5 軸制御加工における工具干渉検出と回避法に関する研究*

小 西 和 正** 福 田 好 朗*** 岩 田 一 明†

Study on a Method of Collision Check and Collision Avoidance for 5-Axis Control Machining

Kazumasa KONISHI, Yoshirou FUKUDA and Kazuaki IWATA

This paper deals with a method of collision check and collision avoidance on the tool path generation for 5-axis control machining. The proposed method is able to reliably check the collision between tooling system and objects which surround the tooling system. The method is to determine whether edges of polygon patches on the surface of the objects are intersecting to the tooling system or not. The avoidance value is quickly calculated in order to get tool posture without collision, when the collision is found. The CAM system has been developed in this study, and it has been applied to machining for a marine propeller. The validity of the proposed method is experimentally confirmed by the machined propeller and its measured result.

Key words: collision check, collision avoidance, 5-axis control machining, CAM, avoidance value, marine propeller

1. 緒 言

同時5軸制御加工においては、工作物に対して任意の工具姿勢を与えることができることから、オーバハング部を有する自由曲面等の複雑な形状の加工、ルールド曲面に対する工具側面による線切削、段取換えを省いた高能率な加工等が可能である。しかしながら、工具軸の傾け方によっては工具系（工具、工具ホルダ、スピンドル、主軸）とテーブル系（工作物、ジグ、テーブル）間に干渉が生じる。このため、自由曲面等の複雑な形状の工作物の加工に対して、工具系とテーブル系間に生じる干渉を高速にかつ確実に検出および回避することのできる同時5軸制御加工用CAMソフトウェアの開発が望まれている。

同時5軸制御加工における工具干渉検出および干渉回避については、既にいくつかの論文が発表されている。代表的なものとして、工具に多数のチェックポイントを設定し、このチェックポイントとCSGで定義された工作物との内外判別により干渉検出を行う方法¹⁾、工具系の形状をXY平面に投影しこの投影した形状を包絡する矩形領域内に存在する工作物上の離散的な点列データと工具系を包含する円すいとの内外判別により干渉検出を行う方法²⁾、切削面の点群データをチェックポイントとし、工具系の投影面の選択および投影面の領域分割の後、工具系の投影が存在する領域内のチェックポイントのみを工具座標系に変換し、工具座標系においてチェックポイントと工具系形状との内外判別により干渉検出を行い、干渉点の座標値および法線ベクトルより回避方向と回避角度を決定する方法³⁾、工具干渉検出処理の後、その位置で取り得るすべての工具姿勢とそれらの姿勢に対する干渉の有無の関係を表すC-Spaceを用いて工具干渉回避を行う方法⁴⁾等である。

しかしながら、今までの研究は、工具系もしくはテーブル系の干渉検出の対象物を限定したものであること、工具系、テ-

ブル系の一方を離散的な点列データとして干渉検出を行っていることにより、干渉検出漏れ等の問題点を有する。すなわち、同時5軸制御加工用CAMソフトウェアにおける工具干渉検出と回避機能には、工具系とテーブル系間の総合的な干渉検出および回避機能が必要である。

そこで本研究では、半球、円すいおよび円柱のプリミティブで構成される工具系と許容誤差内で三角形のポリゴンパッチで近似されたテーブル系間に生じる干渉を漏れなく確実に検出を行う方法およびポリゴンパッチに対する干渉回避方法を提案する。さらに、この手法を組み込んだ同時5軸制御加工用CAMソフトウェアにより工具経路を自動生成し、その工具経路に基づいて、加工実験を行うことによりその有効性および実用性を検証する。

2. 工具干渉の検出

本研究では、工具、工具ホルダ、スピンドルおよび主軸頭を工具系、工作物、ジグおよびテーブルをテーブル系、工具系とテーブル系間に生じる干渉を工具干渉と定義し、この工具干渉の検出と回避を研究対象としている。取り扱う工具はボールエンドミルのみではなく、エンドミル、テーパボールエンドミル、テーパエンドミル、ブルノーズ、ブルノーズコーンも対象とする。ただし、ボールエンドミル、テーパボールエンドミル以外の工具に関しては、工具軸ベクトルは常に切削点における法線ベクトル、送り方向を表す接線ベクトルと同一平面に存在するものとする。図1に干渉検出の対象である工具系、図2にテーブル系の例を示す。

