ロボット逆機構学問題に関する研究 (第2報)*

— 3R 型ロボット逆機構解の多価性の解析 —

金 嘯 海** 清 水 幸 夫** 古 屋 信 幸***

Study on the Inverse Kinematics Problem of Robot (2nd Report)
- Analysis of Plurality of Inverse Kinematics Solutions of 3R Type Robot -

Xiaohai JIN, Sachio SHIMIZU and Nobuyuki FURUYA

Inverse kinematics problem is important for the robotics control tasks. However, this field of kinematics is very complicated. Generally the inverse kinematics problem appears from the fact that inverse mapping of functions which have many variables should be made. This report studied on the inverse kinematics problem of 3R robot. In the 1st report the solutions were classified by the part of the Joint space partitioned by singular space. It is sufficient to classify the solutions in the case single solution to the world point exists in the part. But if plural solutions exist it is insufficient to classify according to the partition. In this study the condition of the plural inverse kinematics solutions existence are analysed. A new analysis approach named Joint Space Cutting method is presented. In the Joint Space Cutting, many cutting sections are formed and every point of the world coordinate system intersect to the mapping image of the sections. But the mapping image of the section planes are the rotation of the image of a section mapping. So, to analyse the condition of the plurality of the inverse kinematics solution, lead us to solve the intersection point number of the curves formed by the intersection of the image surface and the plane parallel to x-y plane. The plural maps in the Joint space are also presented.

Key words: inverse kinematics, 3R robot, joint space, singular space, plural inverse kinematics solution, mapping image, joint space cutting

1. は じ め に

ロボットの逆機構学問題は順機構学問題に比べて複雑であり、一般的な構造のロボットにおいては数式による解が得られないとされている。この問題を避けるために実用化されている産業用ロボットでは関節軸が直交したり、平行であるような単純な構造を採用している。しかし、用途によってはこのような単純な構造以外に適した構造が有るようにも考えられるが数式的に逆機構解が求められない場合には数値解法に頼らざるを得ないのが現状である。問題を複雑にしている要因の一つはロボットが空間内を運動する機構で、位置の3自由度と姿勢の3自由度をすべて考えるとすれば、順機構解も逆機構解も関節軸の6次元の空間からロボット工具先端の6次元の空間への写像とその逆写像の関係になっていることであり、人間が直感的に理解するのに大きな困難が伴うためである。逆機構解が解析的に求められない場合は数値的に求める必要があるが、これは多変数関数の逆解を数値計算によって求めることを意味している。また、逆機構解は機構の特異点とも関連しており、逆機構解の性質と特異点の分類に関しても位相幾何学的な手法¹⁾やスクリュール理論に基づく研究がされている²⁾³⁾。ロボットの順機構解を関節角を変数とした数式で求めることは比較的容易であり、それらを微分することによってヤコビ行列が得られ、微小区間での関節角と作業空間内の工具先端の関係がわかる。ヤコビ行列が求められるとNewton-Raphson法などを適用することによって逆機構解を数値計算によって求めることができる。しかし、その場合でも解の個数と、初期値として与える逆解のおおよその位置がわからない場合は完全な形で漏らすこと無く求めることは不可能となる。

第1報ではヤコビ行列式(ヤコビアン)がゼロとなる空間すなわち特異空間によって関節空間を分け、分けられた空間によって逆機構解を分類する方法⁴⁾を提案した。この方法によるとロボットのヤコビ行列式がゼロとなる面と関節変数の境界によって分割された領域に解が1つしか存在しない場合には境界面の与える式の

符号によって解の分類が可能となり、逆解の初期条件をその領域内で指定することにより、漏らすことなく解をすべて求めることが可能となる。しかし、この分割された1つの領域に複数の解が存在する場合には、この方法だけでは不十分となる。3次元空間内を運動する3つの関節をもつロボットでもPUMA型のようなロボットでは、各領域に逆解が1つしか存在しないことがわかっているが、複数の解を持つ構造のロボットの存在が指摘されている⁵⁾。解が1つの場合の構造をI型、複数の場合をII型と分類している。ロボットの構造と複数の解が存在するか否かの判定に関してはまだ十分には明らかになっていない。本研究は空間内を運動する3つの回転関節を持つ3R型のロボットについて特異空間によって分割された関節空間内に複数の解が存在する条件について検討したものである。逆機構解が複数存在することは逆機構解を与える関数が多価関数となることと同じ意味と考えられるが、関節空間全体を考えた場合にはこのようなことは一般的に起こるので、ここでは単に1変数に対して多くの値をもつという意味ではなく、特異空間によって分割された関節空間の一つの中に複数の解が存在するという意味であることを断ておく。

