形体計測における不確かさの見積り（第2報）*

—円形体の計測における形状偏差の寄与—

高増 潔** 野坂健一郎*** 阿部 誠† 古谷涼秋‡ 大園成夫‡

Estimation of Uncertainty in Feature Based Metrology (2nd Report)
— Uncertainty from Form Deviations in Circle Measurement —

Kiyoshi TAKAMASU, Kenichiro NOSAKA, Makoto ABBE, Ryoshu FURUTANI and Shigeo OZONO

In coordinate metrology, how to estimate the uncertainty of measurement in the specific measuring strategy is a key technique. The estimation method for uncertainties of measured parameters has been already proposed when the only random errors are put in the consideration. In this paper, the effects of systematic errors are theoretically analyzed to estimate the uncertainties in feature-based metrology. A circle feature with form deviations is measured by a coordinate measuring machine. When form deviations have autocorrelation function in position of measured points, the autocorrelation function influences the results of measurement as unknown systematic errors. The method to calculate the error matrix is statistically derived. Using this method, the uncertainties of the measured parameters can also be calculated dealing with autocorrelation function of the measured circle. The series of simulations for this method in statistical way directly implies that the concept and the basic data processing method in this paper are useful to the feature based metrology.

Key words: CMM, coordinate measuring machine, feature based metrology, uncertainty of measurement, form deviation, autocorrelation function, circle feature

1. 緒 言

座標測定機を用いて、形体のパラメータを測定する形体計測においては、それぞれの測定結果に対する不確かさの見積りが重要な役割を持っている¹⁾²⁾。以下、本論文では不確かさの要因については「誤差」という用語を使用し、結果として計算される値を「不確かさ」と呼ぶ。また、式においては標準偏差（または分散）で表現することとする。最終的な拡張不確かさは包含係数 k （普通は $k=2$ ）を掛けることで計算できる³⁾。

不確かさの見積りにおいて、未知の系統誤差の影響はまだ理論的な解析が進んでいない。未知の系統誤差としては、測定戦略による誤差、スケールの低次の誤差、温度ドリフト、プローブの方向性の誤差、測定物の形状偏差などが考えられるが、前報ではプロービングシステムの校正作業による未知の系統誤差を取り上げ、その数学的な取扱いについて理論的な定式化を行った⁴⁾。本報では、測定物の形状偏差の影響を円形体の測定を例として検討する。未知の系統誤差による不確かさ（これを未知の系統効果という）を見積もる手法として、計算機シミュレーションによる手法が提案されている⁵⁾⁶⁾。しかし、計算機シミュレーションの方法は、限定された要因を考慮しているだけで、まだ不十分である。特に、本報で取り上げる形状偏差については、現時点では考慮されていない。しかし、座標測定機の利用を考えると、実際には測定物の形状偏差が最も大きな要因のひとつとなっている。また、形状偏差の影響に対する理論的な研究が進んでいないため、形状

偏差を持つ測定物をどのような測定戦略で測定するかという検討が行えず大きな問題となっている⁷⁾⁸⁾。

本報では、円形体を測定する場合を例にして、測定物の持つ形状偏差が測定の不確かさにどのような影響を与えるかを理論的に定式化する。

2. 円形体のパラメータ

形状偏差がない円形体のパラメータ（直径と中心座標）の定義は、一意的にできるが、形状偏差を含んだ円形体のパラメータの定義は複数考えられる。ISO/TC 213/WG 12 では、形体の寸法として最小二乗寸法、最小外接寸法、最大内接寸法などが提案されている。本報では、円形体のパラメータを最小二乗寸法に準拠して以下のように定義する。

「系統的な誤差が無視できる座標測定機で、円形体を均一に充分多くの測定点で測定し、その測定点から最小二乗円を計算したときのプローブ径補正後の直径と中心座標」

この条件で、円形体を測定した場合のパラメータの不確かさについては、前報と同様に、式(1)および式(2)で計算できる。ここで、 C は測定値からパラメータを計算するための線形係数であり、測定点の位置を示すヤコビ行列 A および測定値の誤差を示す誤差行列 S によって計算される。 C と S によりパラメータの不確かさを表す行列 P が計算できる。式(3)で示される P の対角要素の s_x^2 、 s_y^2 および s_d^2 がそれぞれ、測定円の中心の X 座標と Y 座標および直径の不確かさを示し、非対角要素がそれぞれの共分散を示す。

