櫛歯状マイクロ振動子における連成振動の解析*

大澤孝夫** 阿部浩士*** 保坂 寛† 桑野博喜†† 板生 清†††

Theoretical and Experimental Analysis of Coupled Vibration of Microcantilever Array

Takao OHSAWA, Hiroshi ABE, Hiroshi HOSAKA, Hiroki KUWANO and Kiyoshi ITAO

The coupled vibration of microcantilevers induced by the airflow is analyzed to develop high-speed information and sensing devices that use microactuator arrays. The conclusions are as follows: (1) Simple formulas that give the vibration coupling amplitude and damping ratio are derived by relapsing the cantilevers with strings of spheres, combining the airflow force of spheres with an ordinary beam equation. (2) By using the formulas, the coupling amplitude is found to increase as the beam size, beam gap, and internal friction decrease, and the damping ratio is found to increase as the beam becomes smaller. (3) The validity of theory is verified with actual size and enlarged model experiments.

Key words : microactuator, microcantilever, vibration, damping ratio

1. は じ め に

近年、ポイント磁気記録デバイス、マイクロリレー、走査型プローブ顕微鏡等、マイクロアクチュエータを用いた情報・センシング機器が各種開発されている。これらの機器では、信号の入力・処理にはりの運動を用いているため、その速度や感度は、はりの振動特性に支配される。また、共振周波数以上でのサンプリングが不可能なため、メモリやセンサの高速化には、振動子のアレー化による並列処理が必要となっている。

一般に機械システムをマイクロ化すると、運動の支配要因は、マクロ領域のものと異なり、空気抵抗が卓越してくる。すると、はりの振動減衰や、はり間の振動連成が増加し、機器の応答速度や感度の低下、誤作動やクロストーク増加の原因となる。したがって、情報・センシング機器の高性能化には、アレー状マイクロ振動子の振動減衰や振動連成の解明が必要である。

このような背景のもとに、著者らはまず、Kokubunら¹⁾のビーズモデルをもとに、振動微小はりにおける空気抵抗の理論式を導出し、これと支持部減衰の理論解、内部摩擦の実験値を組み合わせ、単一はりにおける振動減衰の近似式を導出した²⁾。ついで、長さ100 μ m～10cmの単一はりの振動減衰を測定し、理論の妥当性を検証し³⁾、マイクロ領域では、空気抵抗が振動減衰の主要因となることを示した。

本報では以上を発展させ、最も単純な櫛歯である2本のはりにおける振動連成を解明する。まず前報²⁾のビーズモデルを改良し、球間の流れの連成を考慮した空気抵抗の計算式を導出して、これとはりの運動方程式を組み合わせ、はりの振動連成と減衰比を求める計算法を提案する。次にシミュレーションにより、振動連成とはり寸法、はり間距離の関係を求めるとともに、実験により理論の妥当性を検証する。

2. 流体力を考慮したはりの運動方程式

2.1 基礎式の導出

本研究では、図1に示す2本のはりからなる櫛歯を考える。各はりは、圧電等により独立に厚さ方向の外力を加えられるものとする。座標軸は、一方のはりの根元を原点とし、長手方向をx軸、幅方向をy軸、厚さ方向をz軸とする。以下では本モデルに対して、周囲空気流を考慮したはりの運動方程式を導く。

微小はりの周囲空気流は、線形化したナビエ・ストークス方程式と連続の式で与えられる²⁾。

$$\nabla p = -\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mu \Delta \mathbf{v}, \quad \nabla \mathbf{v} = 0 \quad (1)$$

ここで、 p , $\mathbf{v}$, μ , ρ は、空気の流れ、流速、粘性係数、密度であり、また境界条件は、無限遠で圧力と流速がゼロ、はり表面で流速がはり速度に一致である。

以上の式は、長方形断面のはりでは計算が困難なため、解析解が得られる単一球の周囲流を用いて近似解を求める。図2のように、はりを球の連鎖(ビーズ)で置き換え、球の直径は、元のはりとレイノルズ数および振動レイノルズ数が一致するように、はりの幅に等しくとる²⁾。はり1の根元の球が1番、はり2の先端の球が最終番(n)となるように球に番号をつける。

