公差が指示された組立品の配位空間を用いた 位置姿勢の曖昧さの解析*

乾 正 知** 金 田 光 広***

Configuration Space Based Analysis of Position Uncertainties of
Toleranced Parts in an Assembly

Masatomo INUI and Mitsuhiro KANEDA

A new method for analyzing position uncertainties of two parts in an assembly is proposed if certain shape deviations of individual parts are allowed by tolerances. Assembling of a mechanical product is usually achieved by mating some face pairs of the component parts. Realization of the proper surface contact is important for precisely achieving the machine function. Based on this concept, the authors derive three necessary conditions on the configuration of two non-nominal parts in an assembly, which are non-penetration condition, contacting condition of mating faces, and optimization condition concerning their assembling method. Proposed method achieves the tolerance analysis by computing a variation bound of the configuration of two toleranced parts if some non-nominal parts allowed by tolerances satisfy the necessary conditions. Since rotations are linearized by assuming small positional variations, the conditions can be described by a set of linear inequalities on configuration parameters of the parts. The variation bound thus becomes a union of some polytopes in the configuration space. An experimental program for computing the variation bound is implemented and demonstrated.

Key words: tolerance analysis, configuration space, tolerance modeling

1. は じ め に

機械部品の形状には、加工に起因する誤差が必ず含まれている。形状誤差は、製品の挙動に望ましくない影響を与える。そこで設計者は、公差を用いて個々の部品の許容できる誤差の範囲を指定し、挙動の変動を管理する。公差方式には、寸法値の許容範囲を指示する寸法公差と、許容できる誤差の範囲を表す幾何的な領域（＝公差域）を指示する幾何公差の二つがあるが、ここではより精密な誤差管理が可能な幾何公差のみを考える。厳しい公差を指定すれば、機能のより正確な実現が可能となるが、部品の加工が困難になり製造コストが上昇してしまう。現状では、過去の設計事例や経験的な知識を参考に試行錯誤を繰り返し、機能的にも経済的にも妥当な公差を決定していることが多い。

このような公差設計を支援するために、公差に起因する挙動の変動を計算機を用いて評価する、公差解析とよばれる技術が研究されている。特に本論文では、公差が指示された組立品における、部品間の相対的な位置姿勢の曖昧さの解析を考える。Turnerらは、公差をともなう部品の位置決めを、最適化問題として定式化し解く手法を提案している^{8) 10)}。この手法では、立体モデルの面の微小移動により形状誤差を表現するので、いわゆる形状偏差の影響が評価できない。Flemingは、公差が指示された2部品が、安定した組付け状態を保ちつつ実現できる最も極端な位置姿勢を、幾つかの典型的な部品の組合せについて解析し、それを不等式制約として評価する手法を提案している¹⁾。

われわれは、従来の手法とは異なり、解析可能な部品形状や誤差のタイプを制限しない、新しい公差解析手法を開発した^{2) 3)}。この手法では、公差域が指示された2個の部品モデルの組立てと、公差域が許容する誤差を含む実部品モデルの組立てを考える。公差域が指示された側の部品モデルを動かすと、モデルに付随する公差域

が移動するので、許容誤差を含む実部品モデルの位置姿勢も変化する。機械製品の組立て作業は、対偶を介して部品を接続する作業と見なせる。そこで実部品モデルが適切な対偶関係を実現するように、公差域が指示された側の部品モデルを位置決めすることを考える。

公差域は多様な誤差を許容する。したがって実部品モデルの誤差の状態に応じて、公差域をともなう部品モデルの位置決めされた状態も変化する。われわれの手法は、この変化の範囲を算出することで、公差が許容する組立品の位置姿勢の曖昧さを解析する。多くの機械製品の組立ては、部品や部分組立品の逐次的な組付け作業に分解できる。組み付けられた2部品の相対的な位置姿勢の曖昧さが解析できれば、逐次的な組付けプロセスを表すグラフ構造に基づいて解析結果を伝播させることで、3個以上の部品からなる組立品も解析できる¹⁾。

論文2) 3)に報告した手法は、離散的に表現された配位空間を用いて解析をおこなうため、処理時間と必要な記憶容量に問題があった。公差に起因する位置姿勢の変動は、ごく微小と考えられる。この性質を利用して、組立てられた二つの多面体部品の相対的な位置姿勢の変動範囲を高速に算出するアルゴリズムを開発したので報告する。2章では幾つかの数学的準備をおこなう。次に3章でわれわれの公差解析理論を簡単に紹介した後、4章で開発した公差解析アルゴリズムを説明する。最後に5章で、本手法を用いて解析をおこなった例を紹介する。

