解説

多粒子焼結の動力学

若井 史博^{1*}, 大熊 学¹, 西山 宣正¹, Olivier GUILLON²¹ 東京工業大学科学技術創成研究院フロンティア材料研究所, 〒 226-8503 横浜市緑区長津田町 4259-R3-23.² ユーリッヒ研究センター, エネルギー・環境研究所 IEK-1, ユーリッヒ, D-52425, ドイツ.

Dynamics of Sintering of Multi-Particles

Fumihiko WAKAI^{1*}, Gaku OKUMA¹, Norimasa NISHIYAMA¹ and Olivier GUILLON²¹ Laboratory for Materials and Structures, Institute of Innovative Research, Tokyo Institute of Technology,
R3-23-4259 Nagatsuta-cho, Midori-ku, Yokohama 226-8503, Japan.² Institute of Energy and Climate Research IEK-1: Materials Synthesis and Processing, Forschungszentrum Jülich GmbH, Jülich, D-52425, Germany.

Received August 11, 2019; Revised August 27, 2019; Accepted August 30, 2019

ABSTRACT

This review considers the microstructural evolution during sintering, which involves the pinch-off of pore channels and the formation of closed pores, from a point of view of mechanics. The microscopic shrinkage, i.e., the relative motion of adjacent particles, is driven by the sintering force and the mechanical force transmitted by the contact. The concept of sintering force, which has been proposed originally for sintering of two particles, is extended to the sintering of multi-particles. Here, we focus on the sintering by coupled grain boundary diffusion and the surface diffusion, which is the most important mechanism for sintering of fine powders at relatively low temperatures. We show that the shrinkage rate of a closed pore is also proportional to the sintering force. The mechanics of sintering in particle-scale will help to understand the relationship between the microstructure and the continuum mechanics of sintering.

KEY WORDS

Micromechanical modeling, simulation, sintering

1 緒 言

焼結理論は20世紀半ばにFrenkel¹⁾, Kuzynski²⁾, KingeryとBerg³⁾によって基礎が築かれた。焼結は膨大な数の粒子の成形体に熱を加えて、複雑形状部材を製造する技術であるが、その基本的な原理は2球粒子モデルに基づいて理解できる。高温で2つの結晶粒子が接触すると、接触面(粒界)が形成され、粒子間のくびれ(ネック)に向かって原子拡散が起こる。時間とともにネック半径は増加し、粒子中心間の距離は減少する。ミクロスケールでの焼結は「ネック成長」と「粒子中心間距離の接近」として捉えられる。Coble⁴⁾は、粒子表面で生成された空孔が体拡散あるいは粒界拡散で粒界に向かって移動し、そこで消失することにより、粒子が相対運動して粒子中心間距離が近づくことを示した。さらにJohnson⁵⁾は2球粒子間の力の釣り合いを考慮して、粒界拡散による焼結を正確に解析した。一方、原子の運動方向は空孔の運動方

向と反対であり、原子は粒界に沿って拡散し、ネック表面に到達すると、さらに表面拡散してネック形状が変化する。BrossとExner⁶⁾ならびに、SwinkelsとAshby⁷⁾は粒界拡散と表面拡散の連成を解析した。極めて微細な粒子を比較的低温で焼結する場合には、粒界拡散と表面拡散の連成が主要な焼結機構となる。このため、差分法⁸⁾、有限要素法^{9,10)}、モンテカルロ法^{11,12)}、フェーズフィールド法¹³⁾などのコンピューターシミュレーションにより、焼結の「ネック成長」と「粒子中心間距離の接近」が解析されてきた。

1980年代後半になると、焼結の連続体力学理論が登場し¹⁴⁻¹⁷⁾、巨視的な緻密化を外部応力と熱力学的な駆動力である「焼結応力」に回答した変形として理解しようとするパラダイムシフトが起こった^{18,19)}。この力学的な視点をミクロスケールの焼結に当てはめると、粒子間距離の減少による収縮は、熱力学的駆動力である「焼結力」による粒子運動によると考えることができる。この考え方をもとに、粒子運動を追跡して焼結中の微構造変化をシミュレートするために生ま

