモデルを求める。

$$x_{k+1} = A_\delta' x_k + B_\delta' u_k \quad (44)$$

$$y_k = C x_k$$

ただし、

$$A_\delta' = A_\delta + I \quad , \quad B_\delta' = B_\delta$$

とする。式(35)の関係を用いて式(44)から $H(\delta')$ を求める。

$$H(\delta') = \frac{c_1''\delta'^{n-1} + \dots + c_{n-1}''\delta' + c_n''}{\delta'^n + a_1''\delta'^{n-1} + \dots + a_{n-1}''\delta' + a_n''} \quad (45)$$

[4] 制御アルゴリズムの導出

式(45)を式(39)の形式に変形することにより、式(40)に示す制御アルゴリズムが求まる。なお、式(41)において修正デルタオペレータを再定義したため、式(40)における逆修正デルタオペレーションの部分は以下のように変更する。

$$x_{k+1}^{j+1} = -x_k^{j+1} + T_{j+1} x_k^j \quad (46)$$

[5] バイアス w_k^j の導入

符号付き n bitsの固定小数点演算において、式(46)は以下のように演算する。

$$x_{k+1}^{j+1} = -x_k^{j+1} + f_j(T_{j+1} x_k^j), \quad f_j(y) = \frac{y + w_k^j \pm 2^{n-2}}{2^{n-1}} \quad (47)$$

ここで、 w_k^j は新たに導入したバイアスであり、この値によりアンダフローの発生を調節できる。アンダフローを回避するため、定常的な入力 α に対して m_j' がサンプリング周期ごとに交互に0と1の値をとる条件は以下になる²⁾。

$$\begin{aligned} 2^{n-2} - T_{j+1}\alpha &\leq w_k^j < 3 \cdot 2^{n-2} - T_{j+1}\alpha \\ -3 \cdot 2^{n-2} + T_{j+1}\alpha &< w_k^j < 2^{n-2} + T_{j+1}\alpha \end{aligned} \quad (48)$$

[6] 出力部へのハイパスフィルタの挿入

制御アルゴリズムにより求められた u_k を以下のハイパスフィルタに通し、定常的なバイアスを除去する。

$$\frac{u_k'}{u_k} = \frac{z-1}{2} \quad (49)$$

[7] 入力の変調と出力の復調

元のシフトモデルと等価になるために、入力 v_k をサンプリング周期ごとに正負に変調し、フィルタの出力 u_k' は復調する。

$$v_k = (-1)^k v_k \quad , \quad u_k' = (-1)^k u_k' \quad (50)$$

[8] ゲイン k の調整

V.M.M.では入力が小さいときにはゲインが自動的に上昇する。そこで、倍精度浮動小数点演算による応答に近くなるようにゲイン k を調整する必要がある。

5. シミュレーション

5.1 DCモータのモデル

減速機付DCモータのモデルを図4に示す。図4及びDCモータに関するRL回路より次式が成立する。

$$Li = u - Ri - K_b \dot{q}_m$$

$$J_m \ddot{q}_m = K_m i - B_m \dot{q}_m - k_f (q_m - \alpha q_l) \quad (51)$$

$$J_l \ddot{q}_l = \alpha k_f (q_m - \alpha q_l) - B_l \dot{q}_l$$

ここで、

q_m : モータ軸側の回転角 q_l : 負荷軸側の回転角
 J_m : モータ慣性モーメント J_l : 負荷慣性モーメント
 B_m : モータの粘性抵抗 B_l : 負荷の粘性抵抗
 k_f : 減速機のねじり剛性 α : 減速比
 K_m : トルク定数 L : モータインダクタンス
 R : 電機子抵抗 K_b : 逆起電力定数
 u : モータ入力電圧 i : モータ電流