Fig.1 Twin-cantilever

* 原稿受付 平成8年12月25日

** 正 会 員 中央大学大学院(現、ソニー(株);東京都品川区北品川5-9-12)

*** 学生会員 中央大学大学院(東京都文京区春日1-13-27)

† 正 会 員 日本電信電話(株)入出力システム研究所(現、東京大学大学院工学系研究科;東京都文京区本郷7-3-1)

†† 正 会 員 日本電信電話(株)入出力システム研究所(武蔵野市緑町3-9-11)

††† 正 会 員 東京大学大学院工学系研究科

空間に球 j (半径 R) のみが存在し、角振動数 ω 、速度振幅 u_0 で z 方向に速度 $u = u_0 \exp(-i\omega t)$ で微小振動する場合、 $z=0$ の平面内で球 j の中心から r_{ij} 離れた点 i の z 方向の流速 u_{ij} は次式で与えられる。

$$u_{ij} = \left[\left\{ \left(\frac{1}{r_{ij}} + \frac{\delta}{2r_{ij}^2} \right) + \left(\frac{\delta}{2r_{ij}^2} + \frac{\delta^2}{2r_{ij}^3} \right) i \right\} \frac{3R}{2} e^{\frac{r_{ij}-R}{\delta}(-1+i)} + \frac{\alpha}{r_{ij}^3} \right] u \quad (2)$$

$$\delta = \sqrt{\frac{2\mu}{\rho\omega}}, \quad \alpha = -\frac{R^3}{2} \left(1 + \frac{3\delta}{2R} \right) - i \frac{R^3}{2} \left(\frac{3\delta}{2R} + \frac{3\delta^2}{2R^2} \right)$$

ここで i は虚数単位を表す。球 j に加わる流体力 q_j は z 方向に働き、次式で与えられる⁴⁾。

$$q_j = -6\pi\mu R u \left\{ (1 + R/\delta) - i(1 + 2R/9\delta) R/\delta \right\} \quad (3)$$

式(2), (3)から u を消去すると次式を得る。

$$u_{ij} = d_{ij} q_j \quad (4)$$

$$d_{ij} = \frac{\alpha_1 \left(\frac{1}{r_{ij}} + \frac{\gamma}{r_{ij}^2} + \frac{\gamma^2}{r_{ij}^3} \right) e^{-\frac{r_{ij}}{\gamma}} + \frac{\alpha_4}{r_{ij}^3}}{-6\pi\mu R \left\{ (1 + R/\delta) - i(1 + 2R/9\delta) R/\delta \right\}}$$

$$\gamma = \frac{1+i}{2}\delta, \quad \alpha_1 = \frac{3R}{2} e^{\frac{R}{\gamma}}, \quad \alpha_4 = -\frac{R^3}{2} \left(1 + \frac{3\gamma}{R} + \frac{3\gamma^2}{R^2} \right)$$

上式は、流体中の球表面位置に力 q_j を加えると、 r_{ij} 離れた点 i に u_{ij} なる流速が発生することを示す。

次に、球連鎖に対する式(1)の解を、 u_{ij} の和で近似することを考える。

$$u_i = \sum_{j=1}^n u_{ij} = \sum_{j=1}^n d_{ij} q_j \quad (5)$$

ここで u_i は点 i の流速である。球連鎖における流体力は未知であるから、式(5)の q_j は未知である。式(1)が線形であり、 u_{ij} が式(1)を満足するから、任意の q_j に対し、 u_i も式(1)を満足する。また、無限遠で $u_{ij}=0$ であるから、 u_i は無限遠の境界条件 ($u_i=0$) も満足する。

一方、球表面の境界条件 (u_i =球速度) は、 q_j を適当に定めることにより、これを近似的に満足させることが出来る。厳密な境界条件は、球表面の至るところで流速=球速度であるが、式(5)の q_j を調整しても、 n 個の点でしか成立しない。これは球連鎖の周囲流を、有限個の既知関数 u_{ij} の和で近似したために生じた制約である。そこで境界条件は、球 1 個につき 1 点で満足させることを考える。元来の解析目的が、はりの周囲流を求めることにあるから、境界条件を満足する点としては、はりの境界に一致する点を採用した方が有利と考えられる。球表面でこれを満足する点は、 $z=0$ の円周上である。以下では、このうち比較的計算が容易な、はりの中心軸に対応する球の接点 (以下、接点境界と呼ぶ) と、はりのエッジに対応する球側面の点 (側面境界と呼ぶ) を採用する。両者の差異は次章以下で述べる。