* Corresponding author, E-mail: wakai.f.aa@m.titech.ac.jp

れたのが個別要素法 (Discrete Element Method, DEM 法) である。これは元々, Cundall と Strack²⁰⁾ により粉粒体の力学を解析するために開発された。ドイツのブラウンホーファー研究所のグループは Svoboda, Zipse, Riedel¹⁸⁾ による平衡状態にある周期的多孔体構造を, また, フランスの CNRS の Martin らは Bouvard ら⁸⁾ による 2 球粒子焼結の解析を基にした近似式, あるいは, 定数で焼結力を定義している。個別要素法は不均質組織の収縮速度差に基づく内部応力の発生, 内部欠陥の成長²¹⁾, 異方的な収縮²²⁾ を解析するための強力なツールとして注目されている。

個別要素法の問題点は, 球粒子を仮定し, 円形接触面の焼結力を用いるので, 初期焼結にしか適用できないことである。現実の焼結では時間とともに, 複雑な気孔構造変化が起こるとともに, 結晶粒子自体の形状も変化する。この問題を解析するため, Shinagawa²³⁾ はフェーズフィールド法 (PF 法) で粒子表面形状変化をシミュレートし, 個別要素法で粒子の相互運動を解析する PF/DEM 連成法を開発した。また, Raether ら²⁴⁾ はモンテカルロ法 (MC 法) で粒子表面形状を, また, 個別要素法で粒子運動を解析する MC/DEM 連成法を提案した。これらの手法により, 個別要素法を中期焼結や終期焼結に適用する展望が開けた。しかし, 従来の近似式や定数で, 複雑形状粒子の焼結力を記述するのは無理がある。複雑な気孔構造と接触面の形状変化に対して焼結力がどうなるのか? そもそも定義することが可能なのか? その原理を理解することが正確な焼結シミュレーション技術を開発する上で不可欠である。

本解説では, 焼結プロセスにおける接触面の成長を 2 球粒子モデルで²⁵⁾, 気孔チャンネル閉鎖を 3 球粒子モデルで²⁶⁾, また, 閉気孔の形成と収縮を 4 球粒子モデルで²⁷⁾ 厳密に解析した例を紹介する。まず, 3 個の球粒子の焼結を考える (Fig. 1 (a))。3 粒子の中央には気孔チャンネルがある。下部の図は初期焼結における円形の接触部が示されている。この接触部の面積が増加するにつれて, 気孔チャンネルの大きさは減少し, 接触部の形状も非円形になる (Fig. 1 (c))。気孔チャンネルの閉鎖 (pinch-off) が起こると, 3 つの粒界が交差して粒界 3 重線が形成される (Fig. 1 (d), (e))。次に 4 個の球粒子を考える (Fig. 2 (a))。粒子の中心位置は 4 面体を構成するが, このような粒子配置は実際に観察され²⁸⁾, また, Coble²⁹⁾ の中期焼結と終期焼結モデルの粒子配置と同じである。下部の図に示すように気孔チャンネルの閉鎖が起こると中央に閉気孔が形成される (Fig. 2 (c))。焼結が進むと気孔は収縮し, 消失するが, その後も接触面の面積の増加が続く (Fig. (d), (e))。本解説では, これらの簡単なモデルの解析を通じて, 焼結の原理をまとめるとともに, 焼結力の概念を多粒子焼結の動力学に拡張できることを示す。

2 粒界拡散と表面拡散の連成による焼結のミクロ力学理論

2.1 粒界拡散

Fig. 1 (e) 下部に示す非円形接触面内の粒界拡散について考える。粒界と表面が交差する線 C_1 を表面 3 重線と呼ぶ。この C_1 近傍の表面で生成した空孔は化学ポテンシャル勾配の

Fig. 1 Sintering of a ring of three spheres by coupled grain boundary diffusion and surface diffusion. The upper part shows the cluster of four particles. The lower part shows the distribution of normal stress on a grain boundary²⁶⁾.

Fig. 2 Sintering of four spheres by coupled grain boundary diffusion and surface diffusion. The upper part shows the cluster of four particles. The lower part shows the distribution of normal stress on a grain boundary²⁷⁾.