2. 準 備

議論を進めるために必要な定義を示す。

2.1 微小変位ベクトル

組立てられた2個の理想的な形状の部品モデル $\mathcal{M}_n$ と $\mathcal{B}_n$ を考える。 $\mathcal{M}_n$ と $\mathcal{B}_n$ のそれぞれに、その位置姿勢を代表する座標系 $\mathcal{F}_{\mathcal{M}_n}$ と $\mathcal{F}_{\mathcal{B}_n}$ を与える。すると、 $\mathcal{M}_n$ と $\mathcal{B}_n$ の相対的な位置姿勢（＝配位）は、座標系 $\mathcal{F}_{\mathcal{B}_n}$ における $\mathcal{F}_{\mathcal{M}_n}$ の位置を表す6個のパラメータ $\mathbf{q}_n = [x, y, z, \theta_x, \theta_y, \theta_z]$ により表現できる。 $\mathbf{q}_n$ は、無誤差の部品を組立てた場合の理想的な配位を表す。これは機

* 原稿受付 平成9年1月29日

** 正 会 員 茨城大学工学部（日立市中成沢町4-12-1）

*** 学生会員 茨城大学工学部

Fig. 1 Section views of assembled non-nominal solids $\mathcal{M}$ and $\mathcal{B}$, and their corresponding nominal solids $\mathcal{M}_n$ and $\mathcal{B}_n$

械図面などから容易に読みとれる。

形状誤差を持つ実部品のモデル $\mathcal{M}$ と $\mathcal{B}$ は、 $\mathcal{M}_n$ と $\mathcal{B}_n$ の表面に微小な凹凸が生じたものと見なせる。以後 $\mathcal{M}_n$ と $\mathcal{B}_n$ を理想立体、 $\mathcal{M}$ と $\mathcal{B}$ を実立体とよぶ（図 1 参照）。定義から、理想立体 $\mathcal{M}_n$ と $\mathcal{B}_n$ の配位と、実立体 $\mathcal{M}$ と $\mathcal{B}$ の配位は常に一致する。 $\mathcal{M}$ と $\mathcal{B}$ を組立てたとき、その配位 $\mathbf{q}$ は形状誤差の影響で、理想的な配位 $\mathbf{q}_n$ から微小量ずれている。そこで微小な変位を表すベクトル $\delta\mathbf{q} = [\delta x, \delta y, \delta z, \delta\theta_x, \delta\theta_y, \delta\theta_z]$ を導入し、組立てられた実立体の配位を $\mathbf{q} = \mathbf{q}_n + \delta\mathbf{q}$ と表すことにする。以下の議論では、理想的な配位から $\delta\mathbf{q}$ 変位した立体 $\mathcal{S}$ を $\mathcal{S}(\delta\mathbf{q})$ と書く。

2.2 面の公差モデル

幾何公差は、許容誤差の範囲を表す空間的な領域を、データムや理想的な形状に基づいて定義し誤差を管理する⁴⁾。Requicha は、立体モデリングの手法を用いて、幾何公差をより一般的な形で定式化した⁷⁾。本論文では、この研究に基づいて、部品表面の公差モデルを以下のように定義する。

理想立体 $\mathcal{M}_n$ の表面 $\partial\mathcal{M}_n$ を、幾つかの理想的な形状の曲面要素（これを理想曲面とよぶ） $F_{\mathcal{M}_i}$ に分割する。ただし $\bigcup_i F_{\mathcal{M}_i} = \partial\mathcal{M}_n$ を満たすものとする。そして各理想曲面 $F_{\mathcal{M}_i}$ に、以下の条件を満足する面の公差域 $T(F_{\mathcal{M}_i})$ を定義する：

- (1) 面の公差域 $T(F_{\mathcal{M}_i})$ の位置姿勢は、 $\mathcal{M}_n$ の座標系に固定されている。
- (2) 理想曲面は対応する面の公差域に含まれる。すなわち $F_{\mathcal{M}_i} \subseteq T(F_{\mathcal{M}_i})$ が成り立つ。
- (3) 面の公差域は有界である。現行の幾何公差方式では、多くの公差域は無限の広さをもつ。本研究では、論文 1) に基づいて、無駄な領域を削除した有界な公差域を考える。

$\mathcal{B}_n$ の理想曲面 $F_{\mathcal{B}_j}$ にも、同様の手順で公差域 $T(F_{\mathcal{B}_j})$ を定義する。

