N C 工作機械の円弧象限切換時運動誤差に与える案内機構の影響*

藤田 純** 濱村 実** 斯波和広*** 垣野義昭† 松原 厚† 大脇悟史††

The Influence of Guide Mechanism to the Circular Interpolation Contouring Error at Quadrant Changing Position in NC Machine Tools

Jun FUJITA, Minoru HAMAMURA, Kazuhiro SHIBA, Yoshiaki KAKINO, Atsushi MATSUBARA and Satoshi OHWAKI

In this paper, the influence of guide mechanism on the contouring errors of circular interpolation motion in the NC machine tools is analyzed theoretically. In order to analyze the errors at the quadrant changes, a dynamical model of a feed drive is proposed. The model can deal with linear rolling guide way, sliding guide way and sliding guide way with influence of wiper seal. By using the model the equations that describe motion of ballscrew or motion of slide table after the quadrant changing position are derived. Calculating the motion, the relation between characteristics of guide mechanism and contouring errors such as stick motion or lost motion is clarified. Some motion tests are conducted, and the measured motions coincide with the calculated motions fairly well.

Key words: NC machine tools, feed drive system, linear rolling guide way, sliding guide way, wiper seal, exponential type lost motion, stick motion, servo parameter

1. 緒 言

工作機械の送り駆動系において、円弧象限切換時には、突起状のスティックモーション¹⁾²⁾、ステップ状のロストモーション、漸増形のロストモーション³⁾等による輪郭運動誤差が生じる。これらの現象は、送り駆動機構の剛性、摩擦係数、非線形ばね特性、サーボ系の応答性と深く関係している。筆者らは、転がりガイドを用いた駆動系における漸増型ロストモーション、スティックモーションの生成機構を、回転系の摩擦トルクおよびガイドの非線形ばね特性⁴⁾をモデル化することにより理論的に解析した⁵⁾。

工作機械のガイドとしては転がりガイドのほかに、すべりガイドもよく用いられ、加工面品位を重視する場合には主流となっている。すべりガイドそのものには、転がりガイドのような非線形ばね特性は通常見られない。しかし、大型機等の特殊なラムワイパーシールや油圧バランスシリンダのパッキンシール等の力学特性が無視できない場合が存在する³⁾。

そこで本論文では、ワイパーシール、パッキンシール等のばね特性も含めて、すべりと転がり両方に使用できる駆動系の力学モデルを提案し、これを用いて案内機構が円弧象限切換時の運動誤差軌跡に与える影響を解析的に求める。また、実験測定結果との比較により妥当性を検証する。

2. 理論解析

2.1 駆動系モデルの導出

ワイパーシールの付いたすべりガイドでは、ガイドの摩擦力は直接移動物に働き、ワイパーシールの摩擦力はワイパー

シールのばね特性を介して働く。従って、すべりガイドを用いた駆動機構にワイパーシール等の変形とその摩擦の影響を考慮した場合の力学的モデルは図1となる。図中の記号は以下のとおりである。

R : 回転角度から直線移動量への変換係数(m/rad)

θ_b : ボールねじ回転角度(rad)

C_r : 回転系のクーロン摩擦トルク(N・m)

P_r : ボールねじ回転位置を直線位置に換算した値(m)

J_b : 回転物イナーシャ(N・m・s²)

K : 駆動機構軸方向剛性(N/m)

M_t : 移動物質量(kg)

P_t : 移動物位置(m)

K_k : ワイパーシール、パッキンシール等の非線形ばね剛性(N/m)

F_f : すべりガイドの摩擦係数(N)

F_k : ワイパーシール、パッキンシール等の摩擦係数(N)

P_k : ワイパーシール、パッキンシール等のしゅう動位置をモデル化したもの

また、これらの駆動機構を駆動する NC サーボ制御系のブロック図を図2に示す。図中の記号は

ω_o : 位置ループゲイン(rad/s)

Fig.1 The dynamic model of the feed drive mechanism

Fig.2 Block diagram of the servo system

* 原稿受付 平成13年7月26日

** 正会員 東芝機械(株)沼津本社(沼津市大岡2068-3)

*** 東芝機械(株)沼津本社

† 正会員 京都大学工学研究科(京都市左京区吉田本町)

†† 京都大学工学研究科(現、(株)村田製作所野洲事業所;滋賀県野洲郡野洲町大字大篠原2288)

