サーボモータ制御系のシステム同定*

— デルタオペレータ法と極・零点相殺によるサーボモータ制御系の同定 —

古 屋 信 幸**

Identification of Servo Motor Control System

— Identification of the System by Delta Operator Method with Pole and Zero Cancellation —

Nobuyuki FURUYA

Servo motors are widely used in NC machine tools and robots. The control accuracy of such machines mainly depends on that of the servo motor. It is necessary to decide the accurate control model in design of the control system or to improve the control accuracy using CAD tool. The parameter identification of servo motor control system is usually done by using FFT analyzer. But the sampled data control is common in the recent servo motor system and the high performance microcomputer is used in the system. So it is convenient if the control computer is used for this purpose. In this report, an identification method using the delta operator is studied. In the discrete time control analysis Z-transform is commonly used, but it is known that it becomes unstable in the short sampling time condition so the delta operator is adopted in this study. In this method, parameters are identified by the least square method and Zero and Pole are solved by the Laguerre method. The order of the transfer function is decided by the Pole and Zero cancellation. The identification results are compared to FFT results and the effectiveness of Pole and Zero cancellation is confirmed experimentally.

Key words: system identification, servo motor, delta operator, Laguerre method, Pole and Zero cancellation

1. 緒 言

サーボモータはロボットを始め NC 工作機械等で広く使用されている。また、サーボドライバと一体として使用されることが多く、制御系はブラックボックスとして詳しいデータはあまり公開しないのが一般的である。しかし、サーボモータを利用する立場からは種々の条件下での詳しい特性を知る必要がある。特に制御系のシミュレーションプログラムを用いて、あらかじめ計画している機構の動的な特性を予測しようとする場合には、制御系の精度の良いモデル化が不可欠である。そのためには実験によりサーボモータ制御系のシステム同定を行う必要がある。システム同定の方法としては FFT¹⁾ を用いて周波数領域で極を推定する方法があるが、出力されたグラフから波形を読みとる場合には熟練が必要とされる。

最近のソフトウェア中心のサーボモータ制御系では高性能のマイクロコンピュータが使われているので、このコンピュータに同定のためのアルゴリズムを組み入れることができれば、特別な計測システムを使わなくてもサーボモータのシステム同定が可能となるはずである。ディジタル制御システムのモデルは、離散化された入出力信号から z 変換に基づくパルス伝達関数でモデル化するのが一般的であるが、制御サンプリング周期が短い場合には連続時間システムに特性に近いデルタオペレータ²⁾ で伝達関数を表す方法も提案されている。 z 変換形で伝達関数を表した制御系を連続系の伝達関数に変換する場合には、サンプリング周期が短くなるほど精度が悪化するという欠点³⁾ があるからである。これは離散化したデータを差分方程式で表現する場合の z 変換演算子がサンプリング周期を短くしていても微分演算子に収束しないためである。その欠点を補うために差分式に対して、近似的な微分を表すデルタオペレータを用いた方法が提案⁴⁾ されている。

本研究では簡便で実用的なサーボモータ制御システムの同定を行う方法を開発するために、デルタオペレータを用いた伝達関数のパラメータを最小二乗法によって推定する方法を考案した。また、その方法で得られた結果を、FFT 解析を利用して周波数特性から同定した結果と比較することによって推定精度の検討を行った。さらに、サーボモータの制御系の次数は 2 次⁵⁾ と考えられるが、仮に伝達関数の次数が未知の場合でも伝達関数の極・零点の相殺から伝達関数の次数を推定する方法⁶⁾ についても検討したので報告する。

2. 伝達関数のデルタオペレータ表現

デルタオペレータは実際の微分操作に近い演算子であり、オペレータを表す記号 δ はラプラス演算子 s と等価となる。

2.1 デルタオペレータの定義

デルタオペレータの定義について説明する。サンプリング周期を T とすると次の式(1)のように表される。

$$\delta = \frac{z-1}{T} \quad (1)$$

上式(1)において、 z が離散時間系モデルにおいてサンプリング周期 T に対する前進差分演算子を表すので、演算子 δ の持つ意味は

$$f'(kT) = \frac{z-1}{T} f(kT) \quad (2)$$

で表される微分演算を行うことと同じになる。ただし、ここで T はサンプリング周期、 k は何番目のサンプル値を表すかのパラメータである。このデルタオペレータを使用して、単一入出力連続時間システムをサンプリング周期 T で離散化した場合、デルタオペレータによる式(3)の伝達関数式を得る。

$$y(kT) = \frac{B(\delta)}{A(\delta)} u(kT) + \varepsilon(kT) \quad (3)$$

* 原稿受付 平成11年10月12日

** 正 会 員 山梨大学工学部 (甲府市武田4-3-11)

Fig. 1 Numerical differentiation of sampled data

ここで ε は測定ノイズを含む誤差である。また $A(\delta)$, $B(\delta)$ は δ の多項式で、パラメータ同定はこの分母、分子の式の各パラメータを実験的に定量的に求めることを意味する。実際の計算では微分は図1に示すように数値微分で置き換える。数値微分は対象とするサンプル値の前後2か所で微分係数を計算してその値を平均し、高次の微分はこの過程を繰返して求める。

