フラクタル幾何学を適用した多孔性超仕上砥石の 設計法の開発 (第2報)*

— 砥石作用面の形状モデリングと設計支援システム —

樋口誠宏** 山口智実** 矢野章成** 山本 登***
上島 類⁺ 松森 昇⁺⁺ 吉沢 功⁺⁺

Development of Design Technology of Porous Superfinishing Stone Using Fractal Geometry (2nd Report)

— Geometric Modeling of Stone Topography and Design Support System —

Masahiro HIGUCHI, Tomomi YAMAGUCHI, Akishige YANO, Noboru YAMAMOTO,

Rui UESHIMA, Noboru MATUMORI and Isao YOSHIZAWA

This paper illustrates an integrated design procedure for quantifying the manufacturing parameters of the porous superfinishing stone which complies with the specified cutting performance. The outline is as follows. After a stone hardness and a preliminary drawing of stone topography which can be produced by the computer graphics called "fractional Brownian motion" are assumed, the cutting performance is estimated from mathematical models. Such analysis reveals whether the topography and hardness of the stone are optimal or not. If the design fails, these steps are iterated. To find an optimized solution, genetic algorithms have been applied to the iterative design process. The developed GA-based design tool is called SUSFIN (Superfinishing Stone Design Inventor), and has proved fit for practical use as the result of experiments.

Key words: porous superfinishing stone, design technology, geometric modeling, fractional Brownian motion, genetic algorithms, information amount

1. 緒 論

砥石作用面には形状の異なる砥粒切れ刃が3次元的に不規則に分布している。この幾何学構造が材料の除去と切りくずの排出という機能を発現しているため、これを要求される機能に基づいて設計する必要がある。一般に機械設計では、目的の機能を実現する構造を決定する際、形状モデリングが行われる¹⁾。それゆえ、これに準ずる手順で、砥石作用面の形状モデリングを中心に据えた砥石設計法を検討することは意義深いものと思われる。つまり、従来の砥石設計法は、設計仕様として記述された機能から砥石の5因子や形状などの属性、あるいは製造に関する諸量への写像に基づくものばかりで、機能空間から属性空間へ写像する過程で、作用面の形状モデリングを行っている例はみない。これは砥石作用面の複雑、無秩序、不規則な幾何学構造を図的に表現するのが難しいことが原因となっている。

筆者らはフラクタル構造をコンピュータで合成する数学的手法に注目し、これをフラクタルな様相を示す作用面の形状モデリングに応用することを考え、作用面の構造モデルに基づく設計法の確立を試みた²⁾。また同時に、作用面の構造モデルから推定される研削性能を要求と比較し、モデルの修正を通じて最適解に収束させる設計過程を組織化することによって、コンピュータ援用設計を視野に入れた設計システムを開発した。

2. 超仕上砥石の設計システムの概要

超仕上砥石の設計における主な作業は、要求仕上性能を満たす砥石作用面の幾何学的な構造と結合度を決め、そのような仕

様の砥石を実体化するための製造パラメータ値（後述の2種類の樹脂粒子の混合比と成形圧力）を決定することである。開発した設計システム（Superfinishing Stone Design Inventor, 以下 SUSFIN と記す）では、これを遺伝的アルゴリズム（Genetic Algorithm³⁾、以下 GA と記す）を利用して、図1に示す手順で行っている。

まず、目標とする仕上性能を満足するであろう結合度を仮定し、また非整数ブラウン運動（fractional Brownian motion⁴⁾、以下 fBm と記す）を適用して砥石作用面の構造モデルを仮定する。つぎに、この代替案の仕上性能を計算モデル⁵⁾を使って推定し、複数の要求がどの程度満たされているかを情報積算法⁶⁾によって評価する。この工学解析と評価の結果を基に、代替案を遺伝的演算によって逐次的に改良し、最適な砥石作用面の結合度と幾何学構造を得ている。さらに、この仕様の砥石を製造するためのパラメータ値を計算モデルを使って決定している。