球表面での境界条件は、式(5)の流速 u_i をはりの速度 $\dot{w}_i$ で置き換えた式で与えられる。ここで、 w_i は点 i におけるはりの z 方向変位である。また、接点境界に対しては、点 i を球 i と $i+1$ の接点位置とし、側面境界に対しては、点 i を球 i の側面位置として、すべての球 i に対して式(5)を立てると次式を得る。

$$\{\dot{w}\} = [D]\{Q\} \quad (6)$$

Fig.2 Beads model

ここで $\{\dot{w}\}, [D], \{Q\}$ は、 $\dot{w}_i, d_{ij}, q_j$ を並べたベクトルまたは行列である。上式は、点 i におけるはり速度と、点 j ではりに加わる流体力の関係式になっている。

次に、はりの運動方程式を多自由度表現し、これに式(6)の流体力 $\{Q\}$ を外力として組み合わせると、次式を得る。

$$\begin{cases} [M_1]\{\ddot{w}_1\} + [C_{11}]\{\dot{w}_1\} + [C_{12}]\{\dot{w}_2\} + [K_1]\{w_1\} = \{F_1\} \\ [M_2]\{\ddot{w}_2\} + [C_{21}]\{\dot{w}_1\} + [C_{22}]\{\dot{w}_2\} + [K_2]\{w_2\} = \{F_2\} \end{cases} \quad (7)$$

ここで、上段、下段はそれぞれはり 1, 2 に対する方程式であり、 $\{w_i\}, \{F_i\}$ は、はり i の変位、加振力を並べたベクトル、 $[M_i], [K_i]$ は、はり i の質量、剛性行列である。また、 $[C_{ij}]$ は流体力を表す行列であり、次式で与えられる。

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} = -[D]^{-1} \quad (8)$$

式(7)から、流体力は速度に比例する粘性抵抗として作用し、さらに、 $[C_{12}]=[C_{21}]=0$ なら上下の式は完全に分離するから、 $[C_{12}]$ と $[C_{21}]$ によって連成が生じることが分かる。式(8)を解けば、一般のはりに対する振動連成特性を求めることができる。また、上式を多数のはりに対して立てれば、一般の楕円状振動子にも適用できる。

2.2 同一形状はりの振動連成の計算式

はり形状と加振周波数が特殊な場合には、式(7)を簡略化できる。まず、2 本のはりが同一形状で、加振周波数がはりの固有振動数に一致する場合を扱う。加振力は、はり 1 に加えるものとする。このとき式(7)の係数行列は次式の関係を満たす。

$$\begin{cases} [M_1]=[M_2], [K_1]=[K_2], [C_{11}]=[C_{22}], [C_{12}]=[C_{21}] \\ \{F_1\}=e^{-i\omega t}\{F\}, \{F_2\}=\{0\} \end{cases} \quad (9)$$

さらに、共振点での振動モードは無減衰の固有モード $\{\phi\}$ にほぼ一致するから、 z_1, z_2 を適当な複素数として、 $\{w_1\}, \{w_2\}$ は以下で近似できる。

$$\{w_1\}=z_1 e^{-i\omega t}\{\phi\}, \{w_2\}=z_2 e^{-i\omega t}\{\phi\} \quad (10)$$

式(7)に式(9), (10)を代入し、左から $\{\phi\}^T$ をかけると、 z_1, z_2 が求まる。

$$z_1 = c_{11} f / i\omega (c_{11}^2 - c_{12}^2), \quad z_2 = -c_{12} f / i\omega (c_{11}^2 - c_{12}^2) \quad (11)$$

ここで、 $f = \{\phi\}^T \{F\}$, $c_{11} = \{\phi\}^T [C_{11}] \{\phi\}$, $c_{12} = \{\phi\}^T [C_{12}] \{\phi\}$ であり、 $\{\phi\}^T [K_1] \{\phi\} = \omega^2 \{\phi\}^T [M_1] \{\phi\}$ を用いている。上式から、振幅比 z