2.2 最小二乗法によるパラメータの決定

最初に伝達関数の次数を仮定すると式(3)のデルタオペレータによる伝達関数の形が決まる。次に実験における入力と出力のデータから係数が未知の状態の式(4)の方程式が得られる。各区分での方程式を集めて最小二乗法で係数を決定する。ここで改めて式(3)を展開すると式(4)となる。

$$A(\delta)y(kT) = B(\delta)u(kT) + \varepsilon(kT) \quad (4)$$

ただし、

$$A(\delta) = \delta^n + \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \delta^{n-1-i}$$

$$B(\delta) = \sum_{j=0}^m \beta_j \delta^j$$

また、分子の次数は分母の次数よりも低いものとする。係数と入出力のデータを式(5),(6)のような $m+n+1$ 次元ベクトルで表すと、すべての区間の測定データに関しては式(7)が得られる。

$$\theta^T = [\alpha_0 \ \alpha_1 \ \cdots \ \alpha_{n-1} \ \beta_0 \ \beta_1 \ \cdots \ \beta_m] \quad (5)$$

$$\omega^T = [-y^{(n-1)} \ -y^{(n-2)} \ \cdots \ -y^{(0)} \ u^{(m)} \ u^{(m-1)} \ \cdots \ u^{(0)}] \quad (6)$$

$$y = \Delta \cdot \theta + \varepsilon \quad (7)$$

ただし

$$y^T = [y^{(n)}(0) \ y^{(n)}(1) \ \cdots \ y^{(n)}(N)] \quad (8)$$

$$\Delta^T = [\omega(0) \ \omega(1) \ \cdots \ \omega(N)] \quad (9)$$

である。この関係から測定誤差 ε を最小にするようなパラメータベクトル θ は最小二乗法によって式(10)から求められる。

$$\theta = (\Delta^T \Delta)^{-1} \Delta^T y \quad (10)$$

Fig. 2 Identification system of servo motor

Fig. 3 Experimental result of motor motion and simulation

この過程を測定からパラメータの計算まで一貫してコンピュータで行う。まず入出力データは高速 RAM 領域に実時間で取り込んでから、その後ハードディスク上のファイルに書き込んで処理する。

3. サーボモータ同定実験システム

3.1 実験装置の構成

同定システムの構成は図2に示す。同定対象として用いたのは100Wの同期型のACサーボモータで、定格回転数は3000rpmである。サーボドライバに±6Vの入力電圧を加えると定格回転数でモータは回転する。制御用マイクロコンピュータとしてソフトウェアの便宜を考えパーソナルコンピュータを用いた。パーソナルコンピュータは制御と同時にパラメータの推定の処理も行う。サーボモータへの入出力はいずれもモータの速度信号である。入出力とも12ビットのD/A, A/Dコンバータによって一定サンプリング周期でデータをコンピュータに取り込んだ。

今回の実験では使用したコンピュータの性能による制約からサンプリング周期は最小1msまで設定が可能であった。また、入力曲線はステップ入力、ランプ入力以外にも任意のモータ加減速曲線を生成することが可能である。今回はカム曲線データを設定し、同定実験はカム曲線を入力して行った。また、式(3)の伝達関数のパラメータが定量的に同定されると、逆にルンゲクッタ法によって伝達関数の微分方程式を数値的に解くことでモータの出力をシミュレーションできる。実験はモータ自身の慣性モーメントを基準にして負荷の慣性モーメントを変えて行った。図3はモータ慣性の10倍の負荷をかけて変形正弦曲線の速度入力を行った場合の結果である。

Fig. 4 Experimental results of servo motor system identification and simulation in the case of step input

カム曲線を使用した理由としては、異なった周波数成分を持つ曲線を作ることができること、実際の使用条件に近い状態で伝達関数を求めることができること等があげられる。この結果と実際の実験結果を比較することによっても、同定の精度を評価することが可能である。