誤差行列 S については、形状偏差を偶然誤差と見なす場合と形状偏差に位置による相関があると見なした場合の二種類の考え方があり、図1に示す円形体で、(a)と(b)はそれぞれ形状偏差が標準偏差で $1\mu\text{m}$ の円形体を示しているが、(a)では形状偏差は完全にランダムに与えられている。一方、(b)では位置に近い測定点における形状偏差は正の相関を持

* 原稿受付 平成14年9月30日

** 正会員 東京大学大学院工学系研究科（東京都文京区本郷7-3-1）

*** 学生会員 東京大学大学院工学系研究科

† 正会員 （株）ミットヨつくば研究所（つくば市上横場430-1）

‡ 正会員 東京電機大学工学部（東京都千代田区神田錦町2-2）

っている。

形状偏差を偶然誤差と見なした場合の誤差行列 S_{ran} は偶然誤差間には相関がないため、式 (4) のように形状偏差の分散 s_f^2 と単位行列 E の積で表現される。形状偏差に相関があるとすると、分散共分散を考慮した誤差行列 S_{cov} により表現できる。誤差行列 S_{cov} は、 s_f^2 と相関係数 r_{ij} による相関行列 R_{cov} との積で表現できる (式 (5))。また、 A はヤコビ行列で、図 2 のような測定点の位置を示す角度 t_i によって式 (6) のように表現できる。

$$C = (A'S^{-1}A)^{-1}A'S^{-1} \quad (1)$$

$$P = CSC' = (A'S^{-1}A)^{-1} \quad (2)$$

$$P = \begin{pmatrix} s_x^2 & s_{xy} & s_{xd} \\ s_{xy} & s_y^2 & s_{yd} \\ s_{xd} & s_{yd} & s_d^2 \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$S_{\text{ran}} = \begin{pmatrix} s_f^2 & 0 \\ & \ddots \\ 0 & s_f^2 \end{pmatrix} = s_f^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ & \ddots \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = s_f^2 E \quad (4)$$

$$S_{\text{cov}} = \begin{pmatrix} s_f^2 & s_{12} & \cdots & s_{1n} \\ s_{12} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & s_{ij} & \ddots & s_{n-1n} \\ s_{1n} & \cdots & s_{n-1n} & s_f^2 \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$= s_f^2 \begin{pmatrix} 1 & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ r_{12} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & r_{ij} & \ddots & r_{n-1n} \\ r_{1n} & \cdots & r_{n-1n} & 1 \end{pmatrix} = s_f^2 R_{\text{cov}}$$

$$A = \begin{pmatrix} -\cos t_1 & -\sin t_1 & -\frac{1}{2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -\cos t_n & -\sin t_n & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (6)$$

3. 不確かさの計算

円形体のパラメータ（直径と中心座標）の不確かさに対して、前述した誤差行列と対応して三種類の計算方法が考えられる。まず、形状偏差を偶然誤差と見なして計算した P_{ran} は、誤差行列 S_{ran} が s_f^2 と単位行列の積ということを利用すると式 (7) のように計算できる。次に、形状偏差には相関があると計算した P_{cov} は、相関行列 R_{cov} を利用して式 (8) のように計算できる。

実際に座標測定機を利用することを考えてみると、座標測定機の汎用的な測定プログラムでは円形体のパラメータを最小二乗法で計算する場合に、形状偏差の共分散または相関係数を考慮するような計算は行っていない。そのため、座標測定機で円形体を測定する場合には、測定結果の計算では各測定点の測定誤差は全て独立で、偶然誤差として扱うことになる。しかし、形状偏差に相関があった場合には、計算結果の評価としては相関を考慮する必要がある。つまり、式 (1) における C の計算では S_{ran} を使い、式 (2) における P の計算では S_{cov} を使うことになり、結果として式 (9) に示す $P_{\text{r+c}}$ としてパラメータの不確かさを計算することができる。

Fig. 1 Circle features with form deviation ($s_f^2 = 1 \mu\text{m}$), (a) random error, (b) error with covariance (unit: μm)