2. 関節空間面写像の交差による逆機構解の多価性

2.1 関節空間切断法

3Rロボットの逆機構解の多価性の判定法を検討するために、まず関節空間を図1(a)に示すように根元の関節軸 θ_1 軸とその他の関節によって形成される空間に分割すると関節空間の中では θ_1 軸に直交する平面となる。根元の関節 θ_1 軸を固定して θ_2 軸と θ_3 軸を回転させると図1(b)に示すように作業空間内には一つの曲面が形成される。これは関節空間内の2次元平面が作業空間内の2次元の曲面に写像されたものと理解される。 θ_1 軸を回転させると写像された曲面は第一関節の周りを回転することになるが、 θ_1 軸の回転によっては曲面そのものの形は変化しない。また、関節空間内の点は作業空間内の点に写像されるが、写像された点は関節空間でその点を含む平面を写像した曲面に含まれている。この関係を式で表すと式(1)のようになる。

* 原稿受付 平成8年11月12日
** 学生会員 山梨大学大学院(甲府市武田4-3-11)
*** 正会員 山梨大学工学部

(a) Cutting planes of Joint space

(b) Image surface of the cutting plane

Fig.1 Cutting planes of Joint space and mapping image in the working space

(a) Plural solutions by intersection of different images

(b) Plural solutions by self-intersecting

Fig.2 Classifications of plural inverse kinematics solutions by mapping image

$$\begin{aligned} p &= f(q) \\ Q &= f(S) \\ p \in Q &\longrightarrow q \in S \end{aligned} \quad (1)$$

S : 関節空間内の切断された平面

Q : 作業空間へ写像された関節空間の像

q : 関節空間内の切断面 S 上の点

p : 作業空間へ写像された q の像

逆機構解を求めるのは式(1)の逆の操作になる。

$$q = f^{-1}(p) \quad (2)$$

多価性を調べるために関節空間を切断して調べる方法を考案し、関節空間切断法と名付けた。逆機構解が多価性を持つ場合を考えるが、問題を考えやすくするために2価の場合を想定することにする。また、対象とするのは特異空間によって分割された関節空間内の1つの領域とする。従って、その中には特異空間は存在し

ないものとする。逆機構解が2価の関数となることは作業空間内の1点が関節空間内の2点の像となっていることに相当する。この場合は図1に示すように、関節空間の断面で考えた場合、作業空間の1点の逆像の2点が異なる断面上に存在するかあるいは同一の断面上にあるかの2つの場合に限られる。異なる断面上に存在する場合は、図2(a)に示すように、関節空間でそれらの点を含む2つの断面の作業空間での像 $f(S_i)$ と $f(S_j)$ が交わることを意味する。また、同一の断面上にある場合には、図2(b)に示すようにその断面の像 $f(S_i)$ は自分自身と交わることになる。従って、逆機構解が多価となるか否かの判定はこのように分割した異なる断面の像が互いに交わるか、あるいは自分自身と交わるかを調べればよい。一般の n 自由度ロボットの場合には関節空間を1自由度の軸と $n-1$ 自由度の空間に置き換えることによって、そのまま成立すると考えられる。

2.2 多価性を有する3Rロボット

ここでは具体的な解析の対象となるロボットを示す。このロボットは図3に示すように3つの回転関節からなる構造となっている。構造の特徴を示すD-Hパラメータは表1に示す。またロボット

Fig.3 Structure of the 3R robot

Table 1 D-H parameters of the 3R robot

Joint i	θ_i	α_i	a_i	d_i	Joint range
1	0°	-90°	100 mm	0 mm	$-180^\circ - 180^\circ$
2	0°	90°	200 mm	100 mm	$-180^\circ - 180^\circ$
3	0°	0°	150 mm	0 mm	$-180^\circ - 180^\circ$

の作業空間に直交座標系を設定する。z 軸は第1関節の回転軸に一致させる。このロボットが多価性を示すことは Wenger らによって文献⁵⁾で指摘されており II 型に分類されている。しかし、多価性を有する構造上の理由については明らかにされていない。同じように3つの回転関節からなる PUMA 型ロボットでは逆機構解は1価となり、I 型に分類される。