ω_s : 積分補償折れ点周波数(rad/s)
 J : モータ軸換算総イナーシャ(N・m・s²)
 ω_c : 速度ループゲイン(rad/s)
 ω_b : ローパスフィルタカットオフ周波数(rad/s)

である。

2.2 すべりガイドではね要素の影響がある場合の解析

駆動系の特性が経路誤差に及ぼす影響を、円弧補間運動の象限切換部について解析する。円弧補間運動はX、Yの2軸でテーブルを駆動する場合を考え、簡単のためにX軸はロストモーションが無く、テーブルの動きはボールねじの動きと一致するとし、Y軸が反転する部分の運動を求める。円弧半径を r (m)、指令速度を F (m/min)とすると、X軸、Y軸の位置指令値 $x_c(t)$ 、 $y_c(t)$ はそれぞれ

$$x_c(t) = r \cos \omega t \quad (1)$$

$$y_c(t) = r \sin \omega t \quad (2)$$

である。ただし $\omega = F/(60r)$ (rad/s)である。

図1、図2を以下の条件により簡略化する。

- (1) 送り速度が比較的遅い場合を考え、移動物に対する慣性力の影響を無視する。これにより、移動体の質量を無視する。
- (2) 粘性摩擦力を無視し、クーロン摩擦のみ考慮する。
- (3) 移動方向反転時に移動物が停止している場合以外は、サーボ制御系を図3に示すモデルのように、カットオフ周波数 ω_o の一次遅れで近似する。
- (4) 速度制御系内の一次遅れフィルタは、低い周波数領域の特性に影響を与えないので省略する。
- (5) 図1中に K_k で表した非線形ばね特性を、図4の平行四辺形で近似する。図中の変位は P_t と P_k の差 $P_t - P_k$ である。図中の記号は以下のとおりである。

F_{kmax} : ワイパーシール、パッキンシール等の最大摩擦力(N)

D_{kmax} : ワイパーシール、パッキンシール等が最大摩擦力に達したときの変位量(m)

D_{k0} : 摩擦力が0になったときに残存する変位量(m)

F_{k1} : 非線形ばね特性の剛性が変化する摩擦力(N)

D_{k1} : 非線形ばね特性の剛性が変化する変位量(m)

K_{k1} : 非線形ばねの剛性が高い部分の剛性値(N/m)

K_{k2} : 非線形ばねの剛性が低い部分の剛性値(N/m)

D_{k2} : 剛性が低い部分の傾きを延長して力が0となるときの変位量(m)

また、図1のばね K および K_k が中立の状態で $P_t = P_t = P_k$ とする。

この場合のモータ発生トルク $T(t)$ (N・m)、ガイド摩擦力 $F_f(t)$ (N) と非線形ばね要素摩擦力 $F_k(t)$ (N) をあわせた推力 $F_t(t)$ (N)、ボールねじの回転位置を軸移動位置に換算した値 $y_r(t)$ (m)、テーブル位置 $y_t(t)$ (m) を求める。

定常状態では、ボールねじの回転位置を直線移動位置に換算した値 $x_r(t)$ 、 $y_r(t)$ は次式となる。

$$\begin{aligned}
 x_r(t) &= G_o r \cos(\omega t - \alpha) \\
 y_r(t) &= G_o r \sin(\omega t - \alpha) \\
 G_o &= \omega_o / \sqrt{\omega_o^2 + \omega^2}, \quad \alpha = \tan^{-1}(\omega / \omega_o)
 \end{aligned} \quad (3)$$

移動開始後の過渡状態が収束した後、時刻 t_0 において、 $y_r(t)$ が円弧の頂点に達する場合を考える。このとき $Y_0 = y_r(t_0)$ 、 $Y_0 = y_r(t_0)$ とする。ガイドおよび非線形ばね要素の摩擦力が F_{fmax} 、 F_{kmax} であるので、推力、モータ発生トルクおよびテーブル位置は次式となる。