ため、粒界拡散する。化学ポテンシャルは粒界に作用する法線応力に比例し、法線応力分布は Poisson 方程式で表される。

$$\nabla_s^2 \sigma_n = -\frac{kT}{\Omega \delta D_{gb}} \dot{u}_n \quad (1)$$

ここで ∇_s^2 は表面ラプラシアン、 $\dot{u}_n$ は 2 粒子間の相対速度、 Ω は原子体積、 δD_{gb} は粒界拡散係数と粒界厚さの積、 k はボルツマン定数、 T は絶対温度である。つまり、粒界拡散で焼結が起こるのは、接触面 A に応力勾配が存在するからである。

表面 3 重線 C_1 のごく近傍の粒界面の化学ポテンシャルは、隣接するネック表面の化学ポテンシャルと同じである。表面エネルギーを γ_s 、表面曲率を κ とすると、ネック表面には表面張力が作用する。

$$\sigma_n = \gamma_s \kappa \quad (2)$$

本解説では、曲率の符号は球状気孔表面を正、球粒子表面を負と定義する。初期焼結ではネック表面の曲率は正であるから、引張り応力が働く。(2) 式が粒界 3 重線 C_1 に沿った境界条件である。 C_2 に沿った境界条件は対称性より

$$\frac{\partial \sigma_n}{\partial v} = 0 \quad (3)$$

となる。 $\partial/\partial v$ は接触面内で粒界 3 重線に垂直な単位ベクトル方向の方向微分である。外力が作用していない場合、粒界に働く法線応力の積分は表面 3 重線に沿った表面張力と粒界 3 重線に沿った粒界張力と釣り合う。

$$\bar{\sigma} A \equiv \int_A \sigma_n dS = -\gamma_s L_1 \sin(\psi/2) - \frac{1}{2} \gamma_{gb} L_2 \sin(\pi/3) \quad (4)$$

ここで L_1 と L_2 はそれぞれ表面 3 重線と粒界 3 重線の長さ、 γ_{gb} は粒界エネルギー、 ψ は 2 面角である。

$$\gamma_{gb} = 2\gamma_s \cos(\psi/2) \quad (5)$$

(4) 式の右辺第 2 項に 1/2 の係数がついているのは、一つの粒界は 2 つの粒子に共有されているからである。応力の符号は引張りが正、圧縮が負である。粒界に作用する平均の応力を $\bar{\sigma}$ で表すと、力の釣り合い条件である (4) 式より $\bar{\sigma}$ は圧縮 (符号は負) である。

Poisson 方程式 ((1) 式) を (2) ~ (4) 式の条件で解けば応力分布が求まる。ここで、接触面 A に対して以下の Poisson 方程式を満たす関数 ϕ を考える。

$$\nabla_s^2 \phi = -1 \quad (6)$$

$$\text{表面 3 重線 } C_1 \text{ に沿った境界条件: } \phi = 0 \quad (7)$$

$$\text{粒界 3 重線 } C_2 \text{ に沿った境界条件: } \frac{\partial \phi}{\partial v} = 0 \quad (8)$$

任意の形状の接触面に対して関数 ϕ は有限要素法で簡単に計算できる。Green の第 2 恒等式を使えば、(1) 式を解かなくても、粒子間の収縮速度が次式で与えられることを証明できる²⁶⁾。

$$\dot{u}_n = \frac{\Omega \delta D_{gb}}{kT g^* A^2} (F_n - F^s) \quad (9)$$

$$F^s = \gamma_s \kappa^* A + \gamma_s L_1 \sin(\psi/2) + \frac{1}{2} \gamma_{gb} L_2 \sin(\pi/3) \quad (10)$$

ここで、 F_n は粒子に作用する外力、 F^s は焼結力、 A は接触面の面積である。 κ^* は表面 3 重線に沿った曲率の重み付き平均であり、次式で定義される。

$$\kappa^* = -\frac{1}{A} \int_{C_1} \kappa \frac{\partial \phi}{\partial v} ds \quad (11)$$

g^* は接触面の形状のみに依存する形状因子である。

$$g^* = \frac{1}{A^2} \int_A \phi dS \quad (12)$$

(9)、(10) 式の利点は粒子の幾何学形状だけから焼結力と収縮速度を計算できることにある。(9) 式で $F_n = F^s$ の場合、収縮速度はゼロになる。つまり、焼結力は焼結を停止させるために必要な外力 (引張り) に等しい。焼結力の符号は正である。

なお、関数 ϕ は面積の次元をもち、2 球粒子焼結で半径 c の円形接触面に対しては 2 次元極座標で $\phi = (c^2 - r^2)/4$ と表される。 $g^* = 1/8\pi$ であり、また、ネック表面の曲率を κ_{neck} とすると $\kappa^* = \kappa_{neck}$ である。2 球粒子焼結における焼結力は次式のように表される。

$$F^s = \gamma_s \kappa_{neck} \pi c^2 + 2\pi c \gamma_s \sin(\psi/2) \quad (13)$$

