●特集●創発システムとその応用／解説

非線形振動子系のダイナミクスとその機能*

青柳富誌生**

Oscillator Neural Networks and its Applications / Toshio AOYAGI

Key words: phase oscillator, neural network, associative memory, temporal coding

1. 研究の背景

人の脳は長い進化の過程で生物が獲得した生き残りのための適応・学習システムの一つであると考えることができる。今日までの膨大な数の生理学実験から、その基本要素はニューロンであり、それが互いに情報をやり取りし協調的に働くことで、高度で柔軟な情報処理が可能になっていると考えられている。しかしながら、その基本原理は何かというと、今一つ我々の理解は決定的な部分が欠けているように感じられる。その基本原理を一部でも解明すれば、プログラミングしなくても自動的に学習して問題を解決したり、新しい発見や創造的な仕事をサポートする機械がつかれるかも知れない。そのためには、現実の脳を適切にモデル化し理論的に検証する作業が不可欠である。

現実の脳をモデル化する際に最初に問題となるのは、情報を担っているものは何かということである。今日までの膨大な数の生理学実験から、ニューロンが電気的に興奮した発火状態が重要であることは確実である。特に平均発火率（単位時間当たりのスパイクの頻度）という量は、外界からの刺激の情報や筋肉を動かす動作等と比較的明瞭ように対応関係がみられる。この事実から、一つ一つの発火のタイミングなどは粗視化し、各ニューロンの平均発火率の大小が情報を表現しているという前提で、多くの典型的なモデルは構成されている。その極端な例が2値ニューロンであり、発火・非発火の2状態しかない。

しかしながら最近になって、従来重要でないと考えられてきた発火のタイミングが高次の情報処理において重要な役割を果たす可能性に注目が集まっている。比較的早い時期に von der Malsburg ら¹⁾はいわゆる「カクテルパーティ効果」（パーティの喧騒の中でも、自分の名前が会話に出てきたら容易に聞き取れる現象）を題材とした概念モデルを提唱し、発火の相関を利用することの有用性を理論的な側面から指摘していた。また、その後行われた猫の視覚野に関する生理学実験²⁾は、ニューロン間の発火の相関が視覚情報処理において重要な役割を果たしている可能性を示し、この方面の研究を活性化することとなった。発火タイミングを用いることの利点で近年よく言われていることは、バインディング問題をエレガントに解決できる可能性があるという点である。バインディング問題とは、同じグループに属する刺激に由来したニューロンの反応を、互いの発火の相関を利用して弁別するというアイデアである。例えば、青い四角と赤い三角を同時に見せたとき、色に関しては青と赤、形に関しては四角と三角に反応するニューロン群があるであろう。平均発火率だけ見てみると、色と形の組合せはどれが正しいか判別できないが、発火の相関を見ると青と四角は相関があり三角とは無相関であるというように、発火の時間相関によるグループ化を通して情報の統合化を図ろうというわけである。

発火の相関が実際の神経系で情報を処理するのに用いられているかどうかは今日でも意見の分かれるところではあるが、理論的な可能性としてその妥当性を今一度再考し検討するには良い機会である。しかしながら、従来モデルでは平均発火率でダイナミクスが記述されているため、ニューロンの発火タイミングなどを自然には表現できない。そこで上記の問題を念頭に、まず発火タイミングなどを表現し得る最も簡単なモデルを構成し、さらにその情報処理能力を理論的に評価することを試みよう。特に、タイ

* 原稿受付 平成 10 年 8 月 21 日
** 京都大学大学院情報学研究所（京都市左京区吉田本町）
1993 年京都大学理学研究科博士課程物理学専攻修了、理学博士。同年京都大学工学部数理工学科助手、1998 年同大学院情報学研究所助手、現在に至る。研究分野：ニューラルネットワークの理論、非線形力学、統計物理

ミング等のより詳細な機構に情報をコードした場合、その能力がどの程度であるのかを理論的に解析したものはほとんどない。いくら詳細に情報をコードしても、その能力や破壊に対する耐久性が従来モデルよりも劣るのであれば魅力は半減する。モデルを多少限定してもその能力の理論的評価を行うことは、発火のタイミングを情報として用いた際の応用の可能性や生物学的な妥当性を考える上で重要である。