次に実立体 $\mathcal{M}$ の表面を、以下の条件を満たす曲面要素（これを実曲面とよぶ） $G_{\mathcal{M}_i}$ の集合へ分割する。

- (1) $\bigcup_i G_{\mathcal{M}_i} = \partial\mathcal{M}$ 。
- (2) 理想曲面 $F_{\mathcal{M}_i}$ と実曲面 $G_{\mathcal{M}_i}$ の間に、1 対 1 の対応付けが可能。

$\mathcal{B}$ の表面も同様の手順で分割し実曲面 $G_{\mathcal{B}_j}$ を得る。そして実曲面が、対応する理想曲面に付随する公差域に包含されるとき、その実曲面は公差を満たすと判定する。したがって実曲面 $G_{\mathcal{M}_i}$ や $G_{\mathcal{B}_j}$ は、以下の条件を満足する必要がある（図 2 参照）。

$$\begin{aligned} G_{\mathcal{M}_i} &\subseteq T(F_{\mathcal{M}_i}) \\ G_{\mathcal{B}_j} &\subseteq T(F_{\mathcal{B}_j}) \end{aligned} \quad (1)$$

Fig. 2 Face tolerance zones $T(F_{\mathcal{M}_i})$ and $T(F_{\mathcal{B}_j})$ and non-nominal surface elements $G_{\mathcal{M}_i}$ and $G_{\mathcal{B}_j}$ with allowable deviations

Fig. 3 Spatial relationships between the maximum-material solids $\mathcal{M}(\mathcal{M}_n)$ and $\mathcal{M}(\mathcal{B}_n)$, least-material solids $\mathcal{L}(\mathcal{M}_n)$ and $\mathcal{L}(\mathcal{B}_n)$, and non-nominal solids $\mathcal{M}$ and $\mathcal{B}$ with allowable deviations

2.3 立体の公差モデル

理想立体の面に指示された公差域に基づいて、公差の許容する最大の立体（これを最大実体状態の立体とよぶ）と最小の立体（最小実体状態の立体）が定義できる。 $\mathcal{M}(\mathcal{M}_n)$ と $\mathcal{L}(\mathcal{M}_n)$ を、それぞれ $\mathcal{M}_n$ に指示された公差が許容する最大実体状態と最小実体状態の立体とする。同様の手順で、 $\mathcal{B}_n$ に関する最大実体状態の立体 $\mathcal{M}(\mathcal{B}_n)$ と最小実体状態の立体 $\mathcal{L}(\mathcal{B}_n)$ を定義する。

公差の許容する実立体 $\mathcal{M}$ と $\mathcal{B}$ は、最大実体状態の立体の内部に含まれ、最小実体状態の立体を内部に含む。したがって以下の空間的な制約を満たす（図 3 参照）：

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(\mathcal{M}_n) &\supseteq \mathcal{M} \supseteq \mathcal{L}(\mathcal{M}_n) \\ \mathcal{M}(\mathcal{B}_n) &\supseteq \mathcal{B} \supseteq \mathcal{L}(\mathcal{B}_n) \end{aligned} \quad (2)$$

3. 公差解析理論

われわれの公差解析理論³⁾を概説する。

3.1 実立体の組立て条件

2 部品の組立て作業は、「部品間の対偶関係を実現しつつ、できるだけ望ましい位置姿勢に部品を配置する作業」と定式化できる。したがって、実立体 $\mathcal{M}$ と $\mathcal{B}$ の組立てられた状態を表す変位ベクトル $\delta\mathbf{q}$ は、以下に示す三つの条件を満たす必要がある。

非相貫条件：組立てられた二つの実立体は、互いに他方の内部へ食い込むことはない。したがって $\delta\mathbf{q}$ は、条件

$$i(\mathcal{M}(\delta\mathbf{q})) \cap i(\mathcal{B}) = \emptyset \quad (3)$$

を満たす。ただし $i(S)$ は立体 S の内部を表す。

接触条件： 対偶は部品間の面接触の組と考えられる。非相貫条件を満たす 2 立体の表面が点を共有していれば、これらは何らかの形で接触している。したがって対偶を構成する k 個の実曲面の組 $\{G_{\mathcal{M}i}(\delta\mathbf{q}), G_{B_i}\}, i \in [1, k]$ が面接触を実現するためには、 $\delta\mathbf{q}$ は以下の条件を満足する必要がある。

$$\forall i \in [1, k], G_{\mathcal{M}i}(\delta\mathbf{q}) \cap G_{B_i} \neq \emptyset \quad (4)$$