Fig.3 Simplified block diagram of the servo system

Fig.4 Simplified nonlinear behavior of the wiper seal or packing seal

$$F_t(t_0) = F_{fmax} + F_{kmax} \quad (4)$$

$$T(t_0) = RF_t(t_0) + C, \quad (5)$$

$$y_r(t_0) = Y_0 - F_t(t_0) / K \quad (6)$$

この状態から、位置指令 $y_c(t)$ が変化しても、モータ発生トルクが $RF_t(t_0) - C$ になるまでボールねじは回転しない。従って、図2の θ_b は一定値となり、速度フィードバックは0となる。この場合は文献³⁾の3.2節で示したように、時刻 t_0 からボールねじが回転を開始する時刻 t_{0ss} までのトルクが次式となる。ただし $\theta_0 = \omega t_0$ である。

$$T(t) = \frac{J\omega_o\omega_c}{R} \{a(t-t_0)^3 + b(t-t_0)^2 + c(t-t_0)\} + R(F_{fmax} + F_{kmax}) + C, \quad (7)$$

$$a = -\frac{r\omega^2}{6} \{\omega \cos \theta_0 + \omega_s \sin \theta_0\}$$

$$b = -\frac{r\omega}{2} \{\omega \sin \theta_0 - \omega_s \cos \theta_0\}$$

$$c = r\omega \cos \theta_0 + r\omega_s \sin \theta_0 - \omega_s Y_0$$

時刻 t_{0ss} で、モータの発生トルクが回転系の摩擦トルクを超えて、ボールねじが再び回転を始める。しかし、ガイドの摩擦力のためにテーブルはまだ移動しない。トルクがガイドの摩擦力を超えて、テーブルが動き始める時刻を t_{0ss} とすると $t_{0s} < t < t_{0ss}$ ではトルクは次式となる(付録1参照)。

$$T(t) = K_0 \sin(\omega t + \varepsilon + \phi) - \frac{E}{C} + K_1 e^{\lambda_1(t-t_{0s})} + K_2 e^{\lambda_2(t-t_{0s})} \quad (8)$$

時刻 t_{0ss} を過ぎるとテーブルも動き出す。 t_{0ss} からのボールねじの動き $y_r(t)$ は次式となる(付録2参照)。

$$\begin{aligned}
 y_r(t) &= G_o r \sin(\omega t - \alpha) \\
 &+ \left\{ Y_0 - \frac{2F_{fmax}}{K} - G_o r \sin(\theta_2 - \alpha) \right\} e^{-\omega_o(t-t_{0ss})}
 \end{aligned} \quad (9)$$

一方、テーブルの動きは非線形ばね特性の影響を受ける。テーブルが反転移動を開始する直前は図4の①に相当し、テーブルの移動と共に②から③へ移る。②に到達する時刻を t_1 、③に到達する時刻を t_2 とすると、非線形ばね要素の摩擦力 $F_k(t)$ は次のようになる。

(I) $t_{0ss} < t \leq t_1$

$$F_k(t) = K_{k1} \left\{ y_r(t) - \left(Y_0 - \frac{2F_{fmax}}{K} \right) \right\} + F_{kmax} \quad (10)$$

Table 1 Equation for the movement of quadrant changing position using sliding guide way with exponential type lostmotion

Time	t_0		t_{0s}		t_{0ss}		t_1		t_2	
$y_r(t)$	y_{r0}	y_{r0}	y_{r0}	$y_{r0} + F_k(t)/K$	$y_{r0} - (F_{fmax} - F_{kmax})/K$	Eq. (9)	Eq. (9)	Eq. (9)	Eq. (9)	Eq. (9)
$y_f(t)$	y_{f0}	y_{f0}	y_{f0}	y_{f0}	y_{f0}	$y_f(t) - F_k(t)/K$	$y_f(t) - F_k(t)/K$	$y_f(t) - F_k(t)/K$	$y_f(t) + (F_{fmax} + F_{kmax})/K$	$y_f(t) + (F_{fmax} + F_{kmax})/K$
$F_f(t)$	$F_{fmax} + F_{kmax}$	$F_{fmax} + F_{kmax}$	$F_{fmax} + F_{kmax}$	$\{T(t) + C_r\}/R$	$-(F_{fmax} - F_{kmax})$	Eq. (10)(13)	$-(F_{fmax} + F_{k1})$	Eq. (11)(13)	$-(F_{fmax} - F_{kmax})$	$-(F_{fmax} + F_{kmax})$
$T(t)$	$R(F_{fmax} + F_{kmax}) + C_r$	Eq. (7)	$R(F_{fmax} + F_{kmax}) - C_r$	Eq. (8)	$-R(F_{fmax} - F_{kmax}) - C_r$	$RF_k(t) - C_r$	$-R(F_{fmax} + F_{k1}) - C_r$	$RF_k(t) - C_r$	$-R(F_{fmax} + F_{kmax}) - C_r$	$-R(F_{fmax} + F_{kmax}) - C_r$