これは、Beere³⁰⁾、Riedel ら¹⁹⁾、Wakai ら²⁵⁾ の解析に一致する。

2.2 表面拡散

表面曲率に勾配があると、原子は曲率の高い方から低い方に向かって、表面に沿って拡散する。原子が付着すると表面は外側に、また、原子が離脱すると表面は内側に向かって運動する。Mullins³¹⁾ は表面運動速度が次式で表されることを示した。

$$v_n = -\frac{\gamma_s \Omega \delta D_s}{kT} \nabla_s^2 \kappa \quad (14)$$

ここで、 δD_s は表面拡散係数である。なお、物質保存則により、表面 3 重線 C_1 では粒界からの原子の流束 j_{gb} と表面拡散による流束 j_s との間に $j_{gb} = 2j_s$ の関係がある。

粒界拡散と表面拡散の連成の焼結シミュレーションには Brakke³²⁾ の Surface Evolver プログラムを用いた。このプログラムは (14) 式の表面拡散による粒子形状変化を計算できる。本研究では Surface Evolver に有限要素法モジュールを組み込んで (6) 式の関数 ϕ を求め、(9)、(10) 式により粒子間の収縮速度を決定した。さらに、有限要素法で (1) 式を解いて粒界の応力分布を決定した。表面 3 重線近傍での応力勾配より表面 3 重線近傍の流束を決定し、接触面の形状変化を解析した。

3 気孔チャネル閉鎖・閉気孔形成の動力学

3.1 全エネルギーの低下

焼結において物質移動による粒子の形状変化は、表面エネルギーと粒界エネルギーの総和が低下する方向に進む。

$$E = \gamma_s A_s + \gamma_{gb} A_{gb} \quad (15)$$

ここで、 A_s は全表面積、 A_{gb} は全粒界面積である。4 球粒子焼結の場合の全エネルギーの減少を以下のように規格化して表す。

$$\Delta E^* = (E - 4E_0)/4E_0 \quad (16)$$

Fig. 3 Normalized energy per particle as a function of dimensionless time. The equilibrium shapes with the minimal energy are shown in the figure. Open circles represent the formation of a closed pore, and crosses represent the disappearance of the pore²⁷⁾.

ただし、 E_0 は球粒子1個のエネルギーである。エネルギー変化を無次元化時間 t^* の関数として Fig. 3 に示した。

$$t^* = \frac{\gamma_s \Omega \delta D_s}{k T r_0^4} t \quad (17)$$

ここで r_0 は粒子の初期半径である。エネルギーは時間とともに低下し、最終的に平衡状態に到達する。平衡状態のエネルギーは粒界エネルギーと表面エネルギーの比 (γ_{gb}/γ_s) に依存する³³⁾。

3.2 接触面積の増加

Fig. 1 と Fig. 2 に示すように焼結が進むにつれて接触面積は時間とともに増加するが、その形状は円形から非円形へと変化する。そこで、接触面積 A に対して有効接触半径 $c^* = \sqrt{A/\pi}$ を定義して解析する。4 球粒子焼結の場合の有効接触半径を無次元化時間の関数として Fig. 4 に示した。

なお、無次元化時間は様々な実験条件の影響を一般的な形で表現する便利な方法である。実験において、表面エネルギー、表面拡散係数、初期粒径が異なれば焼結がどのように影響されるか、(17)式に値を代入すれば、実際にかかる時間 t を予測できる。例えば、ある有効接触半径 c^*/r_0 に到達するまでの時間 t は粒子の初期半径の4乗に比例して増加する (Herring のスケリング則³⁴⁾)。なお、有効接触半径の増加曲線は γ_{gb}/γ_s および粒界拡散係数と表面拡散係数の比 ($\delta D_{gb}/\delta D_s$) に影響される。Fig. 4 中の白丸は閉気孔の形成を、また、×印は閉気孔の消失を示す。閉気孔の形成はほぼ $c^*/r_0 = 0.5$ で起こる。初期焼結では次式の関係が成立する³⁾。

$$(c^*/r_0)^m = \beta t^* \quad (18)$$

指数 m の値は粒界拡散^{4,5)} の場合、表面拡散³⁵⁾ の場合ともに6である。有効接触半径の増加曲線は重要である。なぜなら、(9)式に示すように収縮速度は接触面積 ($A = \pi c^{*2}$) の二乗に反比例するからである。

3.3 焼結力

焼結力は接触面 A に作用する仮想的な圧力 $-\gamma_s \kappa^*$ ((4)式) と力の釣り合いによる平均の圧縮応力 $\bar{\sigma}$ ((10)式) との差か

Fig. 4 Effective contact radius as a function of dimensionless time. The slope shows the exponent $m = 6$ in Eq. (18)²⁷⁾.