最適化条件： 組立てられた 2 部品は、「できるだけ密着する」などの、望ましい組付け状態に関する条件を最適に満たす必要がある。われわれはこの条件を、「 $\delta\mathbf{q}$ に関する代数的な目的関数 $f(\delta\mathbf{q})$ を最小化する」と定式化する。 $\delta\mathbf{q}$ は微小なので、2 次以上の項を無視することで $f(\delta\mathbf{q})$ を線形化できる。本論文ではこのような目的関数は与えられているものとし、その定義法については議論しない。

3.2 理想立体の変位ベクトルの満たすべき条件

定義により、理想立体と実立体の配位は常に一致するので、理想立体を動かすことで実立体の位置姿勢を変更できる。そこで公差が許容する実立体 $\mathcal{M}$ と B が適切な組立てを実現するように、公差域をとまなう理想立体 $\mathcal{M}_n$ と B_n の配位を、理想的な組立て状態から $\delta\mathbf{q}$ だけ動かすことを考える。 $\mathcal{M}$ と B が非相貫条件、接触条件、最適化条件を満たすためには、 $\delta\mathbf{q}$ は以下に示す三つの条件を満たす必要がある。

条件 1 $\mathcal{M}$ と B が非相貫条件を満たすためには、 $\delta\mathbf{q}$ は以下のように定義される変位ベクトルの部分空間 S_{ni} に含まれる必要がある；

$$S_{ni} = \{\delta\mathbf{q} | i(\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\delta\mathbf{q}))) \cap i(\mathcal{L}(B_n)) = \emptyset\} \quad (5)$$

証明：式 (2) により、 $\mathcal{M}$ と B は $\mathcal{M}(\delta\mathbf{q}) \supseteq \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\delta\mathbf{q}))$ と $B \supseteq \mathcal{L}(B_n)$ を満たす。 $i(\mathcal{M}(\delta\mathbf{q})) \supseteq i(\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\delta\mathbf{q})))$ および $i(B) \supseteq i(\mathcal{L}(B_n))$ が成り立つので、 $i(\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\delta\mathbf{q}))) \cap i(\mathcal{L}(B_n)) \neq \emptyset$ であるような配位では、 $\mathcal{M}(\delta\mathbf{q})$ と B は常に交差する。したがって $\mathcal{M}$ と B が非相貫条件を満たすためには、 $\delta\mathbf{q}$ は $S_{ni} = \{\delta\mathbf{q} | i(\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\delta\mathbf{q}))) \cap i(\mathcal{L}(B_n)) = \emptyset\}$ に含まれる必要がある。■

条件 2 $\mathcal{M}$ と B の k 組の実曲面 $\{G_{\mathcal{M}i}(\delta\mathbf{q}), G_{B_i}\}, i \in [1, k]$ が接触を実現するためには、 $\delta\mathbf{q}$ は以下のように定義される変位ベクトルの部分空間 S_c に含まれる必要がある；

$$S_c = \{\delta\mathbf{q} | \forall i \in [1, k], T(F_{\mathcal{M}i}(\delta\mathbf{q})) \cap T(F_{B_i}) \neq \emptyset\} \quad (6)$$

証明：式 (1) により、 $\mathcal{M}$ と B の実曲面 $G_{\mathcal{M}i}$ と G_{B_j} は $G_{\mathcal{M}i}(\delta\mathbf{q}) \subseteq T(F_{\mathcal{M}i}(\delta\mathbf{q}))$ および $G_{B_j} \subseteq T(F_{B_j})$ を満たすので、 $G_{\mathcal{M}i}(\delta\mathbf{q})$ と G_{B_i} が接触するためには、対応する面の公差域が交差すること、すなわち $T(F_{\mathcal{M}i}(\delta\mathbf{q})) \cap T(F_{B_i}) \neq \emptyset$ が成り立つ必要がある。したがって k 組の実曲面 $\{G_{\mathcal{M}i}(\delta\mathbf{q}), G_{B_i}\}, i \in [1, k]$ が接触を実現するためには、 $\delta\mathbf{q}$ は $S_c = \{\delta\mathbf{q} | \forall i \in [1, k], T(F_{\mathcal{M}i}(\delta\mathbf{q})) \cap T(F_{B_i}) \neq \emptyset\}$ に含まれる必要がある。■

条件 3 $\delta\mathbf{q}_{min}$ を、以下に示すような変位ベクトルの部分空間 S_{NI} 中で、部品の位置決めに関する目的関数 $f(\delta\mathbf{q})$ を最小化するベクトルとする；

$$S_{NI} = \{\delta\mathbf{q} | i(\mathcal{M}(\mathcal{M}_n(\delta\mathbf{q}))) \cap i(\mathcal{M}(B_n)) = \emptyset\} \quad (7)$$