SUSFIN が設計対象にする砥石は、二律背反する切りくず排出性と仕上性能の向上を同時に追求する、一般的に設計の難しい多孔性超仕上砥石⁷⁾である。この砥石には、砥粒やビトリファイド結合剤の他に、砥石を多孔質にするために、砥粒の1～10倍の直径をもつ2種類のスチロール樹脂粒子が混合される。また、これらの原料を生砥石にプレス成形する際、圧力が調整される。つまり、これらパラメータの値を以下の範囲内で調整することによって、要求に合わせた砥石が製造される。

直径70 μm の樹脂粒子の砥粒に対する混合比 $w_1 = 2 \sim 18 \text{ wt } \%$
直径10 μm の樹脂粒子の砥粒に対する混合比 $w_2 = 1 \sim 5 \text{ wt } \%$
成形圧力 $p = 7.8 \sim 11.8 \text{ MPa}$ 。

ただし、砥材はWA1200（平均直径13 μm ）、砥粒に対する結合剤の混合比は18 wt %一定とした砥石を対象にする。

次章以降では、本砥石の樹脂粒子の混合比と成形圧力を最適決定するために開発した SUSFIN の設計過程について述べる。

* 原稿受付 平成12年5月18日

** 正 会 員 関西大学工学部（吹田市山手町3-3-35）

*** 関西大学工学部

+ 学生会員 関西大学大学院

++ 正 会 員 朝ミズボ（城陽市寺田袋尻82）

Fig.1 Total design process in SUS-DIN

3. fBmを用いた砥石作用面のモデリング

前報⁵⁾で述べたように、多孔性超仕上砥石の作用面は自己アフィン構造を示す。すなわち、作用面の断面プロファイルの横軸 u のスケールを k 倍に拡大して、元のプロファイルと比較すると、縦軸のプロファイル高さ $f(u)$ は $1/k^H$ 倍になっている。

$$f(u) \propto k^{-H} f(ku) \quad (1)$$

ここで、 H は $0 < H < 1$ の値をとるハースト指数である。

これと同じ性質の図形を合成する数学的手法の一つに fBm がある。SUS-DIN では、機械部品の形状モデルを整数次元の線、面、立体で表現するように、砥石作用面の断面プロファイルのモデルを fBm が合成する非整数次元の折れ線で表現している。

ホワイトノイズと本質的に異なる、一見不規則な軌道を描く運動をブラウン運動という。その一つである非整数ブラウン運動 $X_H(t)$ は時間 t の関数で表され、その任意の時間ステップ Δt に対する変化 $X_H(t+\Delta t) - X_H(t)$ は平均値が 0 で、 Δt^{2H} に比例する分散 $\langle |X_H(t+\Delta t) - X_H(t)|^2 \rangle$ をもつ。

Fig.2 Method of drawing fractal curve by fBm

$$\langle |X_H(t+\Delta t) - X_H(t)|^2 \rangle \propto \Delta t^{2H} \quad (2)$$

それゆえ、時間ステップ Δt を k 倍にすると、分散は

$$\langle |X_H(t+\Delta t) - X_H(t)|^2 \rangle \propto k^{2H} \langle |X_H(t+k\Delta t) - X_H(t)|^2 \rangle \quad (3)$$

のようになり、 $X_H(t)$ の変化は $1/k^H$ 倍になる。このように統計的に自己アフィンな曲線を生成する fBm を用いて、作用面プロファイルのモデルを、以下の要領で描いた。