は次式となる。

$$Z = z_2/z_1 = -c_{12}/c_{11} \quad (12)$$

Z は一般に複素数であり、絶対値が振幅比を、偏角が位相ずれを表す。

2.3 構造減衰が作用する場合の振動連成

2本のはりが同一形状の場合は、流体力の他に構造減衰が作用する場合も容易に計算できる。構造減衰は、はりの剛性に比例する減衰であり、式(7)にこれを取り入れると次式となる。

$$\begin{cases} [M_1]\{\ddot{W}_1\} + [C_{11}]\{\dot{W}_1\} + [C_{12}]\{\dot{W}_2\} + \frac{\eta}{\omega}[K_1]\{\dot{W}_1\} + [K_1]\{W_1\} = \{F_1\} \\ [M_2]\{\ddot{W}_2\} + [C_{21}]\{\dot{W}_1\} + [C_{22}]\{\dot{W}_2\} + \frac{\eta}{\omega}[K_2]\{\dot{W}_2\} + [K_2]\{W_2\} = \{F_2\} \end{cases} \quad (13)$$

ここで η は、はり材料の構造減衰係数である。上式に対して2.2節と同様の操作を行うと、次式を得る。

$$Z = -c_{12}/(c_{11} + \eta m \omega), \quad m = \{\phi\}^T [M_1] \{\phi\} \quad (14)$$

2.4 1本のはりにおける減衰比の近似計算式

はりが1本で、振動モードが低次の場合には、減衰比を簡便な式で表すことができる。まず次章で述べるように、球からの距離が R より離れると、単一球の流速は十分に小さくなり、 i と j が離れているとき、 $d_{ij} \approx 0$ と見なすことができる。すなわち、式(5)の級数は、接点境界条件の場合は、隣接する2つの球($j=i, i+1$ の項)のみが寄与し、側面境界条件の場合は、隣接する3つの球($j=i-1, i, i+1$ の項)のみが寄与するとみなせる。次に低次モードでは流体力の変化は緩やかで、 $q_{j-1} \approx q_j \approx q_{j+1}$ とみなせる。さらに、 d_{ij} は $i-j$ だけで決まることに注意し、

$$\begin{cases} 1/c_0 = d_{11} + d_{12} = 2d_{11} & (\text{接点境界}) \\ 1/c_0 = d_{10} + d_{11} + d_{12} = d_{11} + 2d_{12} & (\text{側面境界}) \end{cases} \quad (15)$$

とおけば、次式を得る。

$$q_i \approx -c_0 u_i \quad (16)$$

上式で $u_i = \dot{w}_i$ とおき、式(7)の第1の式に代入して、さらに2.2節と同様の操作を行えば、次式を得る。

$$m\ddot{w} + c\dot{w} + kw = f \quad (17)$$

ここで、 $c = \{\phi\}^T \{c_0\}$ 、 $k = \{\phi\}^T [K_1] \{\phi\}$ 、 $\{W_1\} = w\{\phi\}$ である。上式より、減衰比は次式で与えられる。

$$\zeta = \text{Re}[c]/2m\omega = \text{Re}[c_0]L/2M\omega b \quad (18)$$

ここで、 c, c_0 は実部のみが考慮される。これは、式(16)において、実部は速度比例力を、虚部は加速度 ω 比例力を表すため、減衰力となるのは実部だけのためである。なお、接点境界条件のときは、上記減衰比は、前報²⁾で求めた球間の流れの連成を無視した減衰比の1/2になる。連成を無視すると、流体力は式(5)の級数の $i=j$ の項のみ考慮したものとなるためである。

3. 1本のはりの周囲流と減衰比

式(2)により、単一球を空气中で振動させた場合の流速分布を図3～5に示す。計算には、はりの長さを L として、それぞれ長さ $1\mu\text{m}$ 、 $100\mu\text{m}$ 、 10mm の場合について、 $2R=b=L/10$ 、 $H=L/100$ のはり形状を持つシリコン片持ちはりの固有振動数(1次モード)を用いた。シリコンの物性値は、密度 2300kg/m^3 、ヤング率 155GPa を使用した。横軸は、はりの幅方向位置 y をはりの幅 b (=球の直径)で割った無次元距離であり、球の中心を原点にとっている。縦軸は、球の運動を $u_0 \exp(-i\omega t)$ とし、流速と球の速度の比(無次元速度)を示している。はり速度が複素表示の