$\mathcal{M}$ と B が最適化条件を満たすためには、 $\delta\mathbf{q}$ は以下のように定義される変位ベクトルの部分空間 S_o に含まれる必要がある；

$$\delta\mathbf{q} \in S_o = \{\delta\mathbf{q} | f(\mathbf{q}) \leq f(\delta\mathbf{q}_{min})\} \quad (8)$$

証明：式 (2) により、 $\mathcal{M}$ と B は $i(\mathcal{M}(\mathcal{M}_n(\delta\mathbf{q}))) \supseteq i(\mathcal{M}(\delta\mathbf{q}))$ と $i(\mathcal{M}(B_n)) \supseteq i(B)$ を満たすので、 $i(\mathcal{M}(\mathcal{M}_n(\delta\mathbf{q}))) \cap i(\mathcal{M}(B_n)) = \emptyset$ であるような配位では、 $\mathcal{M}(\delta\mathbf{q})$ と B は互いに他方の内部へ食い込むことはない。ゆえに理想立体 $\mathcal{M}_n$ と B_n は、 $S_{NI} = \{\delta\mathbf{q} | i(\mathcal{M}(\mathcal{M}_n(\delta\mathbf{q}))) \cap i(\mathcal{M}(B_n)) = \emptyset\}$ 内の任意の配位を取れる。

$\delta\mathbf{q}_{min}$ を、 S_{NI} 中で目的関数 $f(\delta\mathbf{q})$ を最小化する変位ベクトルとする。 $\delta\mathbf{q}$ の構成する空間全体を C とすれば、 $C \supseteq S_{NI}$ なので、 C 中には $f(\delta\mathbf{q}) \leq z(\delta\mathbf{q}_{min})$ を満たす変位ベクトル $\delta\mathbf{q}$ が必ず存在する。したがって $\mathcal{M}$ と B が最適化条件を満たすためには、 $\delta\mathbf{q}$ は $S_o = \{\delta\mathbf{q} | f(\delta\mathbf{q}) \leq f(\delta\mathbf{q}_{min})\}$ に含まれる必要がある。■

以上の 3 条件により、公差が許容する実立体が適切な組立てを実現するためには、理想立体 $\mathcal{M}_n$ と B_n の配位を表す変位ベクトル $\delta\mathbf{q}$ は、 S_{ni}, S_c, S_o の積に相当する空間に含まれる必要がある。

4. 公差解析アルゴリズム

上述の理論により、 $S_{ni} \cap S_c \cap S_o$ を算出すれば、組立てられた 2 部品の公差に起因する位置姿勢の変動範囲が解析できる。そこで $S_{ni} \cap S_c \cap S_o$ を、変位ベクトル $\delta\mathbf{q}$ に関する幾つかの凸領域の和の形で算出するアルゴリズムを開発した。

4.1 処理のながれ

このアルゴリズムは、解析対象の部品に関して以下の性質を仮定する。

- (1) 部品形状は多面体。
- (2) 各面に定義された公差域も多面体形状。

したがって公差の許容する最大実体状態と最小実体状態の立体も多面体となる。

以下にアルゴリズムの処理のながれを示す。

Step 1: 変位ベクトルの部分空間 $S_{ni} = \{\delta\mathbf{q} | i(\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\delta\mathbf{q}))) \cap i(\mathcal{L}(B_n)) = \emptyset\}$ を算出する。

Step 2: $S_c = \{\delta\mathbf{q} | \forall i \in [1, k], T(F_{\mathcal{M}i}(\delta\mathbf{q})) \cap T(F_{B_i}) \neq \emptyset\}$ を算出する。

Step 3: $S_{NI} = \{\delta\mathbf{q} | i(\mathcal{M}(\mathcal{M}_n(\delta\mathbf{q}))) \cap i(\mathcal{M}(B_n)) = \emptyset\}$ を算出する。

Step 4: S_{NI} において、線形の目的関数 $f(\delta\mathbf{q})$ を最小化する変位ベクトル $\delta\mathbf{q}_{min}$ を算出する。

Step 5: $S_o = \{\delta\mathbf{q} | f(\delta\mathbf{q}) \leq f(\delta\mathbf{q}_{min})\}$ を算出する。