(II) $t_1 < t \leq t_2$

$$F_k(t) = K_{12} \left\{ y_r(t) - \left(y_{r0} - \frac{2F_{fmax}}{K} - \frac{F_{kmax} + F_{k1}}{K_{11}} \right) \right\} - F_{k1} \quad (11)$$

(III) $t_2 < t$

$$F_k(t) = -F_{kmax} \quad (12)$$

ただし、

$$K_{11} = \frac{KK_{k1}}{K + K_{k1}}, \quad K_{12} = \frac{KK_{k2}}{K + K_{k2}}$$

である。駆動機構に加わる推力 $F_f(t)$ およびテーブルの動きは、次式に式(9)(10)(11)(12)を用いて求められる。

$$F_f(t) = -\{F_{fmax} - F_k(t)\} \quad (13)$$

$$y_f(t) = y_r(t) - F_f(t)/K \quad (14)$$

以上求められた関係を表1にまとめて示す。

2.3 転がりガイドを用いた場合

転がりガイドを用いた場合は、図1のモデルで $F_f=0$ とし、 K_k を転がりガイドの非線形ばね特性、 P_k を転がりガイドの転動体とレールの接触位置をモデル化したものと考えれば、文献⁵⁾のモデルおよび解析結果と一致する。この場合、転がりガイドの非線形ばね特性も図4で近似し、ガイドの最大摩擦力を F_{kmax} とする。

2.4 すべりガイドを用いてばね要素の影響がない場合

また、すべりガイドを用いてワイパーシール、パッキンシール等の影響がない場合は、ガイドの摩擦のみ考慮すればよ

いので、図1で $F_k=0$ 、 $K_k=0$ としたモデルとなる。この場合は、 t_0 から t_{0ss} までは、表1および式(7)(8)で $F_{kmax}=0$ とし、 t_{0ss} 以降は、 $F_f(t) = F_f(t_{0ss})$ 、 $T(t) = T(t_{0ss})$ 、 $y_f(t) = y_r(t) - F_f(t_{0ss})/K$ となり、 $y_r(t)$ は式(9)となる。

(a) Y axis position and radius error

(b) Y axis torque

Fig.6 Calculated values after Y axis quadrant changing position using sliding guide way

(a) Y axis position and radius error

(b) Y axis torque

Fig.5 Calculated values after Y axis quadrant changing position using linear ball guide way

(a) Y axis position and radius error

(b) Y axis torque

Fig.7 Calculated values after Y axis quadrant changing position using sliding guide way with influence of wiper seal

Table 2 Parameters for the calculation of movement

K N/m	2.0×10^8
F_{fmax} N	500
F_{kl} N	100
D_{kl} m	5.0×10^{-5}
F_{kmax} N	500
D_{kmax} m	1.0×10^{-4}
R	1.592×10^{-3}
C_r N·m	2.8
J N·m·s ²	3.0×10^{-2}
ω_θ rad/s	50.0
ω_c rad/s	300
ω_a rad/s	100

2.5 象限切替時の運動の比較

以上求められた式を用いて、円弧象限切替時のトルク、ボールねじ位置、テーブル位置および円弧半径誤差を計算し、ガイドの特性の違いが、運動に及ぼす影響を調べる。比較のために使用するパラメータの値はすべて同じとし、表 2 の値を用いる。また、円弧半径 70mm、送り速度 1000mm/min とする。

図 5 が転がりガイドを用いた場合、図 6 がすべりガイドを用いた場合、図 7 がすべりガイドでばね要素がある場合の計算結果である。図 5 と図 6 では、転がりガイドの最大摩擦力 F_{fmax} とすべりガイドの摩擦力 F_{fmax} および軸方向剛性を同じとしたので、最終的なロストモーションによる段差の大きさは同じで約 $5 \mu\text{m}$ になる。しかし、ロストモーションの現れ方、スティックモーションによる突起状誤差の大きさに差があることが分る。転がりガイドでは、漸増形ロストモーションが発生しているのに対し、すべりガイドではステップ形ロストモーションになっている。また、スティックモーションによる突起の頂点までの高さを比べると、すべりガイドのほうが $6 \mu\text{m}$ ほど高くなっている。