ここで、工具干渉の検出にあたっては、テーブル系の各面は工具径より短い稜線を1本含む三角形のポリゴンパッチ（以下、単にポリゴンパッチと記す）で、工具系はプリミティブで定義されているものとする。このことにより、工具干渉検出問題は、工具系のプリミティブとテーブル系のポリゴンパッチの稜線との交差検出問題に置換できる。

具体的な処理においては、まず、ラフチェックにより干渉の可能性のあるポリゴンパッチを選択する。ついで、図3に示すように、工具中心を原点 O_i 、工具軸ベクトルを Z_i 軸、 Z_i 軸と送り方向を表す接線ベクトル F の外積を Y_i 軸とする直交

* 原稿受付 平成9年2月5日

** 正 会 員 (財)機械振興協会技術研究所 (東久留米市八幡町 1-1-12)

*** 正 会 員 法政大学工学部 (小金井市梶野町 3-7-2)

† 正 会 員 大阪大学工学部 (現、国立高知工業高等専門学校；南国市物部乙 200 番 1)

Fig. 1 Tool system

Fig. 2 Table system

Fig. 3 Definition of tool coordinate system

座標系（以下、工具座標系と記す）を設定する。この直交座標系において、選択されたポリゴンパッチに対してのみ、工具系のプリミティブとの交差判別を行うことにより工具干渉の検出を行う。

開発したシステムは、以下のような手順で翼面（自由曲面）をポリゴンパッチの集合体で近似する。

翼最大径、翼最小径、レーキ曲線の曲率およびビックフィード量に基づき、翼面に対する切断面（円筒面）の位置（円筒半径）と個数を決定する。次に、翼面と各切断面との交点群を収束計算により求める。この後に、相隣り合う切断面上の交点群

を頂点とする三角帯を決定し、この三角帯により翼面を近似する。なお、上述の翼面と切断面との交点群の計算においては、交点間の弦偏差が指定されたトレランス（0.05～0.002 mm の範囲で指定可能）内になるように考慮している。

2.1 ラフチェックによる可能ポリゴンパッチの選択

工具干渉を確実に、かつ短時間で検出するため、前処理として以下のようなラフチェックを行う。

工具系の形状、指定された工具中心位置および工具軸ベクトルに基づいて（図3）、工具系を包含する円すいを定義する。この円すいを XY 平面に投影し、この投影後の形状とテーブル系の各ポリゴンパッチの稜線との交差判別を行う。その結果、少なくとも頂点の1点が内部に存在する場合、あるいは両頂点間で稜線と交差する場合を検出し、検出された稜線を含むポリゴンパッチをチェックポリゴンパッチとして選択する。

2.2 座標変換

工具系のプリミティブとテーブル系のチェックポリゴンパッチとの交差判別を行うには、ワーク座標系で定義されているテーブル系のチェックポリゴンパッチを工具座標系に変換する必要がある。いま、工具座標系の X_i 軸、 Y_i 軸、 Z_i 軸の単位ベクトルの方向余弦および原点 O_i の座標をそれぞれ $(\lambda_1, \mu_1, \nu_1)$, $(\lambda_2, \mu_2, \nu_2)$, $(\lambda_3, \mu_3, \nu_3)$, (X_0, Y_0, Z_0) とすれば、空間の任意の一点 P の工具座標系に関する座標 (X_i, Y_i, Z_i) は、ワーク座標系に関する座標 (X_w, Y_w, Z_w) と原点 O_i の座標および工具座標系の各軸の方向余弦で表される⁵⁾。

この関係をマトリクスを用いて表現すれば次式となる。

$$[X_i \ Y_i \ Z_i \ 1] = [X_w \ Y_w \ Z_w \ 1] \cdot T^{-1} \quad (1)$$

$$T = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \mu_1 & \nu_1 & 0 \\ \lambda_2 & \mu_2 & \nu_2 & 0 \\ \lambda_3 & \mu_3 & \nu_3 & 0 \\ X_0 & Y_0 & Z_0 & 1 \end{bmatrix}$$

ここで、 T は工具座標系からワーク座標系への変換マトリクス、 T^{-1} は T の逆マトリクスである。

したがって、指定された切削点、切削点での工具軸ベクトルおよび送り方向を表す接線ベクトルに基づき、工具座標系の X_i 軸、 Y_i 軸、 Z_i 軸の各単位ベクトルの方向余弦をそれぞれ算出し、ワーク座標系のチェックポリゴンパッチの各頂点と法線ベクトルを式(1)により工具座標系に変換する。