とする。また、状態変数は以下のように定義した。

$$x^1 = q_l, \quad x^2 = \dot{q}_l, \quad x^3 = q_m, \quad x^4 = \dot{q}_m, \quad x^5 = i$$

$$\mathbf{x} = [x^5 \quad x^4 \quad x^3 \quad x^2 \quad x^1]^T \quad (52)$$

5.2 シミュレーション条件

制御系全体はMacintosh版SIMULINK, Ver.1.2を使用し、制御器の部分はThink-C, Ver.5.0を使用した。また、制御器は16bits固定小数点演算による離散時間系とし、制御対象は倍精度浮動小数点演算による連続時間系としてシミュレーションを実施した。各定数を以下に示す。

$$L = 6.3 \times 10^{-4} \text{H}, \quad R = 10 \Omega, \quad K_b = 1.5 \times 10^{-2} \text{Vs/rad}$$

$$K_m = 1.3 \times 10^{-2} \text{Nm/A}, \quad k_f = 1.0 \text{Nm/rad}, \quad \alpha = 100$$

$$J_m = 4.0 \times 10^{-7} \text{kgm}^2, \quad B_m = 1.0 \times 10^{-8} \text{Nms/rad}$$

$$J_l = 8.0 \times 10^{-3} \text{kgm}^2, \quad B_l = 1.0 \times 10^{-2} \text{Nms/rad}$$

また、最適制御の重み係数は応答より以下のように決定した。

$$\mathbf{Q} = \text{diag}\{4 \times 10^{10} \quad 0.01 \quad 0.01 \quad 0.01 \quad 0.01 \quad 0.01\}$$

$$q = 60$$

その結果、閉ループ系の極は $-67.232, -33.597 \pm j 55.975, -21.931 \pm j 1938.1, -15823$ となり、これらからオブザーバの極は $-300, -500, -500, -4000, -4000$ に設定した。さらに、閉ループ系及びオブザーバの極を考慮してサンプリング周期 T は 0.1ms に設定した。シミュレーションにより、式(47)に示すバイアス w_k^j は w_k^5 のみ11000の一定値に設定し、ゲイン k は式(30)により求めた値の0.75倍に設定した。

5.3 シミュレーション結果

16bits固定小数点演算において、シフトモデルでは制御系が数値的に不安定になり、通常のデルタモデルでは制御アルゴリズム係数のとりうる値の範囲が 10^{10} 以上のオーダーとなり、すべての係数を表現することが不可能であった。そこで、修正デルタモデルと変数変調修正デルタモデルに関してのみ比較する。修正デルタモデルでは設計パラメータ $T_1 \sim T_6$ を調節することにより制御アルゴリズム係数のとりうる値の範囲は 10^4 のオーダーとなり、16bits固定小数での表現が可能になった。図5、図6にステップ応答を示す。なお、積分補償動作を確認するため、0.3s後に外乱としてステップ状のトルク -1Nm を定常的に加えた。修正デルタモデルだけでは演算誤差により応答が振動的になっており、V.M.M.を併用すると倍精度浮動小数点演算の結果 y に近い応答になっている。従って、V.M.M.では従来の手法より短い語長で制御アルゴリズムが実現できることがわかった。

Fig.4 Dc motor driven systems

Fig.5 Step response (modified delta model)

Fig.6 Step response (modified delta model with V.M.M.)

6. 結 言

最適制御系に関してV.M.M.の適用方法について検討し、次の結果を得た。

- (1) 状態方程式においてもシフトモデルとデルタモデルの等価性が成立することを示し、修正デルタオペレーションが可能になった。
- (2) 語長や係数の個数の制約内で制御アルゴリズムを精度良く演算するためにはオブザーバを二つの伝達関数に分離し、それぞれにV.M.M.を適用すれば良いことがわかった。
- (3) 変数変調修正デルタモデルは従来のシフトモデルやデルタモデルに比べてより短い語長で制御アルゴリズムを実現できることが明らかになった。

参 考 文 献

- 1) 青木 立, 古川 勇二, 諸貫 信行: 高速・高精度制御実現のための制御アルゴリズムに関する研究 (第1報) - 修正デルタオペレータの提案 -, 精密工学会誌, 62, 3, (1996) 398.
- 2) 青木 立, 古川 勇二: 高速・高精度制御実現のための制御アルゴリズムに関する研究 (第2報) - 変数変調デルタオペレーションの提案 -, 精密工学会誌, 63, 2, (1997) 213.
- 3) G. C. Goodwin, R H. Middleton and H. V. Poor: High-Speed Digital Signal Processing and Control, Proc. IEEE, 80, 2, (1992) 240.