本研究では関節空間切断法を適用することによって多価性を有する構造的特徴を解析する。一般にロボットの作業空間内には特異点と呼ばれる位置が存在している。この点はロボットのヤコビ行列がゼロとなり、この条件が成立する関節空間での領域はロボットの自由度を n とした場合、 $n-1$ 以下の自由度を持つ空間となる。つまり、この領域は3自由度ロボットでは関節空間内の曲面となり、2自由度ロボットでは曲線となる。多くのロボットでは作業空間の可動領域の境界が特異点となっている。また、ヤコビ行列式 J が素因数式の積になっている場合、関節空間は式(3)に示されるように、この素因数式の符号(+, -)によって分類することができ、各素因数式がゼロとなる領域は特異空間となる。

$$\det(J) = f_1(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k) * f_2(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k) * \dots * f_m(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k) \quad (3)$$

図3に示すように作業空間での直交座標系を設定すると順機構解は式(4)となる。この式を偏微分してヤコビ行列を求めると式(5)のようになり、3つの回転関節のとり値を -180° から 180° までとして、ヤコビ行列式(6)をゼロとおいた特異空間は図4のようになる。ここで、 S_I , S_{II} は分割された関節空間を、 C_I , C_{II} は特異境界を示す。また、 P_I , P_{II} は θ_1 軸の回転によらない不動点である。

Fig.4 Joint space partition by the singular space of the 3R robot

$$\begin{cases} x = a_3(\cos\theta_1\cos\theta_2\cos\theta_3 - \sin\theta_1\sin\theta_3) \\ \quad + a_2\cos\theta_1\cos\theta_2 - d_2\sin\theta_1 + a_1\cos\theta_1 \\ y = a_3(\sin\theta_1\cos\theta_2\cos\theta_3 + \cos\theta_1\sin\theta_3) \\ \quad + a_2\sin\theta_1\cos\theta_2 + d_2\cos\theta_1 + a_1\sin\theta_1 \\ z = -a_2(a_3\cos\theta_3 + a_2) \end{cases} \quad (4)$$

$$J = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ 0 & J_{32} & J_{33} \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$J_{11} = -a_3(\sin\theta_1\cos\theta_2\cos\theta_3 + \cos\theta_1\sin\theta_3) - a_2\sin\theta_1\cos\theta_2 - d_2\cos\theta_1 - a_1\sin\theta_1$$

$$J_{12} = -a_3\cos\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3 - a_2\cos\theta_1\sin\theta_2$$

$$J_{13} = -a_3(\cos\theta_1\cos\theta_2\sin\theta_3 + \sin\theta_1\cos\theta_3)$$

$$J_{21} = a_3(\cos\theta_1\cos\theta_2\cos\theta_3 - \sin\theta_1\sin\theta_3) + a_2\cos\theta_1\cos\theta_2 - d_2\sin\theta_1 + a_1\cos\theta_1$$

$$J_{22} = -a_3\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3 - a_2\sin\theta_1\sin\theta_2$$

$$J_{23} = -a_3(\sin\theta_1\cos\theta_2\sin\theta_3 - \cos\theta_1\cos\theta_3)$$

$$J_{32} = -\cos\theta_2(a_3\cos\theta_3 + a_2)$$

$$J_{33} = a_3\sin\theta_2\sin\theta_3$$

$$\det(J) = a_3(a_3\cos\theta_3 + a_2)(a_2\cos\theta_2\sin\theta_3 + a_1\sin\theta_3 - d_2\cos\theta_2\cos\theta_3) \quad (6)$$

ヤコビ行列式の変数の中に θ_1 軸は含まれていないので関節空間の断面平面のなかでの境界は変化しない。関節空間切断法を適用するに当たって、 $\theta_1 = -180^\circ$ に固定した断面が写像される作業空間内の曲面を示すと図5(a)のようになる。特異空間によって分割された S_I と S_{II} の像は図5(b)のように2つの曲面となっているが、特異点の集合である曲線によって分割されている。 θ_1 軸を回転するとこの2つの曲面はz軸まわりに回転し各々交わることから逆解は関節空間で S_I と S_{II} の両方に存在することがわかる。ここでは特異空間で分割された個々の領域での多価性を問題にするために S_I および S_{II} の個別の領域を問題とする。今回の対象となるロボッ

Fig.5 Mapping image of the Joint space partitioned by singular space

Fig.6 Cutting planes of Joint space by Z section

トの大きな特徴の一つとして θ_1 軸を回転しても不動点となる点が特異境界上に存在する。この点を図5では P_I と P_{II} で示した。この2つの点は第1関節の回転軸上に存在している。