2.3 プリミティブとポリゴンパッチの干渉検出

工具系のプリミティブとテーブル系の稜線 E_j ($j=1, 2, 3$) で定義される三角形のチェックポリゴンパッチとの干渉検出の手順を以下に示す。

2.3.1 球とポリゴンパッチの干渉検出

原点を中心とする球とポリゴンパッチとの干渉は次の順序で検出できる。(1) 頂点 Q_i ($i=1, 2, 3$) のうち少なくとも1点が球の内部に存在する場合は干渉する。(2) 原点とポリゴンパッチ間の距離が球の半径より大きい場合は干渉しない。(3) 球とポリゴンパッチの交差円が3頂点で定義される三角形に包含される場合は干渉する。(4) 稜線 E_j ($j=1, 2, 3$) のうち少なくとも1本が球と交差し、かつその交点が稜線の頂点間に存在する場合は干渉する。

2.3.2 円柱とポリゴンパッチの干渉検出

点 $Q_b(0, 0, Z_b)$ を工具先端側底面の中心、 Z_i 軸を中心軸とすると、円柱とポリゴンパッチとの干渉は次の順序で検出できる。(1) 頂点 Q_i ($i=1, 2, 3$) の Z 座標値の最大値が Z_b より小さい場合は干渉しない。(2) 頂点 Q_i ($i=1, 2, 3$) と Z_i 軸間の

Fig. 4 Example of collision check between a polygon patch and the tool system

距離が円柱の半径より小さい場合は干渉する。(3) 稜線 E_j ($j=1, 2, 3$) のうち少なくとも1本が円柱と交差し、かつその交点が稜線の頂点間に存在する場合は干渉する。

2.3.3 円すいとポリゴンパッチの干渉検出

点 $Q_t(0, 0, Z_t)$ を主軸側底面の中心、点 $Q_b(0, 0, Z_b)$ を工具先端側底面の中心、点 $Q_v(0, 0, Z_v)$ を頂点、 Z_t 軸を中心軸、 θ を半頂角とすると、円すいとポリゴンパッチとの干渉は次の順序で検出できる。(1) 稜線の頂点 Q_i ($i=1, 2, 3$) の Z 座標値の最大値が Z_b より小さいか、あるいは最小値が Z_t より大きい場合は干渉しない。(2) 頂点 Q_i ($i=1, 2, 3$) と Z_t 軸間の距離が頂点 Q_i の Z 値に対応する円すい半径より小さい場合は干渉する。(3) 稜線 E_j ($j=1, 2, 3$) のうち少なくとも1本が円すいと交差し、かつその交点が稜線の頂点間に存在する場合は干渉する。

2.4 工具干渉検出の手順

工具系とテーブル系間に生じる総合的な工具干渉の検出は、テーブル系のすべてのチェックポリゴンパッチに対し、工具先端、工具、工具ホルダ、スピンドルおよび主軸頭等の形状の順に前節の手順により行う。干渉が検出された場合は、このポリゴンパッチ（以下、干渉ポリゴンパッチと記す）に対して干渉を回避できる工具軸ベクトルを算出し、工具姿勢を変更する。もし、干渉が検出されなければ、初めに指定された工具軸ベクトルが指定された切削点における干渉のない工具軸ベクトルとなる。図4は工具ホルダと工具に干渉した単一ポリゴンパッチの検出例である。

3. 干渉回避の方法

干渉回避は、工具先端の切削点あるいはオフセット位置を変化させずに、工具軸ベクトルを回避方向に移動させることにより、すべての干渉ポリゴンパッチを前章で定義した工具系の範囲外に出すことにより行う。

ここで、切削点あるいはオフセット位置は工具形状により異なり、ボールエンドミルとテーパボールエンドミルの場合は工具中心位置、エンドミルとテーパエンドミルの場合は切削点、ブルノーズとブルノーズコーンの場合はノーズ中心位置である。

3.1 回避方向

工具がボールエンドミルとテーパボールエンドミルの場合には、各干渉ポリゴンパッチの法線ベクトルを工具座標系の $X_t Y_t$ 面上に投影し単位化したベクトルの合成ベクトルを回避方向ベクトルとする方法が提案されている³⁾。ここでは、この考え方を踏襲する。