Fig.3 Relationship between beam distance and normalized airflow velocity ($2R=0.1\mu\text{m}$, $\omega=83.3 \times 10^6 \text{ rad/s}$)

Fig.4 Relationship between beam distance and normalized airflow velocity ($2R=10\mu\text{m}$, $\omega=83.3 \times 10^4 \text{ rad/s}$)

Fig.5 Relationship between beam distance and normalized airflow velocity ($2R=1\text{mm}$, $\omega=83.3 \times 10^2 \text{ rad/s}$)

ため、無次元速度も複素数であり、図に実部、虚部、絶対値を示す。

無次元流速の絶対値は、無次元距離の増加により急速に減少し、 $L=100\mu\text{m}$ 、 10mm では、球(はり)からある程度以上離れると、実部、虚部が負となり、位相が逆転している。またはりが小さいほど流速の減少は小さくなっている。以上から、楕円状振動子では、ピッチとはり長さの比が一定であれば、はりが小さいほど振動連成が大きく、またピッチがある間隔では、逆方向に振動したり、ピークが生じる可能性があるといえる。

図6に、式(18)によりシリコン片持ちはりの減衰比を求めた結果を示す。横軸は、はり長さであり、はり形状は前記と同じ相似形としている。点線は接点境界条件の場合を、実線は側面境界条件の場合を示すが、両者の差は小さい。寸法が小さくなるに従い減衰比が増加し、長さ 1mm 以下のはりでは、減衰比は

Fig.6 Relationship between beam length and damping ratio of Silicon cantilever

Silicon cantilever shape (unit: μm)								
No.	1	2	3	4	5	6	7	8
L	100	100	100	100	200	200	200	200
b	20	40	20	40	20	40	20	40
H	0.4	0.4	0.8	0.8	0.4	0.4	0.8	0.8

Fig.7 Comparison between experimental and calculated damping ratio of Silicon cantilevers

ほぼ 10^{-3} 以上となっている。シリコンはりの場合、内部摩擦や支持部損失は 10^{-6} オーダであるため²⁾、マイクロ領域の減衰比はほぼ空気抵抗だけで決まると言える。

シリコン片持りはりにおける減衰比を、実験値³⁾と比較したものを図7に示す。境界条件は、接点境界条件を用いている。横軸は計算値、縦軸は実験値であり、45°の直線は両者の一致を示す。プロットは45°の直線近傍に分布している。前報²⁾で得た、連成を無視した計算では、実験値と計算値の一致は図中の破線になる。プロットは破線の下方にあり、計算値は実験値より高めで、今回の結果より誤差が大きくなっている。以上により、流れの連成を考慮した式(18)により、マイクロ領域の減衰比を精度よく評価できることが確認できた。

Fig.8 Experimental apparatus for coupled vibration

Fig.9 Relationship between beam distance and amplitude ratio ($\nu = 5.0 \times 10^{-3} \text{ m}^2/\text{s}$, $L = 100 \text{ mm}$, $La = 308 \mu\text{m}$)

4. 2本のはりの振動連成

4.1 実験装置

2.2節の理論式を検証するため、はりの振動連成を測定する実験装置を製作した。マイクロサイズのはりでは、はり間隔等を変化させて加振することが困難なため、拡大モデルを用いた。ただし単純に系を拡大すると、式(1)の前提である、レイノルズ数 $\ll 1$ の条件が成り立たなくなる。そこで、力学的相似が成り立つように、周囲流体の粘性と密度を変化させた。幾何的に相似な2つの系があるとき、両方でレイノルズ数が一致すれば力学的相似が成り立つ。振動はりにおけるレイノルズ数は次式で与えられる²⁾。

$$Re = ab\omega\rho/\mu \quad (19)$$

ここで a は、はり先端の振動振幅である。はり形状が相似なとき ω は、はり長さに反比例する。従って、 a/L が一定のとき $L\rho\mu$ が一定であれば力学的相似が成り立つ。