3. 関節空間切断法による3Rロボット逆機構解の分析

まず、関節空間切断法を適用するにあたって、 S_I 領域に注目する。第一関節の θ_1 軸を回転することによって関節空間の切断面の像が回転して作業空間内のすべての点を覆いつくすが、逆機構解を求める作業はある作業空間内の点の x , y , z 座標が与えられたときに、その点が切断面の像の曲面のどこにあるか、また基準となる曲面を θ_1 軸に対して何度回転させたかを求めることである。 S_I 領域内で2つの解をもつ場合を考えると θ_1 軸が回転しても断面を写像した曲面の形が変化しないことから、解が存在するのは作業空間での座標 z が一致する場合に限られる。従って $f(S_I)$ の曲面と $Z=C$ との交わった曲線上に存在することがわかる。この曲線は連結した1つの曲線となる場合と分割された2つの曲線になる場合がある。これは $f(S_I)$ の曲面に穴が開いているためで

ある。図6に示すのは作業空間内で $Z=C$ の断面が関節空間内に S_I 領域での曲線(a)と S_{II} 領域での曲線(b)である。

4. 複数解が存在する条件の検討

逆機構解が複数の解をもつかどうかを判定するには作業空間内で $f(S_I)$ の曲面と $Z=C$ の平面が交差してできる曲線を θ_1 軸を中心に回転したときに重なる部分が存在するか否かで判定される。この曲線のことをここでは切断曲線と呼ぶ。切断曲線は2つに分割される場合(図7(a))と1つの連結した曲線となる場合(図7(b))がある。ここで、回転の中心から曲線上の点までの距離を r で表し、曲線上で r が最小、最大となる値をそれぞれ $r_{\min}$ と $r_{\max}$ で表す。また、単一の曲線の場合と2つに別れた場合ではそれぞれ添え字1, 2で区別する。このとき、曲線は、自分自身と交わる可能性と相手に交わる可能性が共にある。しかし、今まで研究されているロボットには、自分自身と交わる可能性がないと判断し(図2(b)を参考する)、ここでは相手に交わる場合の条件について検討する。まず、 $r_{\max}$ と $r_{\min}$ が1つ以上曲線の内部に入れば、単

Fig.7 Intersecting curves of the image of Joint space mapping of S_I and Z section

Fig.8 Maps of inverse kinematic solution number

一曲线もしくは2つに別れた曲线が相手と交わる。また、二つに別れた曲线の場合では、 $r_{\max 2-1} > r_{\max 2-2}$ で、 $r_{\max 2-1}$ と $r_{\min 2-1}$ の間に $r_{\max 2-2}$ 、 $r_{\min 2-2}$ が1つ以上入れば、相手と交わる。図7に示すのは作業空間内での $Z=0$ の断面での切断曲線(a)と $Z=2.5$ での切断曲線(b)である。(a)の場合は曲線は2つに分割されているが、(b)の場合には1つになっている。関節領域 S_{II} に関しても同様な結果が得られる。図8は交わる条件を満たす領域を関節空間内の S_I 領域と S_{II} 領域で求めた結果である。(I)と記した領域で1価、U、V、W、U'、V'、W'と記した領域で逆機構解の数は2価となっている。

5. 結 言

3つの回転関節をもつ3Rロボットに関して特異空間によって分割された1つの関節空間内に複数の逆機構解をもつ条件の解析をおこなった。関節空間を1自由度と2自由度の空間の直積に分割して調べる関節空間切断法を考案して、複数の解を持つ条件を明らかにした。本研究で解析の対象とした3Rロボットの形式では、関節空間の断面の平面を作業空間内へ写像してできる曲面が残りの1自由度の θ_1 軸の回転によって重なりが生ずる部分で複数

(2つ)の解をもつことが明らかになった。なお、この条件を機構の特徴を表すパラメータ(例えばD-Hパラメータ)に置き換えることも可能で、多価性を有するロボットの特徴をパラメータで表すこともできる。

参 考 文 献

- 1) D.K.Pai and M.C.Leu: Generic Singularities of Robot Manipulators, Proc.IEEE Int. Robotics and Autom.,(1989) 738.
- 2) J.W.Burdick: Aclassification of 3R Regional Manipulator Singularities and Geometries, Proc IEEE Int. Robotics and Autom., (1991) 2670.
- 3) 杉本浩一：機構の特異点に関する考察, 日本ロボット学会誌, 11, 4 (1993) 550.
- 4) 金 嘯海, 古屋信幸, 遠山茂樹：ロボット逆機構学問題に関する研究(第1報)ー逆解の分類指標と逆解数の解明ー, 精密工学会誌, 60, 12 (1994) 1751.
- 5) Ph.Wenger: A New General Formalism for the Kinematic Analysis of All Nonredundant Manipulators, Proc. IEEE Int.Robotics and Autom., (1992) 442.