Fig. 5 Concept of tool collision avoidance

ただし、合成ベクトルがゼロベクトルの場合には、工具座標系の X_t 軸方向を回避方向ベクトルに設定する。また、工具がエンドミル、テーパエンドミル、ブルノーズおよびブルノーズコーンの場合には、加工面への影響を考慮して、回避方向ベクトルは工具座標系の X_t 軸方向に限定するものとする。

3.2 回避量

工具座標系において、干渉ポリゴンパッチ P_k だけを工具系の外に出すために、工具軸ベクトル上の点 Q_s を $X_t Y_t$ 平面と平行に回避方向に距離 S_k だけ移動させることを考えると、すべての干渉ポリゴンパッチ P_k ($k=1, \dots, n$) を工具系の外に出すために必要な回避量 S はすべての S_k ($k=1, \dots, n$) 中の最大値となる。

ここで、回避量 S_k は、干渉ポリゴンパッチ P_k の稜線 E_j ($j=1, 2, 3$) を工具系の外に出すための回避量 S_j ($j=1, 2, 3$) 中の最大値である。

稜線 E_j に対する回避量 S_j の算出については、以下に、使用工具がボールエンドミルの場合について述べる。ただし、他の形状についても、同様の考え方とアルゴリズムによって行うことができる。

3.2.1 回避量算出の基礎

稜線 E_j を工具系の外に出すためには、工具中心位置を変化させずに、工具軸ベクトルを回避方向に移動させることにより、稜線 E_j と工具系の形状が接する状態にする。もし、この状態で接点が稜線 E_j の両頂点間に存在しない場合には、接点に近い頂点を工具系の外に出すことにより、稜線 E_j を工具系の外に出すことができる。また、接点が両頂点間に存在する場合には、このときの移動量が算出すべき回避量となる。

図5に示すように、稜線 E_j を工具系の外に出すために、工具軸ベクトル上の点 Q_s を $X_t Y_t$ 平面と平行する回避方向ベクトル V_a の方向に回避量 S_j だけ移動させる。この状態において、原点 O_t から点 Q_s の移動後の点 Q_e に至るベクトルの単位ベクトル V_t が回避後の工具軸ベクトルとなる。ここで、回避方向ベクトル V_a の方向余弦を $(l_a, m_a, 0)$ 、点 Q_s の座標を $(0, 0, 1)$ とすると、工具軸ベクトル V_t の方向余弦 (l_t, m_t, n_t) は、次式に示すように、回避方向ベクトル V_a の方向余弦と回避量 S_j を用いて表すことができる。

Fig. 6 Example of tool collision avoidance

$$\left. \begin{aligned} l_t &= \frac{l_a \cdot S_j}{(S_j^2 + 1)^{1/2}} \\ m_t &= \frac{m_a \cdot S_j}{(S_j^2 + 1)^{1/2}} \\ n_t &= \frac{1}{(S_j^2 + 1)^{1/2}} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

3.2.2 円柱に稜線 E_j を接しさせるための回避量

方向余弦が式(2)で表される軸ベクトル V_t 、軸上の点 O_t および半径 R_t を持つ円柱に対して、円柱表面上に稜線 E_j 上の点 Q_t が存在する条件は、ベクトル Q_t と V_t の外積の大きさより、次式が成立することである。

$$(Q_t \cdot Q_t)(V_t \cdot V_t) - (Q_t \cdot V_t)^2 = R_t^2 \quad (3)$$

点 Q_t を稜線 E_j の頂点 $Q_j (X_j, Y_j, Z_j)$ 、 Q_j から Q_{j+1} に至るベクトル V_e の単位ベクトルの方向余弦 (l_e, m_e, n_e) およびパラメータ t で表すと、式(3)より次式が得られる。

$$A_t \cdot t^2 + 2B_t \cdot t + C_t = 0 \quad (4)$$

ただし、

$$\begin{aligned} A_t &= (V_e \cdot V_e) - (V_e \cdot V_t)^2 \\ B_t &= (Q_j \cdot V_e) - (V_e \cdot V_t)(Q_j \cdot V_t) \\ C_t &= (Q_j \cdot Q_j) - (Q_j \cdot V_t)^2 - R_t^2 \end{aligned}$$