Fig. 2 Measured position indicated by angle t_i

Fig. 3 Hole on aluminum board, diameter of 20 mm, standard deviation $s_f^2 = 3.1 \mu\text{m}$, circularity = $26.8 \mu\text{m}$ (unit: μm)

$$P_{\text{ran}} = (A'S_{\text{ran}}^{-1}A)^{-1} = s_f^2(A'A)^{-1} \quad (7)$$

$$P_{\text{cov}} = (A'S_{\text{cov}}^{-1}A)^{-1} = s_f^2(A'R_{\text{cov}}^{-1}A)^{-1} \quad (8)$$

$$P_{\text{r+c}} = ((A'A)^{-1}A')S_{\text{cov}}((A'A)^{-1}A')' = s_f^2((A'A)^{-1}A')R_{\text{cov}}((A'A)^{-1}A')' \quad (9)$$

4. 不確かさの計算例

4.1 自己相関の計算

上記の式 (7), (8) および (9) で示したパラメータの不確かさをいくつかの場合に対して計算し、その振る舞いを検討する。例として、図 3 に示す円形体を利用する。この円形体は、厚さ 10 mm のアルミ板に直径 20 mm の円穴を NC 工作機械により 4 つ開けたうちの 1 つを座標測定機で測定したデータである。測定は、直径 3 mm のプローブを用い、まず、板の上面を基準として深さ 5 mm の位置を 10 点で円測定し、求めた最小二乗円の中心を新しく原点として、256 点を均一に測定した。

前章で示した手法によって不確かさを推定するには、形状偏差の自己相関を推定する必要がある。円形体の場合、図2に示したような極座標で考えて測定値をフーリエ変換すると、2章で述べたパラメータの定義から、0次成分が半径の値となる。半径の値を基準として測定値を求めると、フーリエ変換の0次成分を零と置く事ができる。また、中心の偏心量が1次成分となるため、中心が極座標の原点になるように測定点を移動すると、1次成分も零となる。

式(10)で、形状 $h(t)$ をフーリエ変換し、パワースペクトル $H(f)$ を求める。さらにパワースペクトルの絶対値の二乗をフーリエ変換することで自己相関 $C(t)$ を求めることができる。自己相関の0での値が形状偏差の分散を表しているため、この分散 s_f^2 で正規化すると、正規化された自己相関 $c(t)$ を計算できる。この自己相関は、横軸に角度を取っているが、この角度は測定点間の角度の絶対値なので、任意の測定点間の相関係数を式(11)で計算できる。

$$H(f) = FT(h(t))$$

$$C(t) = \text{Corr}(h, h) = FT(|H(f)|^2) \quad (10)$$

$$c(t) = \frac{C(t)}{C(0)} = \frac{C(t)}{s_f^2} = \frac{C(|t_i - t_j|)}{s_f^2} = r_{ij} \quad (11)$$

図4は、図3の円形体の正規化した自己相関を式(10)および(11)によって計算したものである。以下の計算において、相関行列 $\mathbf{R}_{\text{cov}}$ は測定値間の角度からこの自己相関により計算される。

4.2 円周全体を均一に測定した場合

全周を均一に n 点の測定点で測定した場合について検討する。この場合は、式(5)で計算される $\mathbf{S}_{\text{cov}}$ は均一な重みを表すため、最小二乗法の計算においては、 $\mathbf{S}_{\text{ran}}$ を使った場合と $\mathbf{S}_{\text{cov}}$ を使った場合は、求められたパラメータの値は完全に一致する。このため不確かさの評価である $\mathbf{P}_{\text{cov}}$ と $\mathbf{P}_{\text{ran}}$ も完全に一致する。

図5は、測定点数 n (3点から64点) と計算された直径の不確かさ s_d および中心の X 座標の不確かさ s_x の関係を示している。破線が $\mathbf{P}_{\text{ran}}$ による計算結果、実線が $\mathbf{P}_{\text{cov}}$ ($\mathbf{P}_{\text{ran}}$ と一致する) による計算結果である。この例では、測定点数が6点より多い場合、 $\mathbf{P}_{\text{ran}}$ による不確かさが減っていく傾向は $\mathbf{P}_{\text{cov}}$ によく似ているが、不確かさを過大評価することになる。

$\mathbf{P}_{\text{cov}}$ ($\mathbf{P}_{\text{ran}}$ と一致する) の値は、計算機シミュレーションによっても計算できる。図3の形状から種々の組み合わせで測定点を選び出し、その測定点から最小二乗法により測定値を計算し、その測定値の標準偏差を計算すればよい。しかし、この処理は収束が悪く100回以上の繰返し計算が必要である。また、計算した結果は式(8)および式(9)で計算した値と一致するため、シミュレーションによるメリットはない。