Step 6: S_{ni}, S_c, S_o の積を算出する。

$\delta\mathbf{q}$ は公差に起因する部品の変位を表しており、通常ごく微小である。この性質を適切に利用すると、 S_{ni} と S_{NI} を、 $\delta\mathbf{q}$ に関する幾つかの線形不等式の解の共通部分が定める凸領域として導出できる。また Step 2 で計算される S_c は、 $\delta\mathbf{q}$ に関する線形不等式群の解の和集合が定める幾つかの領域の積となる。 S_{NI} が線形不等式の積集合であることから、Step 4 は、 S_{NI} 中で $f(\delta\mathbf{q})$ を最小化する $\delta\mathbf{q}_{min}$ を、線形計画法を用いて探索することで実現できる。Step 5 で定義される S_o は、明らかに線形不等式 $f(\delta\mathbf{q}) \leq f(\delta\mathbf{q}_{min})$ の定める半空間である。

以上をまとめると、 $S_{ni} \cap S_c \cap S_o$ は、線形不等式の積集合が定める凸領域 S_{ni} と、線形不等式の和集合の定める領域の積 S_c と、半空間 S_o の積となる。これは集合の論理式を適切に操作することで、 $\delta\mathbf{q}$ に関する幾つかの線形不等式の積集合の定める凸領域の和へ変形できる。以後の節では、特に S_{ni} の計算法と S_c の計算法について解説する。 S_{NI} は S_{ni} と同じ方法で計算できる。 S_o の計算法は以上の記述から明らかであろう。

Fig. 4 Possible penetrations between two polyhedrons $\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\delta \mathbf{q}))$ and $\mathcal{L}(\mathcal{B}_n)$

4.2 S_{ni} の計算法

$S_{ni} = \{\delta \mathbf{q} | i(\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\delta \mathbf{q}))) \cap i(\mathcal{L}(\mathcal{B}_n)) = \emptyset\}$ は、二つの多面体 $\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\delta \mathbf{q}))$ と $\mathcal{L}(\mathcal{B}_n)$ が、互いに他方の内部へ食い込まないような変位ベクトル $\delta \mathbf{q}$ の集合である。二つの多面体間に生じ得る接触として、片方の頂点と他方の面の点接触のみを仮定すると、 $\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\delta \mathbf{q}))$ と $\mathcal{L}(\mathcal{B}_n)$ が相互に非侵入であるためには、以下の2条件が満たされていなければならない⁵⁾：

- (1) $\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\delta \mathbf{q}))$ の頂点が $\mathcal{L}(\mathcal{B}_n)$ の面の内側へ侵入しない。
- (2) $\mathcal{L}(\mathcal{B}_n)$ の頂点が $\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\delta \mathbf{q}))$ の面の内側へ侵入しない。

変位ベクトルの大きさ $|\delta \mathbf{q}|$ を十分に小さな値に制限すると、配位の変化にともなう頂点や面の移動をごく狭い範囲に抑えることができるので¹¹⁾、頂点が侵入し得る面をあらかじめ特定できる。そこで $\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\delta \mathbf{q}))$ の頂点 v_M が、 $\mathcal{L}(\mathcal{B}_n)$ の面 f_B へ侵入し得る場合を考える。理想的な組立て状態（すなわち $\delta \mathbf{q} = \mathbf{0}$ ）における頂点 v_M の位置を $\mathbf{r}_M$ とし、面 f_B の方程式を $\mathbf{n}_B \cdot \mathbf{X} = d_B$ とする。ただし $\mathbf{n}_B$ は、 f_B の法線方向を表す単位ベクトルである。

2 立体の配位が $\delta \mathbf{q}$ 変化したとき、 v_M が f_B の内側へ侵入しないためには、2 次以上の微小項の影響を無視すれば、以下の線形不等式が満たされていなければならない⁹⁾ (図 4 (a) 参照)：

$$\mathbf{n}_B \cdot (\mathbf{r}_M + \delta \Theta \times \mathbf{r}_M + \delta \mathbf{s}) \geq d_B \quad (9)$$

ただし $\delta \mathbf{s}$ は $\delta \mathbf{q}$ 中の位置の変動成分を表し、 $\delta \Theta$ は姿勢の変動成分を表す。すなわち $\delta \mathbf{s} = [\delta x, \delta y, \delta z]$ 、 $\delta \Theta = [\delta \theta_x, \delta \theta_y, \delta \theta_z]$ である。

同様に $\mathcal{L}(\mathcal{B}_n)$ の頂点 v_B が、 $\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\delta \mathbf{q}))$ の面 f_M の内側へ侵入しないためには、以下の線形不等式が満たされていなければならない (図 4 (b) 参照)：

$$\mathbf{n}_M \cdot (\mathbf{r}_B - \delta \Theta \times \mathbf{r}_B - \delta \mathbf{s}) \geq d_M \quad (10)$$