稜線 E_j が円柱に接する条件は、式(4)が重根を持つことから、 S_j に関して整理すると次式のようになる。

$$A_s \cdot S_j^2 + 2B_s \cdot S_j + C_s = 0 \quad (5)$$

ただし、

$$\begin{aligned} A_s &= (Q_j \cdot V_e)^2 + (Q_j \cdot V_a) \{ (Q_j \cdot V_a) - 2(Q_j \cdot V_e)(V_e \cdot V_a) \} \\ &\quad + V_s \\ B_s &= (Q_j \cdot V_a) \{ Z_j - n_e(Q_j \cdot V_e) \} + (V_e \cdot V_a) \{ n_e \cdot D_r \\ &\quad - Z_j(Q_j \cdot V_e) \} \\ C_s &= (Q_j \cdot V_e) \{ (Q_j \cdot V_e) - 2n_e \cdot Z_j \} - D_r(1 - n_e^2) + Z_j^2 \\ V_s &= \{ (V_e \cdot V_a)^2 - 1 \} D_r \\ D_r &= (Q_j \cdot Q_j) - R_t^2 \end{aligned}$$

回避量の具体的な算出には、まず、式(5)の正の実根で、かつ最大の根 S_j に対して、式(2)より、工具軸ベクトルの方向余弦を求める。つづいて、式(4)を解き、接点を与えるパラメータ t を算出する。この t の値が正で、かつ頂点 Q_j, Q_{j+1} 間の距離より小さい場合には、 S_j が稜線 E_j に対する回避量となる。図4に示した干渉状態に対して回避させた例を図6に示す。

3.2.3 円柱と頂点 Q_j に対する回避量

方向余弦が式(2)で表される軸ベクトル V_t 、軸上の点 O_t および半径 R_t を持つ円柱に対して、頂点 $Q_j (X_j, Y_j, Z_j)$ が円柱表面上に存在する条件は、ベクトル Q_j と V_t の外積の大き

Fig. 7 Propeller used in machining

さより、 Q_j と V_t に対して、式(3)と同様の関係が成立することである。この式を S_j について整理すると、次式が得られる。

$$\{D_r - (Q_j \cdot V_a)^2\} S_j^2 - 2Z_j(Q_j \cdot V_a) S_j + D_r - Z_j^2 = 0 \quad (6)$$

ただし、 $D_r = (Q_j \cdot Q_j) - R_t^2$ 。

式(6)の正の実根で、かつ最大の根が頂点 Q_j に対する回避量 S_j となる。

3.3 座標系の逆変換

前節で得られる回避量 s に基づいて、工具座標系における干渉回避後の工具軸ベクトルの方向余弦を式(2)で求めた後に、2.2節で述べた工具座標系からワーク座標系への変換マトリクスにより、ワーク座標系における干渉回避後の新工具軸ベクトルを決定する。以上の処理により、すべての干渉ポリゴンパッチを工具系の外に出すことができる。しかしながら、この回避処理によって、新たに他のポリゴンパッチとの干渉を発生させることもある。したがって、新工具軸ベクトルによって工具系とテーブル系との干渉検出を再度行い、干渉が検出されなくなるまで、以上の過程を繰り返す。繰返しの際、干渉回避が制限回数を越えた場合は干渉回避不能、回避量が制限値を越えた場合は連続切削不能状態として検出している。

なお、繰返しの過程において、ベクトル $V_t^{(0)}$ 、 $V_t^{(i-1)}$ および $V_t^{(i)}$ が同一平面に存在し、かつ $s^{(i)} < s^{(i-1)}$ の場合には、回避方向ベクトルを送り方向を表す接線ベクトル F の方向に設定することとした。ここで、 $V_t^{(i)}$ 、 $s^{(i)}$ は、それぞれ繰返し i 回目の工具軸ベクトルと回避量である。

4. 加工実験

加工対象物として、図7に示す水槽実験用模型プロペラを取り上げ、考案した干渉検出手法および干渉回避手法を組み込んだ同時5軸制御加工用CAMソフトウェアにより、工具経路を生成し加工実験を行った。表1に加工実験に用いたプロペラの仕様を、図8にプロペラの翼面加工に対して生成した工具経路の例を示す。加工実験に用いた被削材はアルミニウム(A 5052 S)、使用工具はφ16 mmのボールエンドミル、工具突出し長さは110 mmである。翼面仕上加工時の主軸回転数、送り速度およびピックフィード量は、それぞれ1800 rpm、600 mm/min、1.0 mmである。