以上の考察に基づき、図8の実験装置を製作した。2本の片持りはりは、ともに $L=100 \text{ mm}$, $b=L/100$, $H=0.3L/100$ で、材質はプラスチックである。両はりは、微動ステージに固定され、すきまを自由に換えられるようになっている。一方のはりの先端には微小な永久磁石が固定され、外部の電磁石により加振される(加振はりと呼ぶ)。他方のはりは、加振はりからの流体力を受けて振動する(連成はりと呼ぶ)。両はりの根元にはひずみゲージが固定されており、周囲流体には動粘度が $5.0 \times 10^{-3} \text{ m}^2/\text{s}$ のシリコンオイルを用いている。実験に用いたはり長さ $L=100 \text{ mm}$ を空気中での値に換算すると $La=308 \mu\text{m}$ に相当する。

Fig.10 Relationship between beam distance and amplitude ratio
(Silicon $\omega=83.3/L$ rad/s, Permalloy $\omega=49.6/L$ rad/s)

4.2 振幅比の計算値と実験値

加振はりと連成はりの振幅比の絶対値を求め、実験値と計算値を比較したものを図 9 に示す。横軸は、はりの中心軸間距離をはり幅で割った無次元すきまである。計算では、接点境界条件（点線）と側面境界条件（実線）の両者を示しているが、後者の方がより実験値に近い。この傾向は、はり間隔が狭いときに顕著である。これは、はり間の空気流は、はり中心軸の速度よりも、対向するエッジの速度に支配されるためと考えられる。

図 10 に、シリコンはりとパーマロイ (Ni-Fe) はりについて、振幅比とはり長さ・はり間隔の関係を計算したものを示す。パーマロイは材料の内部摩擦が大きく、 $\eta=10^{-3}$ オーダの構造減衰係数を有するため、式 (14) を用いて振幅比を計算している。また境界条件は、側面境界条件を用いている。両振動子とも、はりが小さいほど、振動連成は大きい。これは、3 章で述べたように周囲流がはり寸法との比較距離において、はりが小さいほどより遠方まで達するためである。はり寸法が大きくなると、パーマロイの方が連成が小さいが、これは、パーマロイの内部摩擦が大きいため、式 (14) の分母第 2 項が大きいためである。

実際の振動子の設計に適用出来るように、シリコンとパーマロイ振動子に対して、等振幅比線を計算したものを図 11, 12 に示す。横軸は、はり長さ L 、縦軸は無次元はり間隔であり、 $b=L/10$, $H=L/100$ としている。これらの図から、設計条件として振幅比とはり長さが与えられたときに、はり間隔をどの程度とればよいか分かる。

5. ま と め

マイクロ振動子を用いた情報・センシング機器の高速化、高感度化を目的に、2 本の微小はりにおける、減衰と振動連成を解析した。はりを球の集合で置き換え、単一球の周囲流を重ね合わせてはりの空気抵抗を求め、はり寸法が等しい場合の振幅比、構造減衰を考慮した振幅比、1 本のはりの減衰比を簡便に求める式を導出した。また実験により理論の妥当性を示した。主な結論を以下に示す。

(1) 導出した理論式によれば、1 本のはりの減衰比は、はりが

Fig.11 Equi-amplitude map for Silicon cantilever

Fig.12 Equi-amplitude map for Permalloy cantilever

小さいほど大きく、これは前報の実験値（シリコンはり）とよく一致する。

- (2) 導出した理論式によれば、2 本のはりにおける振動連成ははり寸法、はり間隔、内部摩擦が小さいほど大きく、これは拡大実験による結果とよく一致する。
- (3) 以上の成果を実際の振動子の設計に適用できるように、シリコンおよびパーマロイはりの振動連成抑圧条件を簡便に求める図を作成した。

参 考 文 献

- 1) H. Kokubun, H. Murakami, Y. Tosa and M. Ono : A Bending and Stretching Mode Crystal Oscillator as a Friction Vacuum Gauge, *Vacuum*, 34, (1984) 731.
- 2) 保坂 寛, 板生 清 : 振動減衰のマイクロダイナミクス, 精密工学会誌, 60, 2 (1994) 225.
- 3) 黒田 進, 保坂 寛, 島津 聡, 板生 清 : マイクロカントレバーの振動減衰に関する研究, 精密工学会誌, 62, 5 (1996) 742.
- 4) ランダウ, リフシッツ : 流体力学 1, 東京図書, (1970) 102.