2. 非線形振動子としての神経系のモデル

発火のタイミングを自然に表現でき、数理的にも取扱いが容易な簡単なモデルとはどのようなものであろう？ まず最初に、周期的な発火状態にある N 個の神経系を考えよう。そのような系のダイナミクスは、膜電位やイオンの濃度等の複数の状態変数 X_i (i 番目の系の多変数をベクトルとしてまとめて表した。 $i=1, \dots, N$) を用いて $\dot{X}_i = F_i(X_i)$ と一般に表すことができる。ある神経系とは、一つのニューロンでも良いし、複数のニューロンから構成されるニューロン集団でもよいが、上記仮定より周期 T のリミットサイクル解 $X_{i0}(t)$ が存在するとする。さらに、 N 個の系の相互作用を関数 G_{ij} で表せば、そのダイナミクスは次のように書ける。

$$\dot{X}_i = F_i(X_i) + \sum_j G_{ij}(X_i, X_j) \quad (1)$$

ここで、周期的な発火のタイミングを表現するという観点で考えると、(1) の形で直接取り扱うには不必要に複雑すぎる。位相空間 X_i において非摂動力学系 ($G_{ij}=0$) の周期解 $X_{i0}(t)$ の軌道を描くと、図1のようにその周期 T で一つの閉曲線 C を作る。時間の経過とともに系の状態は軌道上を周回していくわけだが、ニューロンの発火に対応する場所を起点として、一定の時間間隔で軌道上に印をつけ、それを新たな座標変数と考えよう。その変数は一般に位相 ϕ_i と呼ばれ、0 から始まりちょうど 2π の値で起点に戻ってくるように定義する。

相互作用 G_{ij} は弱い摂動と仮定すると、非摂動解 $X_{i0}(t)$ からのズレは小さいと考えられる。すなわち、軌道と直交する方向に関しては多少揺らぐだけで、その揺らぎの影響は結局中立安定である軌道方向のずれとしてマクロに現れてくると考えられる。結論として、相互作用は互いの位相関係（すなわち発火タイミング）に影響を与え、結局 ϕ_i のダイナミクスとして閉じた形で表せることが期待できる。直感的には、軌道と直交するような成分はニューロンのスパイクの波形の変形に対応しており、軌道方向に沿った成分である位相はその波形の時間的な位置を表現していると言える。互いの結合の影響が、スパイクの波形が崩れるほど強くなると、スパイクの発火のタイミングに影響が出るような状況を考えているわけである。

以上のことに限っては、力学系の有効な自由度の通減と

図1 左は周期的な挙動を示す神経系の位相空間 X_{0i} 内での軌跡。その軌道上に位相を定義することで、弱い相互作用がある場合でも右のような単純な力学系に簡約できる。

いう観点でより厳密な系統的理論が構成されている³⁾。それによれば、上に述べた仮定の基で(1)の系は位相方程式 $\dot{\phi}_i = \omega_i + \sum_{j=1}^N \Gamma_{ij}(\phi_j - \phi_i)$ に簡約できることがわかる。ここで、 ω_i はリミットサイクル解の振動数である。一般に相互作用を表す $\Gamma_{ij}(\phi)$ は 2π の周期関数であるが、具体的な形は元のダイナミクス(1)とリミットサイクル解 $X_{i0}(t)$ から求めることができる。解析の便宜上、フーリエモードの最低次で近似した、次の形のモデルが良く用いられる。

$$\frac{d\phi_i}{dt} = \omega_i + \sum_{j=1}^N J_{ij} \sin(\phi_j - \phi_i + \beta_{ij}) \quad (2)$$

ここで、 J_{ij} と β_{ij} は後に学習則によって定めるパラメータである。ここでは簡単のため、今後発火周期はすべて同じ ($\omega_i = \omega_0$) と仮定する。位相方程式(2)とその類似の系は神経系の発火タイミングを表現するモデルとして近年よく見られる。一見するとこれのどこがニューラルネットのモデルなのか疑問をもつ人もあるであろうが、このモデルの背景には単なる現象の形式的な類似だけでなく、上に述べたような一定の理論的基礎があることを理解して頂きたい。