そこで $\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\delta \mathbf{q}))$ と $\mathcal{L}(\mathcal{B}_n)$ の全頂点と、その頂点が侵入し得るすべての面の組について、上述した 2 種類の線形不等式を立てる。各不等式の解は、 $\delta \mathbf{q}$ の定める空間中の半空間に対応する。したがってこれらの積集合の定める凸領域が S_{ni} となる。

4.3 S_c の計算法

$S_c = \{\delta \mathbf{q} | \forall i \in [1, k], T(F_{M_i}(\delta \mathbf{q})) \cap T(F_{B_i}) \neq \emptyset\}$ は、すべての対偶において、対偶を構成する二つの面の公差域 $T(F_{M_i}(\delta \mathbf{q}))$ と $T(F_{B_i})$ が交わりを持つような、変位ベクトル $\delta \mathbf{q}$ の集合である。したがって各面の組について、変位ベクトルの集合 $S_{ci} = \{\delta \mathbf{q} | T(F_{M_i}(\delta \mathbf{q})) \cap T(F_{B_i}) \neq \emptyset\}$ を計算し、それらの積集合を求めればよい。

S_{ci} は、 $\{\delta \mathbf{q} | i(T(F_{M_i}(\delta \mathbf{q}))) \cap i(T(F_{B_i})) = \emptyset\}$ 、すなわち二つの公差域が互いに他方の内部に侵入しないような変位ベクトルの集合を算出し、その補集合を正規化することで得られる。仮定から面の公差域は多面体領域なので、公差域が互いに非侵入であるような変位ベクトルの集合は、4.2 節で述べた手法を用いることで、 $\delta \mathbf{q}$ に関する線形不等式の解の積集合として表現できる。したがってその補集合を正規化した S_{ci} は、ド・モルガン則により線形不等式の解の和集合となる。ゆえに $S_c = \bigcap_i S_{ci}$ は、線形不等式群の解の和集合が定める幾つかの領域の積となる。

5. 計算実験

C 言語を用いて公差解析プログラムを試作し、幾つかの計算実験をおこなった。

5.1 多角形部品の公差解析

手法の有効性をとりあえず評価するために、多面体ではなく、公差が指示された二つの多角形からなる組立品の、位置姿勢の曖昧さを解析することにした。これは前節までの議論を、以下のように置き換えたものに対応する。

- (1) 二つの平面図形の配位は、各図形の固有座標系の位置の違いを表すパラメータ x, y と、姿勢の違いを表すパラメータ θ_z により表現できる。したがって変位ベクトルは $\delta \mathbf{q} = [\delta x, \delta y, \delta \theta_z]$ となる。
- (2) 公差域は多角形領域であり、多角形部品の各辺に指示されている。したがって公差の許容する最大実体状態と最小実体状態の図形も多角形となる。
- (3) 対偶は多角形の辺の接触関係として指示される。
- (4) 公差解析アルゴリズムは、二つの多角形が互いに他方の内部へ侵入しないような変位ベクトルの部分空間を計算する問題に帰着できる。
- (5) 多角形間の干渉は、一般に頂点と辺の衝突により生じる。変位ベクトルの大きさを十分に微小と仮定すると、頂点が他方の図形の辺の内側へ侵入することを禁止する条件は、 $\delta \mathbf{q}$ に関する線形不等式により表現できる⁶⁾。

5.2 例題

図 5 に、計算実験で用いた二つの多角形 $\mathcal{M}_n$ と $\mathcal{B}_n$ を取り巻く、公差が許容する最大実体状態と最小実体状態の多角形を示す。これらの図形は、 $\mathcal{M}_n$ と $\mathcal{B}_n$ の各辺を外側と内側へ 0.25 ずつオフセットした図形に相当する。図には示していないが、 $\mathcal{M}_n$ と $\mathcal{B}_n$ の各辺には、公差域が多角形領域として指示されている。図中に指示されている“=”記号は、対偶を構成する辺の組を表している。

それぞれの図形には、固有の座標系をその原点が多角形の重心と一致するように、また理想的な組立て状態では、二つの座標系の y 軸の方向がともに上方を向くように与えた。部品を最適な位置姿勢に配置するための目的関数として、 $f(\delta \mathbf{q}) = \delta y$ を用いた。したがって公差が許容する実部品のモデルは、その配位の y の値ができるだけ小さくなるように、言い換えれば上側の部品ができるだけ下方になるように配置される。