図 2 は fBm が不規則な曲線を合成する方法を説明するもので、横軸に時間 t を、縦軸に fBm の変化 $X_H(t)$ をとっている。

まず、時間 t を $0 \leq t \leq 1$ として、 $X_H(0)$ に 0 を、 $X_H(1)$ に平均値 0、分散 σ^2 のガウス確率変数に従う任意の値を与える。

$$\langle |X_H(1) - X_H(0)|^2 \rangle = \sigma^2 \quad (4)$$

また、時間軸のスケールをスケーリングファクタ r を用いて、次式のように縮小する。

$$\Delta t = r^n, \quad 0 < r < 1, \quad n = 1, 2, \dots \quad (5)$$

そして、縮小された時間ステップ r^n によって分割された時間 t における $X_H(t)$ の変化として、時間 t_1 における $X_H(t_1)$ と時間 $t_2 = t_1 + r^{n-1}$ における $X_H(t_2)$ を直線補間する内挿値に、分散 σ^2 のガウス変動値 d_n を加えた量を与える。

$$X_H(t_1 + r^n) = X_H(t_1) + r \{ X_H(t_2) - X_H(t_1) \} + d_n \quad (6)$$

ここで、式 (6) のガウス変動値 d_n には、 r^n に比例する分散をもつ、以下の値を与える。

$$d_n^2 = (1 - r^{2-2H}) (r^n)^{2H} \sigma^2 \quad (7)$$

以上のように、時間スケールを式 (5) によって縮小しながら、 $X_H(t)$ の変化を逐次計算することにより、自己アフィン構造をもつ折れ線が合成される。ここで、合成される折れ線 $X_H(t)$ の次元 D は次式で表され、直線のトポロジカル次元 1 よりも大きくなる。

$$D = 2 - H \quad (8)$$

図 3 に、ハースト指数 $H = 0.28$ 、標準偏差 $\sigma = 0.026$ 、スケーリングファクタ $r = 0.39$ を与えて、fBm によって合成した自己アフィン曲線と、フラクタル次元 $D = 1.70$ 、粗さ $r_s = 7.6 \mu\text{mRq}$ の多孔性超仕上砥石の作用面プロファイルを示す。同図に示す両プロファイル高さの確率密度関数がほぼ一致している。

Fig.3 Comparison of the profile trace of fBm with a real stone profile

ことから、fBmによって合成された曲線と砥石作用面プロフィールがよく類似していると言える。このことから、ハースト指数 H と標準偏差 σ とスケールングファクター r を様々に変化させてfBmを実行することにより、多様な砥石作用面プロフィールの形状モデリングが行えることがわかる。

4. GAを用いた最適設計

SUSDINでは、要求仕上性能を実現する砥石作用面の幾何学構造と結合度を最適、かつ自動決定する方法として、GAを採用している。この方法を簡単に述べると、

- 1) 最適化する解候補を綴った文字列の個体、 m 個からなる初期世代の集団をランダムに生成する。
- 2) 各個体の適応度を評価し、個体の淘汰、増殖を行う。終了条件が満たされれば、最良の個体を最適解として出力する。
- 3) 個体群の中から、適応度に比例した確率で個体のペア（親）を選択する。そして、ある確率で交叉を行い、得られた子個体を親個体と置き換える。
- 4) ある確率で個体を突然変異させて、親個体と置き換える。
- 5) 置き換えられた個体を含む集団を次世代として、2)へ戻る。

以上のアルゴリズムを用いて、機械設計の一般的手順と同じように、砥石作用面の幾何学構造と結合度を仮定した後、その仕上性能を推定し、設計要求に対する評価を行って、作用面の幾何学構造と結合度を最適決定する。このとき、実際の砥石設計過程をGA空間における演算過程に、つぎのように対応させている。すなわち、作用面の幾何学構造と結合度の値を記した文字列を個体とし、 m 個の個体を仮定する。そして、設計要求に対する個体の評価に始まる設計行為の試行錯誤を淘汰・増殖、交叉、突然変異の演算に代行させて、作用面の最適な特性値を探索する。