3. 発火タイミングに関する連想記憶モデル

発火タイミングを表現できるミニマムモデルとして、位相方程式系(2)を手にいれたわけであるが、このモデルを使ってどのようなことを調べればよいのであろうか？ ここでは、従来モデルとの比較も念頭に置き、発火タイミングを考慮した連想記憶モデルを構成し、その能力を理論的に評価しよう。ここでいう発火タイミングの連想記憶とは、図2に示されているように、ノイズのかかったパターンから、あらかじめ学習した複数の発火パターンの中でもっとも類似したものを復元するという課題である。学習則は通常の Hebb 学習の拡張された形を用いるが、紙面の都合上詳細は省略する。

3.1 平衡状態の性質（記憶容量）

さて、このネットワークの連想記憶モデルとしての能力はいかほどのものであろうか？ その指標となるのが、記

図2 発火タイミングのパターンの想起過程

初期には本来の位置（破線）からずれていたスパイクが、時間の経過とともに正しいタイミングに修正されていく。

図3 パターン数 $\alpha = P/N$ を増加したときの、最終的な平衡状態でのオーバーラップ m の典型的な振舞い

憶容量 α_c と臨界オーバーラップ m_c である。一般的なオーバーラップ m の定義は、想起すべきパターンと系の状態との内積で定義され、この値が最終的に1にどれだけ近いかが、どれだけ系の状態が想起すべきパターンと近いかを示す。一般に他のパターンを学習したことによる影響により、想起したパターンは必ずしも元のパターンには一致せず多少エラーが含まれるようになる。すなわち、記憶すべきパターンを徐々に増やすと m が徐々に1より低下してゆく。その後、 P_c 個以上のパターンを記憶したとき突然想起が不可能になり、ある有限な m_c から突然 $m=0$ 以外の解がなくなる一次転移が生じる（図3）。この時、記憶容量 α_c はネットワークの素子数を N とすれば $\alpha_c = P_c/N$ で定義される。幾つかの理論解析から、振動子ネットワークでは $\alpha_c \sim 0.038$, $m_c \sim 0.90$ であることが知られている⁴⁾。

3.2 パターンの想起能力（引き込み領域）

実用上は記憶容量だけではなく、どれだけ少ない手がかりから元のパターンを想起可能であるかという点、すなわち引き込み領域の広さが重要である。これに関しては、最近進展が著しい想起過程のダイナミクスを取り扱う理論を適用することで、幾つかの理論的な結果が得られた⁵⁾。図4は、その中の結果の一つであり、理論で得られた引き込み領域の広さを視覚化したものである。下の実線は想起の可否を分ける初期オーバーラップで、上の実線は想起状態における平衡解の最終オーバーラップである。例えば下の実線より大きい初期オーバーラップ（図中のa）からスタートす

図4 想起可能な引き込み領域

実線は理論、□はシミュレーションの結果

れば想起に成功し、最終的にオーバーラップは上の実線に示された値に到達する。実線より小さい初期オーバーラップからでは想起は失敗し（図中のb）、最終的には元のパターンと全く相関のない $m=0$ という状態になる。□はシミュレーションの結果であるが、理論とよく一致していることがわかる。また、引き込み領域は記憶容量の限界に近い場合でも十分広いことがわかり、これは連想記憶のモデルとして大変望ましいことである。

3.3 シナプス結合の切断に対する耐性

神経回路の優れた点の一つとして、一部の素子が多少壊れても実用上の機能は維持できるというロバスト性が挙げられる。例えば、一説によると成人の脳におけるニューロンは1日50万個も死滅しているという話がある。しかし、我々は一生を通じて多少物忘れが増えたり動作がぎこちなくなる程度で、いきなり記憶障害や動作障害になるわけではない。そこで問題となるのは、発火のタイミングという微妙な情報を埋め込んだ結果、結合の破壊等に対してシステムが弱いのではないかという疑念である。すなわち、結合を徐々に切断していった場合、当然ながら記憶容量などは低下していくわけであるが、従来のモデルと比較した場合どうなのであろうか？ 結合をランダムに切断していった場合、どのように性能が劣化するかを理論的に解析した結果、図5のような結果が得られた⁶⁾⁷⁾。意外なことに従来モデルに比較して、振動子モデルのほうが破壊に対しては強いようである。