5.3 解析結果

解析結果を図 6 に示す。この図は、変位ベクトルの変動範囲を表す $S_{ni} \cap S_c \cap S_o$ を、変位ベクトルの構成する空間中の $\delta \theta_z - \delta x$ 平面へ投影した図形を示している。このような表示は、変動範囲を表す不等式の組合せに、CSG モデルのレンダリング手法を適用することで得られる。図の横軸は生じ得る姿勢の変動範囲（単位はラジアン）を表し、縦軸は x 軸方向の位置の変動範囲を表している。

Fig.5 Maximum material polygons and least material polygons of the example polygonal assembly

Fig.6 Derived bound of the configuration uncertainty of the example parts

また図中の濃淡は、 y 軸方向の位置の変動範囲を表しており、薄い色ほど変動量が大きいことを意味する。

図 7 に、 $S_{ni} \cap S_c \cap S_o$ 内で最大の $\delta\theta_z$ 値に対応する図形の位置姿勢と、最小の $\delta\theta_z$ 値に対応する位置姿勢を示す。これらの計算には PC (CPU: Pentium 100MHz, 主記憶: 16MB) を用いた。上記の例以外にも、幾つかの多角形の組立品に対して本プログラムを適用したが、いずれの場合にも妥当な結果が瞬時に得られた。

6. まとめと展望

本論文では、公差に起因する組立品の位置姿勢の曖昧さを、配位空間を用いて解析する新しい手法を説明した。この手法は、公差が指示された 2 部品の配位空間中で、公差が許容する実部品が非相貫条件、接触条件、最適化条件を満足し得る部分空間を算出することで公差解析をおこなう。公差に起因する位置姿勢の変動は、ごく微小と考えられる。この性質を利用して、組立てられた二つの多面体部品の相対的な位置姿勢の変動範囲を、線形不等式の解の積集合が定める幾つかの凸領域の和として算出する手法を開発した。また手法の有効性を検証するために、2 次元多角形からなる組立品の公差解析をおこなうプログラムを作成し、計算実験をおこなった。現在 3 次元多面体からなる組立品の、公差解析をおこなうプログラムを

Fig.7 Extreme configurations allowed in the bound

作成中である。また曲面を含む組立品を解析するために、手法の拡張を検討している。本研究は、科学研究費補助金基盤研究 (C) 課題番号 08650307 を受けておこなわれた。関係者各位に感謝する。

参考文献

- 1) A. Fleming: *Analysis of Uncertainties and Geometric Tolerances in Assemblies of Parts*, Ph.D. Thesis, University of Edinburgh, (1987).
- 2) M. Inui, M. Miura and F. Kimura: Analysis of Position Uncertainties of Parts in an Assembly Using Configuration Spaces in Octree Representation, Proc. ACM Symp. Solid Modeling and Applications, (1995) 73.
- 3) M. Inui, M. Miura and F. Kimura: Positioning Conditions of Parts with Tolerances in an Assembly, Proc. IEEE Int. Conf. Robotics and Automation, (1996) 2202.
- 4) ISO: Technical drawings - Geometrical tolerancing - Tolerances of form, orientation, location and run-out - Generalities, definitions, symbols, indications on drawings, ISO 1101-1983, (1983).
- 5) L. Joskowicz and R. H. Taylor: Interference-Free Insertion of a Solid Body into a Cavity: An Algorithm and a Medical Application, Int. J. Robotics Res., 15-3, (1996) 211.
- 6) 金田光広, 乾 正知: 微小な形状誤差を含む組立品の位置決めアルゴリズム, 1996 年度精密工学会秋季大会学術講演会講演論文集, (1996) 585.
- 7) A. A. G. Requicha: Toward a Theory of Geometric Tolerancing, Int. J. Robotics Res., 2-4, (1983) 45.
- 8) R. Sodhi and J. U. Turner: Relative Positioning of Variational Part Models for Design Analysis, Computer-Aided Design, 26-5, (1994) 366.
- 9) 武田捷一, 丸山 稔, 亀井克之: 物理法則に基づく剛体運動のシミュレーション手法, グラフィクスと CAD 研究会資料, 73-4, (1995) 25.
- 10) J. U. Turner: Relative Positioning of Parts in Assemblies Using Mathematical Programming, Computer-Aided Design, 22-7, (1990) 394.
- 11) J. Xiao: Automatic Determination of Topological Contacts in the Presence of Sensing Uncertainties, Proc. IEEE Int. Conf. Robotics and Automation, (1993) 65.