3.2 パラメータ同定結果評価実験

最初にステップ状の速度曲線によるパラメータの同定結果の精度評価を試みた。慣性負荷としては、無負荷の場合をモータ固有の慣性負荷の1倍とし、軸にさらに慣性負荷を取り付けることにより4倍、7倍、10倍の負荷を設定した。また、パラメータ同定する場合にはあらかじめ伝達関数の次数を決めておかなければならない。計算次数を高く仮定するにしたがって精度が向上すると思われるが、実際の次数よりかけ離れた場合には余分な極が現れ、かえって同定精度が悪化することもある。最初の実験では速度制御形のサーボモータ制御系で一般的に考えられているサーボモータコントローラの特性を踏まえて、伝達関数を式(11)のような2次遅れ系と仮定した。

$$\frac{B(s)}{A(s)} = \frac{\beta_0}{s^2 + \alpha_0 s + \omega_0^2} \quad (11)$$

図4に示したのが実験結果である。負荷が増加するにしたがってモータの立ち上がり時間が増加している。また、今回の方法で決定されたパラメータでモータの動きをシミュレーションした結果と実験結果を比較するとモータの立ち上がりの部分ではシ

ミュレーションと実験結果はよく一致しているが、一定速度に到達した段階では異なっている。これは同定のモデルはあくまでも線形の範囲であるが、実際のサーボモータコントローラには非線形的な補償が施されているためだと考えられる。

3.3 FFTによる同定結果との比較

パラメータの同定結果の精度を検討する目的で負荷を変えた同様な実験をFFTアナライザを用いて行った。入力信号は対数マルチSIN波を用い、解析周波数レンジは10Hzから1kHzとした。また、入力信号振幅は0.5Vであり、繰返し測定を10回平均化処理した。図5に示したのは負荷が1倍すなわちモータ無負荷の状態と負荷を10倍としたときのFFT解析によるボード線図である。負荷の増加にしたがって、ボード線図の折点周波数が低下していることがわかる。ゲイン線図をみると無負荷の場合には共振点の周波数は100Hz程度のところに存在するが、負荷が増加するに従って減少してゆくのがわかる。負荷が大きい場合には、どこが折れ点周波数になっているかを判断するのに困難が伴う。それに対して本研究で検討している方法では共振周波数が極として得られるので判定がしやすい。

図6に示したのはデルタオペレータ法でステップ入力以外にも、直線状のランプ入力、2次関数の放物線入力でもパラメータ同定を行って求められた伝達関数の極から固有振動数を求め、FFTアナライザを使った解析から求めた結果と比較したものである。ただし、デルタオペレータ法での伝達関数はあらかじめ2次遅れ系と仮定して固有振動数を求めている。負荷の慣性モーメントが小さい場合には固有振動数の間に数倍の差が存在す

るが、負荷が大きくなるにしたがって差は小さくなる。また、入力曲線の相違による差は小さいという結果が得られた。

4. 伝達関数次数の決定

デルタオペレータ法でシステム同定を行う場合は、まず最初に伝達関数の次数を決めなければならないが、伝達関数の次数が未知の場合もあり得る。そのような場合には何らかの方法で次数を推定しなければならない。最尤法⁷⁾などによって次数を決定する方法もあるが、計算機を利用するという前提のもとで最も簡便である極・零点の相殺法を利用した。

4.1 極・零点相殺法

モデルの伝達関数の次数を n 次と仮定する。ここで、このモデルの真の次数を n_0 とすると、 $n > n_0$ ならば、真の次数よりも多く仮定した分、つまり伝達関数の分母を因数分解した根、つまり極と分子を因数分解した根である零点の個数の中で $(n - n_0)$ 個の極と零点の相殺が起こることが知られている。最初に想定される伝達関数式の次数よりも大きな次数を仮定してデルタオペレータ法を適用すれば、余分な次数に関して極・零点相殺が起こる。つまり、

$$(\text{モデルの真の次数}) = (\text{仮定したモデルの極の数}) - (\text{極・零点相殺の数})$$

であるから、真の次数推定が完了する。

本研究では計算機のディスプレイ上で極・零点を複素数平面上にそれぞれプロットし、それを観察することで極・零点間の相殺を確認することにした。まず、予想される次数を n と仮定してパラメータの最小二乗法による推定を行って極と零点を求める。極と零点を求めるには伝達関数の分母、分子の多項式の因数分解を行わなければならない。本研究では極・零点を求めるための高次方程式の解の計算方法として、どのような型の根（実根、複素根、単根、重根）にも対処することができる Laguerre 法⁹⁾を用いている。Laguerre 法は多項式の根と導関数の関係を利用して、最初に1個の根の位置と距離を仮定し、導関数を使って逐次根の位置を改良して行く方法である。伝達関数の分母と分子の多項式から極と零点が求められると結果をディスプレイ上に表示し、観察により極と零点の相殺箇所を確認する。相殺が起こらない場合には仮定次数を1次増やして $n+1$ とし、改めて極と零点を求めて相殺を確認する。この手順を繰り返すと、極と零点の相殺が1回だけ起こる次数より1次だけ低い次数が伝達関数の真の次数であると推定できる。