また、加工実験での荒加工から仕上加工までの工程は、次の通りである。

円盤状の被削材に対して3軸制御加工により、仕上代0.7

Table 1 Propeller used in calculation

Diameter	300 mm
Number of blades	6
Surface data/blade	522
Cutting points	7 072
Check points	12 747
Pickfeed	2.0 mm
Tolerance	0.005 mm

Fig. 8 Generated CL-data

mmで翼輪郭間の余肉部を除去し、オーバハングの存在しない翼面部分は、仕上代3.0 mmで荒加工を実施した。その後、5軸制御加工によりピックフィード量2.0 mm、仕上代0.7 mmで中荒加工、ピックフィード量1.5 mm、仕上代0.3 mmで中仕上加工、ピックフィード量1.0 mmの仕上加工を行った。各工程ごとに、仕上面に対して仕上代だけ工具半径をオフセットして干渉チェックを行いCLデータを算出した。なお、工具経路の生成に使用した計算機はIBM RISC system 6000/560、工作機械は新日本工機社製FSP-50 Hである。

図7に示したプロペラの翼面と翼面間の狭部の加工においては、干渉を回避するために同時5軸制御加工が必要であり、特に、翼面加工を段取換えを省いた加工で行うためには、工具系とテーブル系間の総合的な干渉検出と干渉回避処理が不可欠である。表1に示した仕様のプロペラをチェックポイントのみで干渉検出を行った場合の検出回数は156回、稜線で干渉検出を行った場合の検出回数は165回であった。このことから確実に干渉検出を行うには、ポリゴンパッチの稜線で干渉検出を行う手法が有効であることが分かる。次に、実加工後のプロペラ翼面（圧力面）の母線位置での測定結果（三井造船昭島研究所のご協力による）を表2に示す。この測定結果により、水槽実験用模型プロペラの要求精度 ± 0.05 mmを満足する結果を得たことが分かる。また、実加工後の水槽実験用模型プロペラの形状を図9に示す。

Table 2 Measurement results of blade surface

Measuring position r/R	0.5	0.6	9.7	0.8	0.9	0.95
Theoretical value mm	20.305	19.145	17.985	16.825	15.665	15.085
Measured value mm	20.280	19.110	17.977	16.833	15.655	15.069
Error mm	0.025	0.035	0.008	-0.008	0.010	0.016

Fig. 9 Machined propeller

5. 結 論

本研究では、工具系とテーブル系間に生じる工具干渉に対して、処理速度が早く、かつ信頼性の高い干渉検出手法およびポリゴンパッチに対する干渉回避手法を考案し、この手法を水槽実験用模型プロペラの実加工に適用して以下の結論を得た。

- (1) 工具系とテーブル系の各ポリゴンパッチの稜線との交差判別を基本とした検出漏れのない干渉検出方法を提案し、その有効性を確認した。
- (2) ベクトル外積、内積に基づく干渉ポリゴンパッチに対する回避量の算出方法を示し、1回の回避処理ですべての干渉ポリゴンパッチを回避する方法を提案した。
- (3) 加工実験を行い、工具干渉のない工具経路を自動的に生成できることを確認した。
- (4) 実作業分野に応用することにより、開発した同時5軸制御加工用CAMソフトウェアの有効性を確認した。

参 考 文 献

- 1) 竹内芳美, 清水弘幸, 出村 健, 渡辺隆弘, 伊藤哲也: ソリッドモデルに基づく5軸制御加工, 精密工学会誌, **56**, 11 (1990) 2063.
- 2) 鈴木 裕, 桑野義正, 後藤勝征, 竹内芳美, 佐藤 眞: 5軸加工用CAMシステムの開発, 精密工学会誌, **60**, 6 (1994) 832.
- 3) 趙 曉明, 葛 東方, 堤 正臣: 同時5軸制御マシニングセンタ用CAMシステムに関する研究, 精密工学会誌, **61**, 12 (1995) 1745.
- 4) 森重功一, 加瀬 究, 竹内芳美: 2次元Configuration空間を用いた5軸制御加工における工具干渉回避法, 精密工学会誌, **62**, 1 (1996) 80.
- 5) 矢野憲太郎: 代数学と幾何学, 裳華房, (1968).