4.1 設計解の遺伝子型表現

超仕上げ砥石の設計では、仕上比 G と仕上率 T と工作物の仕上面粗さ r_w などの仕上性能が設計仕様として与えられるが、これらを満たす砥石作用面の幾何学構造と結合度を決定するために、SUSDINでは次式の計算モデル⁹⁾を利用している。

$$\begin{aligned} G &= 0.12Dr - 0.015Dh + 0.0018r_w h + 0.1 \\ T &= 0.000003r_w h - 0.000032Dh + 0.0039 \\ r_w &= 5.9D^2 - 0.000006h^2 + 14 \end{aligned} \quad (9)$$

ところが、要求仕上性能から砥石作用面の特性を求める逆問題に対して、実験式である計算モデルは整合性のある設計解を与えない。すなわち、3つの計算モデルを同時に満足する作用面プロフィールのフラクタル次元 D と粗さ r_s と結合度 h （ロックウェルHスケール）を与えない。そこで、最適決定したい砥石作用面の特性を個体に対応させて、その値をランダムに個体にコーディングした。このとき、フラクタル次元 D と粗さ r_s を個体に直接コーディングするのではなく、砥石作用面のプロフィールモデルを合成するfBmで使われる変数、すなわちハースト指数 H と標準偏差 σ とスケールングファクター r の各値をコーディングした。

4.2 個体のデコード化

SUSDINでは、個体の表現型へのデコード化を砥石作用面の形状モデリングに対応させて、以下のように行っている。

まず、遺伝子に記述されたハースト指数 H と標準偏差 σ とスケールングファクター r の値を使ってfBmを実行し、砥石作用面のプロフィールモデルをコンピュータのモニタ上に合成す

る。設計者はこれを見て、仮定された作用面の概略構造を知ることができる。つぎに、このモデルのフラクタル次元 D を式(8)より求め、またモデルの2乗平均平方根粗さ r_s を解析する。そして、それらと遺伝子に記述されている結合度 h を式(9)に代入して、仕上比 G' と仕上率 T' と工作物の仕上面粗さ r_w' をそれぞれ推定する。

4.3 適応度関数

図4に示すように、設計仕様として与えられる多孔性超仕上げ砥石の仕上比 G と仕上率 T の間には正の相関が、また、それらと仕上面粗さ r_w の間には負の相関が認められ、仕上性能を評価するパラメータ間にトレードオフ関係が存在する。そのため、例えば図中の☆印の性能をもつ砥石が要求された場合、そのすべてを満たすには、要求以上の仕上率 T と仕上面粗さ r_w を発現する★印の砥石を設計解として導くことが必要となる。

SUSDINでは、このような問題を含む多目的な設計課題を解くために情報積算法を採用した。この方法は個々の要求が満たされる確率を情報量で評価し、その積算値が最小となる解を最適解として採択するというものである。すなわち、設計解の候補を評価するパラメータ u_i のとり値が等確率密度分布するものとし、その分布範囲をシステムレンジ $R_s(u_i)$ と定める。また、設計上要求される範囲をデザインレンジ $R_d(u_i)$ と定め、両レンジの重なる範囲をコモンレンジ $R_c(u_i)$ として、解候補が要求を満たす確率を次式の相互情報量 $I(u_i)$ によって評価する。

$$I(u_i) = \ln R_s(u_i) - \ln R_c(u_i) \quad (10)$$

また、解候補が統計的に独立な複数のパラメータによって評価される場合、各パラメータの相互情報量の和 $\sum I(u_i)$ を求めて、それを解候補が多目的な要求を満たす確率と定めている。このように定義される積算情報量 $\sum I(u_i)$ は、解が要求を満たす確率が高いほど減少するので、最小の積算情報量 $\sum I(u_i)$ をもつ解候補が最適解となる。

以上の積算情報量を用いて設計解の候補、すなわちハースト指数 H と標準偏差 σ とスケールングファクター r 及び結合度 h を綴った個体の適応度をつぎのように評価した。

Fig.4 Interdependence of stock removal rate T , finishing ratio G and surface finish r_w