Fig.8 Measured values after Z axis quadrant changing position using sliding guide way

突起の高さに差が現れるのは、定性的には以下のように説明できる。転がりガイドでは、回転系の摩擦に打ち勝ってボールねじが回転を開始すると、ガイドの非線形ばねの影響により、テーブルも移動を開始する。このためガイドの摩擦力による突起が発生しない。これに対し、すべりガイドでは、ボールねじが回転を開始するまでは、同様に突起が発生し、回転を開始しても、ガイドの摩擦力を超えるまでのロストモーションおよびサーボ系の応答遅れにより、さらに突起が増大する。このため、摩擦、サーボ系のゲイン等の条件が同じでも、すべりガイドのほうがスティックモーションによる突起状誤差が大きくなる。

図 7 のすべりガイドにばね要素が付加された場合は、全体の摩擦力が増えるため、ロストモーションが増加する。しかし、スティックモーションは図 6 のすべりガイドの場合と比較して増加していない。これは、トルクがガイドの摩擦力に打ち勝った時点でテーブルが動き出し、その後にロストモーションが漸増するためである。

3. 検証実験

3.1 すべりガイドを用いた場合の実機測定

すべりガイドを用いた小型の横中ぐり盤の円弧補間運動を測定した。なお、Y 軸が垂直軸なので X-Z 軸で測定を行った。測定は CNC の内部で、モータのトルク指令値、モータ直結のロータリエンコーダフィードバック値、および機械に取り付けたりニアスケールフィードバック値を、定期的にメモリカードに書き込むことにより行う。これをパーソナルコンピュータに読み込んで解析した。なお、制御方式はセミクロードループ方式であり、サーボのパラメータ設定値は表 3 の通りである。円弧半径 70mm、送り速度 1000mm/min の条件で円弧補間運動を行った場合のボールねじ位置、テーブル位置、

Fig.9 Calculated values after Z axis quadrant changing position using sliding guide way

Table 3 Servo parameters for the measured machine

ω_p rad/s	30.0
ω_c rad/s	150
ω_n rad/s	50

Table 4 Estimated parameters for the measured machine

K N/m	2.5×10^8
F_{fric} N	700
R	1.592×10^{-3}
C_v N·m	1.4
J N·m·s ²	3.0×10^{-2}

半径誤差およびトルクの測定結果を図 8 に示す。ボールねじが反転後ロストモーション分程度移動してから、テーブルが動き出すのが分る。

3.2 計算値との比較

図 8 の測定結果から推定したパラメータを表 4 に示す。この値と 2.4 節のすべりガイドを用いた場合に従い、円弧象限切換時のトルク、ボールねじ位置、テーブル位置および円弧半径誤差を計算した結果を図 9 に示す。スティックモーションによる突起の高さ、発生のタイミング等、実測結果とかなり良く一致している。

3.3 転がりガイドを用いた場合

転がりガイドにより漸増形ロストモーションが発生している X-Y テーブルにおいて、Y 軸象限切換時の半径誤差を交差格子法⁵⁾で測定した結果および、3.1 節と同様に Y 軸ボールねじ位置とテーブル位置を測定した結果を図 10 に示す。リニアスケールの分解能が $1 \mu\text{m}$ であるためテーブル位置の検出が粗くなっているが、ボールねじの反転運動に追従してテーブルが反転移動していることが分る。

4. 結 言

すべりと転がり案内両方に適用できる駆動系の力学モデルを提案し、円弧象限切換時の運動誤差を解析的に求め、実験にて検証した。本論文で得られた主な結果は以下の通りである。

- (1) 円弧象限切換時の運動が、駆動機構構成要素の力学的特性およびサーボ系のパラメータ値との関係を用いた式で表され、これらの影響を定量的に予測できるため、円弧象限切換時の誤差診断が体系的かつ定量的に行える。
- (2) 転がりガイドを用いた場合には、ボールねじが反転移動を開始すると、ほぼ同時にテーブルも移動を開始する。このため、スティックモーションに対するガイドの摩擦の影響が小さくなる。

[付録 1] t_{0s} から t_{0ss} における $T(t)$ の導出

時刻 t_{0s} から t_{0ss} における駆動系のブロック線図を描くと図 11 となる。このブロック線図に従い、運動方程式を求めると次式となる。

$$J_b \ddot{\theta}_b + RK(R\theta_b - y_t(t_0)) = T \quad (\text{A.1})$$

Fig.10 Measured values after Y axis quadrant changing position using linear ball guide way