4.2 極・零点相殺の実験的検証

極・零点相殺による伝達関数の次数の推定と最小二乗法によるパラメータ推定によるシステム同定を一連の流れとして行った実験結果について説明する。実験の条件としてはモータに対してイナーシャ比1倍（無負荷）とした。モータの入力運動曲線はカム曲線のトラペクロイド曲線⁹⁾であり、データのサンプリング周期は1msである。

図7は最初に伝達関数を(a)2次、(b)3次と仮定して求めた結果を極と零点で表示したものである。また図8は伝達関数の次数をそれぞれ(a)4次、(b)5次と仮定した場合の同定結果である。2次と仮定した場合を除き、3次以上の伝達関数を仮定した場合に極・零点の相殺が起こっていることが確認できる。

この結果からもサーボモータ速度制御系の伝達関数次数は2次としてよいことが確認できる。

(a) Response on inertia load ratio 1

(b) Response on inertia load ratio 10

Fig.5 Experimental results by FFT analysis

Fig.6 Natural frequency identified by the delta operator method and FFT analysis

(a) 2nd order model

(b) 3rd order model

Fig.7 Identification results by Pole and Zero cancellation in 2nd and 3rd order

(a) 4th order model

(b) 5th order model

Fig.8 Identification results by Pole and Zero cancellation in 4th and 5th order

5. 結 論

以上の結果から、次数の決定まで含めた総合的なシステム同定の過程を示すと、まず制御系の予測される次数を推定し、最小二乗法によるパラメータ同定を行う。次に仮定の次数を増やしながらパラメータ同定を繰り返し、極・零点間の相殺が初めて起きた次数を真の次数として、そのときのパラメータの値を同定値とする。結論としてはデルタオペレータモデルを用いることで、サーボモータ制御系の入出力データを基に制御モデルパラメータの定量的な同定を行うことが可能であること、伝達関数次数の推定は極・零点相殺による推定方法が有効であることが確認できた。注意する点としてはモータ制御系の非線形要素が現れる状況では信頼性のある同定が行えなくなることが想定されること、実験の過程で真の次数とあまりにもかけ離れた大きな次数を仮定した場合には余分な極や零点が現れる場合があることである。そのような極や零点は数値微分の計算精度上の問題から現れるものと思われるが、真の次数より2次ないし3次程度高い次数では問題はないと考えられる。また、制御系の次数があらかじめ確定できる場合はその次数を設定すればよい。

今回の実験では極と零点の相殺はコンピュータのディスプレイ上に表示したものを人が判断して次数を決定したが、数値的に検討した結果、相殺されると判断した極と零点の距離は極や

零点間の最大距離に対して6.5%であった。この数値は10%程度まで可能ではないかと考えられるが、制御精度や数値計算上の計算精度を考慮して決定する必要があると思われる。実際の制御系に組み込む場合はメモリ上の制約から、より少ないデータで処理ができるように工夫すること、固定小数点演算の制約にも適応できるように更に簡便な計算法を工夫する必要があると考えられるが、今後の課題としたい。

参 考 文 献

- 1) 大明準治, 足立修一: 産業用ロボットのデジタルサーボチューニングシステム, 日本ロボット学会誌, 9, 1 (1991) 55.
- 2) R.H. Middleton and G.C. Goodwin: Digital Control and Estimation, Prentice-Hall, New Jersey, (1990).
- 3) 和田 清: 連続時間系システムのサンプル値データによる同定, 計測と制御, 32, 9 (1993) 712.
- 4) 足立修一: デジタル制御系における同定, 計測と制御, 32, 2 (1993) 128.
- 5) 安川電機製作所: サーボ技術入門, 日刊工業新聞社, (1986).
- 6) 得丸英勝, 添田 喬, 中溝高好, 秋月影雄: 計数・測定, 培風館, (1992) 210.
- 7) 計測自動制御学会編: 自動制御ハンドブック (基礎編), オーム社, (1983) 586.
- 8) W.H. Press, B.P. Flannery, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling and B.P. Flannery (丹慶勝市ほか訳) Numerical Recipes in C, 技術評論社, (1995).
- 9) 牧野 洋: 自動機械機構学, 日刊工業新聞社, (1993) 34.