設計解の候補は仕上比 G と仕上率 T と仕上面粗さ r_w に対する要求を満たしているかどうかを評価する必要がある。そこで、図5に示すように、仕上比 G と仕上率 T については要求値よりも大きい範囲をデザインレンジ $R_d(G)$, $R_d(T)$ とし、また仕上面粗さ r_w については要求値よりも小さい範囲をデザインレンジ $R_d(r_w)$ とした。一方、個体のデコード化によって推定される仕上比 G' と仕上率 T' を上限値、その1/5を下限値とする範囲をシステムレンジ $R_s(G')$, $R_s(T')$ とした。また仕上面粗さの推定値 r_w' を下限値、その5倍を上限値とする範囲をシステ

Fig.5 Information amount used as a fitness measure

ムレンジ $R_s(r_w')$ とした。このようにして各評価パラメータの情報量を求め、その積算値を個体の適応度とした。

4.4 選択淘汰則と遺伝的演算

個体の選択淘汰、いわゆる設計解候補の更新はランク戦略によった。すなわち、適応度の低い個体を淘汰し、残ったエリート個体に対し、交叉と突然変異による遺伝子列の書き換えを行って、次世代に残す個体を生成した。なお、SUSDIN では GA パラメータを以下のように設定した。

個体数：30，世代数：100，交叉確率：0.33

突然変異確率：0.6~0.1に段階的に変化

図6に2種類の遺伝演算子によって書き換えられた個体の表現型の例を示す。図6(a)は1点交叉によって標準偏差とスケールリングファクタが書き換えられた場合の砥石作用面プロフィールモデルの形状変化を示している。これらが大きな値に書き換えられると、刻みが粗く、変動の大きいプロフィールモデルが合成される。また、図6(b)は標準偏差を記述する3ビット目の遺伝子座を突然変異させた例であるが、小さい標準偏差が設定されると、子個体のプロフィールモデルの変動が小さくなるのがわかる。以上のように、砥石作用面のプロフィールモデルと結合度を選択淘汰則と遺伝的演算によって改良し、評価の高い設計解を得ている。

5. 製造パラメータ値の決定方法

砥石作用面の最適なフラクタル次元 D^* と粗さ r_s^* 及び結合度 h^* が決定された後、そのような砥石を実体化する製造パラメータ値、すなわち2種類のスチロール樹脂粒子の混合比 w_1 と w_2 及びプレス成形圧力 p を、前報で述べた計算モデルを解いて求めている。その方法は可能解のすべてを列挙し、それらを次式に逐次代入して D , r_s , h を計算し、 D^* , r_s^* , h^* との差が最小となる製造パラメータ値を見つけて、解とした。

$$\begin{aligned} D &= 1.76 - 0.022w_1 - 0.012w_2 + 0.00025w_1^2 + 0.00056w_1w_2 \\ r_s &= 5.2 + 0.87w_1 + 0.45w_2 - 0.013w_1^2 \\ h &= 47 - 10w_1 - 17w_2 + 3.9p \end{aligned} \quad (11)$$

6. 設計結果と考察

まず、設計結果の一例を述べる。設計仕様として

仕上比 $G=2.5$

仕上率 $T=4 \times 10^{-3} \text{ mm}^3/\text{mm}^2 \cdot \text{m}$

仕上面粗さ $r_w=0.7 \mu\text{m}$

を与えた場合、これらを実現する超仕上げ砥石の製造条件として、

大樹脂粒子の混合比 $w_1^*=10\text{wt}\%$

小樹脂粒子の混合比 $w_2^*=3\text{wt}\%$

成形圧力 $p^*=10.5\text{MPa}$

が導出された。設計された砥石の推定仕上性能は、仕上比 $G'=2.56$ ，仕上率 $T'=4.5 \times 10^{-3} \text{ mm}^3/\text{mm}^2 \cdot \text{m}$ ，仕上面粗さ $r_w'=0.61 \mu\text{m}$ となり、いずれも要求を十分に満たしている。図7はこの砥石の作用面プロフィールモデルとほぼ同条件で製造された超仕上げ砥石の作用面プロフィールを比較したものである。両プロフィールのフラクタル次元 D と2乗平均平方根粗さ r_s と結合度 h