- (3) すべりガイドでは、ボールねじが反転移動を開始しても、ガイドの摩擦力によりテーブルはすぐには移動を開始しない。このため、ガイドの摩擦力によりスティックモーションが増大する。
- (4) すべりガイドにおいてもワイパーシール等のばね要素の影響がある場合、転がりガイドで発生したと同様の漸増形ロストモーションが発生する。

参 考 文 献

- 1) 垣野義昭, 井原之敏, 中津善夫, 篠原章翁: NC 工作機械の運動精度に関する研究(第 6 報) - 円弧補間送り時のスティックモーションの生成機構とその補正 -, 精密工学会誌, 56, 4 (1990) 739.
- 2) 堤 正臣, 大友誠司, 岡崎裕一, 酒井浩二, 山崎和雄, 葛 東方: 摩擦を考慮した CNC 工作機械の送り駆動機構の数学モデル, 精密工学会誌, 61, 10 (1995) 1458.
- 3) 羽山定治, 伊東正頼, 大岳信久, 藤田 純, 黒川哲郎, 垣野義昭: NC 工作機械送り駆動系における漸増形ロストモーションの生成機構とその補正に関する研究, 精密工学会誌, 62, 2 (1996) 247.
- 4) 大塚二郎, 青木一平, 石河智海: 転がり要素の非線形ばね特性の研究(第 1 報) - 簡易測定法 -, 精密工学会誌, 66, 6 (2000) 944.
- 5) 藤田 純, 羽山定治, 濱村 実, 斯波和広, 垣野義昭, 松原 厚, 大脇悟史: NC 工作機械の円弧象限切換時運動誤差の理論解析, 精密工学会誌, 67, 1 (2001) 152.
- 6) W.Knapp, J.Vicha, A.Moergeli u. G.Jäger: Kreisformtest für hohe Bahngeschwindigkeiten, Werkstatt u. Betrieb, 127, 10 (1994) 790.

低速の場合を考えれば、慣性力はばね力に比べて非常に小さいので、第 1 項を無視して

$$\theta_b = \frac{T}{R^2 K_z} + \frac{y_t(t_0)}{R} \quad (\text{A.2})$$

両辺を微分して、

$$\dot{\theta}_b = \frac{\dot{T}}{R^2 K_z}, \quad \ddot{\theta}_b = \frac{\ddot{T}}{R^2 K_z} \quad (\text{A.3})$$

Fig.11 Block diagram of driving mechanism.

Fig.12 Block diagram of servo system

が得られる。一方、サーボ系は図 12 となり、次式が得られる。

$$T = J\omega_o \left(\dot{y}_c + \omega_a \int y_c dt \right) \quad (\text{A. 4})$$

$$\dot{y}_c = (y_c - R\theta_b) \frac{\omega_o}{R} - \dot{\theta}_b \quad (\text{A. 5})$$

式(A. 4), (A. 5)を微分し

$$\dot{T} = J\omega_o (\dot{y}_c + \omega_a y_c) \quad (\text{A. 6})$$

$$\dot{y}_c = (\dot{y}_c - R\dot{\theta}_b) \frac{\omega_o}{R} - \ddot{\theta}_b \quad (\text{A. 7})$$

式(A. 6)へ式(A. 5), (A. 7)を代入してまとめると

$$\dot{T} = J\omega_o \left\{ -\ddot{\theta}_b - (\omega_o + \omega_a)\dot{\theta}_b - \omega_a\omega_o\theta_b + \frac{\omega_o}{R}(\dot{y}_c + \omega_a y_c) \right\} \quad (\text{A. 8})$$

これに式(A. 2), (A. 3)を代入してまとめると次式になる。

$$\frac{1}{R^2 K} \ddot{T} + \left(\frac{1}{J\omega_o} + \frac{\omega_o + \omega_a}{R^2 K} \right) \dot{T} + \frac{\omega_a \omega_o}{R^2 K} T = \frac{\omega_o}{R} (\dot{y}_c + \omega_a y_c) - \frac{\omega_a \omega_o}{R} y_c(t_0) \quad (\text{A. 9})$$

y_c およびその微分は次のようになる。なお $\theta_1 = \omega t_{0s}$ である。

$$y_c(t) = r \sin(\omega t + \theta_1) \quad (\text{A. 10})$$

$$\dot{y}_c(t) = r \cos(\omega t + \theta_1) \quad (\text{A. 11})$$

式(A. 10), (A. 11)を式(A. 9)に代入してまとめると

$$A\ddot{T} + B\dot{T} + CT = D \sin(\omega t + \theta_1 + \varepsilon) - E \quad (\text{A. 12})$$