3.4 スパースコーディング

いままでのモデルは位相のみの自由度に着目し、結果としてコーディングに関係のある各ニューロンは常に周期的な発火状態にあることを暗に仮定していた。しかし、発火するかどうかは通常想起のパターンに依存してダイナミカルに変化するのが自然である。また、脳における実際のニューロンの発火割合は低く、コーディングとしてスパースな表現が用いられているとの見方もある。ここで当然問

図5 結合を切断した際の記憶容量の低下

$1-c$ はランダムに切断した結合の割合, α_c^* は非切断の場合を1と規格化した記憶容量. 実線は振動子のネットワーク, 破線は従来のモデルの場合

図6 スパースコーディング下での記憶容量

α は記憶容量, a はコーディングにおいて発火しているニューロンの割合. H はニューロンの発火のためのしきい値のパラメータ. 実線は理論曲線, エラーバー付きプロットはシミュレーションの結果である.

題になるのは, スパースなコーディングが発火タイミングなどを用いるような状況に対してどのような影響を与えるか, という点である. ここでは, 非発火まで含めて表現できる振動子モデルを, その解析も念頭におきながら構成し, 理論的にその性能の評価を行った*. 解析結果は図6に示されている. 図からわかる通りコーディングがスパース

スになればなるほど記憶容量が増大している. 詳しい解析からこの増大はネットワークがもつ理論的な最大能力に漸近的に近づいていることがわかった. この特徴は従来モデルでも同様であり, この意味で, スパースコーディングの有効性は発火タイミングへ情報をコードしても保たれることが示された.

4. おわりに

本小論では, 振動子型のニューラルネットを用いて発火のタイミングに情報をコードした連想記憶モデルを構成し, その特性に関するいくつかの理論的結果を概説した. 結論として, 振動子ニューラルネットワークにおける連想記憶は, 引き込み領域の広さや破壊に対する耐性に関して, 従来のモデルと匹敵し得る能力を備えていると言える. 一方, 周期的挙動を示す神経系が相互作用している場合, 適切な条件下で振動子モデルの力学系で記述できるという理論的事実がある. このため, ここで得られた知見がある程度一般に成立することが期待でき, この意味で, 得られた結果は発火タイミングを情報処理に利用する試みを支持するものとなっている. また, 将来カオスなどを示すより動的な素子の理解においても, 振動子で得られた知見や位相解析の手法などを用いることで, より見通しの良い研究につながることを期待できる.

参考文献

- 1) C. von der Malsburg and W. Schneider : A Neural Cocktail-party Processor, *Bol. Cybern.*, **54**, (1986) 29.
- 2) C. M. Gray, P. König, A. K. Engel and W. Singer : Oscillatory Responses in Cat Visual Cortex Exhibit Intercolumnar Synchronization Which Reflects Global Stimulus Properties, *Nature (London)*, **338**, (1989) 334.
- 3) Y. Kuramoto : *Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence*, Springer, Berlin, (1984).
- 4) J. Cook : The Mean-field Theory of a Q-state Neural Network Model, *J. Phys., A* **22**, (1989) 2057.
- 5) T. Aoyagi and K. Kitano : Retrieval Dynamics in Oscillator Neural Networks, *Neural Computation*, **10**, (1998) 1527.
- 6) T. Aoyagi and K. Kitano : Effect of Random Synaptic Dilution in Oscillator Neural Networks, *Phys. Rev. E*, **55**, (1997) 7424.
- 7) T. Aoyagi and K. Kitano : Effect of Random Synaptic Dilution on Recalling Dynamics in an Oscillator Neural Network, *Phys. Rev. E*, **57**, (1998) 5914.

* 関連論文は現在投稿中である.