Fig.6 Examples of stone surface profile model made by one-point crossover and bit mutation

（マイナス表示の意味については前報⁹⁾の2章を参照）がほぼ等しいことから、この設計例題に関しておおむね妥当な設計解が得られていると思われる。

つぎに種々の設計要求に対して、SUSDIN がどのような設計解を導くかを調べるために、製造パラメータ値 $\{w_1, w_2, p\}$

を変えて作った $n=45$ 種類の砥石の実測仕上性能 $\{G, T, r_w\}$ を設計仕様として SUSDIN に入力した。そして、各設計仕様に対して導かれた製造パラメータ値 $\{w_1^*, w_2^*, p^*\}$ と試作砥石の製造パラメータ値 $\{w_1, w_2, p\}$ との間の非類似度を、標準化ユークリッド平方距離

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left\{ \left(\frac{w_{1i} - w_{1i}^*}{w_{1i}} \right)^2 + \left(\frac{w_{2i} - w_{2i}^*}{w_{2i}} \right)^2 + \left(\frac{p_i - p_i^*}{p_i} \right)^2 \right\} \quad (12)$$

を計算して検定した。その結果、非類似度の平均は4.39と大きくなり、元の値と違った設計解が導かれていたことがわかった。そこで、この理由を明らかにするために、設計仕様として入力した実測仕上性能 $\{G, T, r_w\}$ と SUSDIN が導出した砥石の推定仕上性能 $\{G', T', r_w'\}$ のそれぞれの散布図を、図8のように描いた。その結果、設計砥石の推定仕上性能は設計仕様よりも優れていることがわかった。すなわち、SUSDIN では、GAによって規定の世代数の範囲内で最良の解を探索するため、設計要求以上の高性能な砥石が設計されることが判明した。以上の検証から、本設計支援システムは所期の開発目標を達成しているものと考えられる。

7. 結 論

本研究では、要求仕上性能を満たす多孔性超仕上げ砥石の製造パラメータ値を最適決定する設計法について検討し、システム開発を行った。その結果、以下のことが明らかになった。

- (1) 非整数ブラウン運動を適用することによって、自己アフィン構造を示す砥石作用面のモデリングが可能となった。
- (2) 情報積算法の適用により、多面的な要求仕上性能を満たす砥石の製造パラメータ値を決定することが可能になった。
- (3) 遺伝的アルゴリズムの適用によって、最適砥石の設計とその自動化が達成された。

参 考 文 献

- 1) G. ボール, W. バイツ, 設計工学研究グループ 訳: 工学設計, 体系的アプローチ, 培風館, (1995).
- 2) M.Higuchi, A.M.Sharif Ullah and A.Yano: The Structural Design of Superfinishing Stone Using Fractal Modeling, Australasia-Pacific Forum on Intelligent Processing and Manufacturing of Materials, (1997), 1072.
- 3) L.Davis: Handbook of Genetic Algorithms, Van Norstrand Reinhold, (1991).
- 4) H.-O. パイトゲン, D. ザウベ編, 山口昌哉監訳: フラクタルイメージ, 理論とプログラミング, シュプリンガー・フェアラーク東京, (1990).
- 5) 樋口誠宏, 矢野章成, 山本 登, 山口智実, 大海英二, 松森 昇, 吉澤 功: フラクタル幾何学を適用した多孔性超仕上げ砥石の設計法の開発(第1報)ー設計公式の構築ー, 精密工学会誌, 65, 6 (1999) 857.
- 6) 中沢 弘, 大坪鉄郎: 情報積算法を応用した最適研削条件決定システムの研究, 精密工学会誌, 57, 5 (1991) 863.

Fig.7 Comparison of the designed stone surface characteristics with those of WA1200RH-57V

Fig.8 Required cutting performance vs. estimated one of designed stones