測定点数が少ない部分に注目すると、直径の不確かさと中心座標の不確かさで異なる傾向がある。図3の円形体は図4の自己相関から分かるように、2次と4次の成分が大きい。このため、直径では測定点が4点、6点、8点などの偶数点数の場合に不確かさが大きくなっている。逆に、中心座標では測定点が3点、5点などの奇数点数の場合に不確かさが大きくなる。このように、測定点数が少ない場合には、測定する形体の自己相関の形が大きく影響を持つことが分かる。

全体的な傾向は、材料、加工方法などを変化した種々の

Fig. 4 Autocorrelation function calculated from measured circle on Fig. 3

Fig. 5 Relationship between number of data n and uncertainty (standard deviation) of diameter s_d and X coordinate of center s_x

円形体に対して同様に得られた。測定点が少ない場合については、その円形体が持つ低次の周波数成分の種類によってその傾向は異なる。

4.3 円周の一部を測定した場合

つぎに、円周の一部を測定した場合について検討する。図6に示すように円周の $\pm a/2$ の範囲を均一に測定点数 n で測定した場合、直径の不確かさがどのように変化するかを計算した。

図7は、測定範囲 a を180度、90度、30度とした場合の、直径の不確かさを $\mathbf{P}_{\text{ran}}$ (薄い実線)、 $\mathbf{P}_{\text{cov}}$ (実線) および $\mathbf{P}_{\text{ran}}$ (破線) により計算した。図5は、測定範囲 a が360度の場合に相当する。測定範囲が円周の一部になると、測定点を増加させても不確かさがあまり減少しないことがわかる。特に、測定範囲が90度や30度の場合では、測定点数が数点以上で不

確かさはまったく減少しない。実際に座標測定機を使う場合に対応する P_{r+c} の評価では、測定点数が増えるとかえって不確かさが増える場合があることが分かる。これは、測定点間の相関を考慮すると、測定範囲の端の測定点に大きな重みを付けるべきであるのに、 P_{r+c} では全部の測定点に同じ重みをつけるため、誤差が拡大して評価されるためである。

また、 P_{ran} の評価は測定点数が多い場合、大幅な過小評価になってしまう。このことから、円周の一部を測定する場合に P_{ran} の評価は不適當であることが分かる。

5. 自己相関のモデル

以上のように、形状偏差のスペクトルまたは自己相関が分かれば、自己相関に基づく不確かさの評価が行える。現実的な測定対象に対して、自己相関がどのような形を取るか、またはどのような形でモデル化できるかは、重要な問題であるが現段階では、簡単なモデル化の可能性だけについて検討する。

円形体の自己相関は、その材料、加工法などによって決まる。沢辺⁹⁾は、切削と研削で加工された円筒部品の真円度の研究において、自己相関の形を検討している。Whitehouse¹⁰⁾も表面粗さおよび表面形状に対して自己相関について検討している。これらの研究によれば、切削や研削によって仕上げられた一般的な工業製品は形状のランダム成分による自己相関と周期成分による自己相関を持つ。ランダム成分による自己相関は、角度が離れるにつれて指数関数的に減少し、周期成分による自己相関は余弦関数で表される。

そこで、一例として円形体の自己相関を式(12)のようにモデル化することを考える。

$$c(t) = p_0 + p_1 e^{-P_1 t} + p_{31} \cos \frac{2\pi t}{n} + p_{32} \cos \frac{4\pi t}{n} + p_{33} \cos \frac{6\pi t}{n} + \dots \quad (12)$$

ここで、 p_1 および p_2 は指数関数的に減少するランダム成分をモデル化し、 p_{32} , p_{33} ... は周期成分をモデル化する。また、 p_0 および p_{31} は円形体の0次成分および1次成分を零にするための補正項であり、 n は円形体上を等間隔にサンプリングした場合の測定点数を示す。図8(a)は、図3と同じ条件で加工された4つの穴の自己相関を示す。このように、同一条件で加工した穴の自己相関はおおよそ同じ値を示すため、抜き取り検査などにより加工した穴の自己相関を推定することが可能である。この4つの自己相関の平均に対して式(12)をモデルとして、余弦成分の2次と4次成分(4π および 8π) だけに対して当てはめた結果を式(13)に、この自己相関を図8(b)に示す。式(13)のように比較的少ないパラメータにより自己相関の形がよくモデル化できていることが分かる。

$$c(t) = -0.0061 + 0.62e^{-0.84t} - 0.012 \cos \frac{2\pi t}{256} + 0.35 \cos \frac{4\pi t}{256} + 0.049 \cos \frac{8\pi t}{256} \quad (13)$$