となる。ここで

$$A = \frac{1}{R^2 K}, \quad B = \frac{1}{J\omega_o} + \frac{\omega_o + \omega_a}{R^2 K}, \quad C = \frac{\omega_a \omega_o}{R^2 K}$$

$$D = \frac{\omega_o r \sqrt{\omega^2 + \omega_a^2}}{R}, \quad E = \frac{\omega_a \omega_o}{R} y_c(t_0), \quad \varepsilon = \tan^{-1} \left(\frac{\omega}{\omega_a} \right)$$

である。次に初期条件を求める。式(7)を微分して

$$\dot{T} = \frac{J\omega_o \omega_c}{R} \{ a(t - t_0)^2 + 2b(t - t_0) + c \} \quad (\text{A. 13})$$

時刻 t_{0s} のモータ発生トルクはガイドの摩擦力から C_r を引いた値になっていることおよび、式(27)から、初期条件を

$$T = R(F_{fmax} + F_{kmax}) - C_r \quad (\text{A. 14})$$

$$\dot{T} = D_T, \quad D_T = \frac{J\omega_o \omega_c}{R} \{ 3a(t_{0s} - t_0)^2 + 2b(t_{0s} - t_0) + c \} \quad (\text{A. 15})$$

として、式(A. 12)の微分方程式を解けば、トルクが次のように求められる。

$$T(t) = K_0 \sin(\omega t + \theta_1 + \varepsilon + \phi) - \frac{E}{C} + K_1 e^{\lambda_1 t} + K_2 e^{\lambda_2 t} \quad (\text{A. 16})$$

ここで、

$$K_0 = \frac{D}{\sqrt{(C - \omega^2 A)^2 + \omega^2 B^2}}$$

$$K_1 = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \left[-\omega K_0 \cos(\theta_1 + \varepsilon + \phi) + \lambda_2 K_0 \sin(\theta_1 + \varepsilon + \phi) \right.$$

$$\left. - \lambda_2 \left\{ R(F_{fmax} + F_{kmax}) - C_r + \frac{E}{C} + D_T \right\} \right]$$

$$K_2 = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \left[-\omega K_0 \cos(\theta_1 + \varepsilon + \phi) + \lambda_1 K_0 \sin(\theta_1 + \varepsilon + \phi) \right.$$

$$\left. - \lambda_1 \left\{ R(F_{fmax} + F_{kmax}) - C_r + \frac{E}{C} + D_T \right\} \right]$$

$$\lambda_1 = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}, \quad \lambda_2 = \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

$$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{\omega B}{\omega^2 A - C} \right)$$

である。時刻 t_{0s} から応答を開始するように書き換えて、

$$T(t) = K_0 \sin(\omega t + \varepsilon + \phi) - \frac{E}{C} + K_1 e^{\lambda_1(t-t_{0s})} + K_2 e^{\lambda_2(t-t_{0s})} \quad (\text{A. 17})$$

となる。

[付録 2] t_{0ss} からの $y_r(t)$ の導出

このときのサーボ制御系を図 3 とみなすことにより、次の微分方程式が得られる。

$$\frac{1}{\omega_o} \frac{d}{dt} y_r(t) + y_r(t) = y_c(t) \quad (\text{A. 18})$$

テーブルが動き出す直前のボールねじ回転位置を送り方向に換算した値は $Y_{r0} - 2F_{fmax}/K$ である。初期条件

$$y_r = Y_{r0} - \frac{2F_{fmax}}{K} \quad (\text{A. 19})$$

および、 $\theta_2 = \omega t_{0ss}$ として式(A. 18)を解けば $y_r(t)$ が次式となる。

$$y_r(t) = G_o r \sin(\omega t - \alpha) + \left\{ Y_{r0} - \frac{2F_{fmax}}{K} - G_o r \sin(\theta_2 - \alpha) \right\} e^{-\omega_o(t-t_{0ss})} \quad (\text{A. 20})$$