図9は、モデル化した自己相関と実際の自己相関で計算した直径の不確かさを比較した例である。計算は図5(a)と同じ条件で行った。この例でも分かるように、自己相関の低次の余弦項のみを近似した場合、測定点数が増えた場合の不確かさは平均的な値を推定することになる。

Fig. 6 Measured area a for partial circle measurement, 5 measured points in ± 90 deg ($a = 180$ deg)

(a) $a = 180$ deg

(b) $a = 90$ deg

(c) $a = 30$ deg

Fig. 7 Relationship between uncertainty of diameter s_d and number of data n in partial circle measurement of angle $a = 180, 90$ and 30 deg, by 3 calculated methods P_{r+c} , P_{cov} and P_{ran}

このようなモデル化や抜き取り検査などにより、自己相関をどの程度推定すれば期待する程度で不確かさを推定できるか、また、モデル化をどのように行うことが現実的かなどについては、今後の課題とする。

6. 結 論

本論文では、形体測定における不確かさ推定において、従来は扱うことが難しかった未知の系統誤差の効果について検討した。未知の系統誤差のうち、測定対象の形状偏差およびその自己相関が、測定結果にどのように影響するかについて、理論的に考察した。その結果以下のことが分かった。

- (1) 形状偏差およびその自己相関を考慮した、円形体の直径および中心位置の不確かさを計算する三種類の手法を導出した。
- (2) それぞれの計算方法を実際の形状に適応し、その振る舞いを検討した。
- (3) 特に、円周の一部しか測定しない場合には自己相関を考慮した計算の必要性が高いことを示した。

今後は、一般的な加工方法に対して、自己相関をモデル化する手法などを含めて、複雑な測定における測定の不確かさの推定方法を確立することを目指す。

参 考 文 献

- 1) 高増 潔, 郭 必偉, 古谷涼秋, 大園成夫: 形体計測の基本概念, 精密工学会誌, **64**, 1 (1998) 94.
- 2) 高増 潔, 古谷涼秋, 大園成夫: 座標計測における形体パラメータの信頼性, 精密工学会誌, **63**, 11 (1997) 1594.
- 3) Guide to the expression of uncertainty in measurement (GUM). BIPM, IEC, IFCC, ISO, IUPAC, IUPAP, OIML, 1st edition, 1995.
- 4) 高増 潔, 阿部 誠, 古谷涼秋, 大園成夫: 形体計測における不確かさの見積り (第1報) 一校正作業で生じる系統誤差の寄与一, 精密工学会誌, **67**, 1 (2001) 91.
- 5) Traceability of Coordinate Measurements According to the Method of the Virtual Measuring Machine, Part 2 of the Final Project MAT1-CT94-0076, 1999.
- 6) S. D. Phillips, B. Borchardt, W. T. Estler and J. Buttress: The Estimation of Measurement Uncertainty of Small Circular Features Measured by Coordinate Measuring Machine, *Prec. Eng.*, **22**, 2 (1998) 87.
- 7) A. Weichenmann, M. Knauer and H. Kunzmann: Influence of Measurement Strategy on the Uncertainty of CMM-Measurements, *CIRP Ann.*, **47**, 1 (1998) 451.
- 8) M. Knauer and A. Weichenmann: A Software System to Estimate the Uncertainty Contribution of the Workpiece Shape in Coordinate Metrology, *Proc. IMEKO XV*, (1999) 15.
- 9) M. Sawabe, N. Fujinuma / T. Sata: Influence of Radial Motion on Form error of Workpiece in Turning, *CIRP Annals*, **27**, 1 (1978) 505.
- 10) D.J. Whitehouse: Handbook of Surface Metrology, IOP Publishing Ltd (1994)

(a) Autocorrelation functions for 4 holes

(b) Modeled autocorrelation function

Fig. 8 Modeled autocorrelation function using exponential function and cosine functions

Fig. 9 Comparison between real autocorrelation and modeled autocorrelation for uncertainty of diameter