Fig. 5 Relation between sintering force and effective contact radius²⁷⁾.

ら生じる。焼結力が有効接触半径の増加とともに、どのように変化するかを Fig. 5 に示した。2 球粒子焼結では、焼結力は初期焼結段階で幅広いピークを示し、その後、単調に減少する。焼結力は収縮の駆動力であるので、それがゼロに到達すると収縮は停止する。3 球粒子焼結の場合、焼結が進んで、中央に存在する気孔チャンネルが閉鎖する際に焼結力は鋭いピークを示す。4 球粒子焼結の場合、鋭いピークは、気孔チャンネルが閉じて閉気孔が形成される際と、閉気孔が消失する際の2回現れる。閉気孔が存在している間、焼結力は増強されている。気孔チャンネルが閉鎖する際に焼結力がピークを示す理由は、Fig. 1 (c) と Fig. 2 (b) に見られるように気孔近傍の曲

率が非常に大きくなり、局所的な強い引張り応力場が出現するためである。また、閉気孔が収縮して体積がゼロになる直前は気孔表面の曲率が非常に大きくなる。4球粒子焼結で閉気孔が消失した後、焼結力は急激に低下するが、ゼロにはならない。Fig. 2 (d) に示すように粒界の応力分布がまだ残っているためである。

3.4 粒子間距離の収縮

4球粒子の焼結において、粒子間の相対速度が有効接触半径の増加とともに低下する様子を Fig. 6 に示す。相対速度が有効接触半径の4乗に反比例するからである。閉気孔が形成されると収縮速度は速くなる。ただし、焼結力の鋭い2つのピークに対応する収縮速度の変化はあまり目立たない。相対速度は $\delta D_{gb}/\delta D_s$ に比例する。つまり、粒界拡散係数が1/10になれば、相対速度もほぼ1/10になる。また、相対速度は γ_{gb}/γ_s にも影響される。 γ_{gb}/γ_s はネック形状やネック表面の曲率に影響し焼結力が変化するからである²⁵⁾。

相対速度を積分して粒子間の相互運動による収縮 u を計算して、無次元化時間の関数として Fig. 7 に破線で示した。もう一つの方法として、Fig. 2 (a) に示すように粒子の重心間距離 R をもとに収縮を定義できる。任意の粒子形状に対する重心位置は Gauss の発散定理を使って表面積分から容易に計算できる。Fig. 7 の実線は重心間距離をもとに定義した収縮 $\Delta R = R - 2r_0$ を示す。 ΔR は相対運動による収縮 u と表面拡散

Fig. 6 Relation between relative velocity and effective contact radius²⁷⁾.

Fig. 7 Shrinkage as a function of the dimensionless time. Solid line represents the distance between mass centers ΔR . Broken line represents the rigid body motion u caused by grain boundary diffusion²⁷⁾.

による粒子形状変化に伴う重心位置の変化の総和になる。粒界拡散は非常に効率的な緻密化機構である。閉気孔が消失した時点での ΔR のうち粒界拡散による相対運動の寄与は、 $\delta D_{gb}/\delta D_s = 1$ の場合 98%、 $\delta D_{gb}/\delta D_s = 0.1$ の場合でも 82% に達する。気孔チャネル閉鎖前の初期焼結段階では粒界拡散による収縮は $u \propto t^{*1/3}$ で近似的に表される。これは Coble の理論⁴⁾ に一致した。粒界拡散による収縮 u は $\delta D_{gb}/\delta D_s$ に比例する。しかし、 $\delta D_{gb}/\delta D_s = 0$ の場合でも、表面拡散による重心移動は起こるので ΔR の収縮は起こる。ただし、 $\delta D_{gb}/\delta D_s = 0$ の場合、閉気孔は収縮しないで残留するので、平衡状態の ΔR は $\delta D_{gb}/\delta D_s > 0$ の場合よりも少し小さい。

3.5 閉気孔体積の収縮

気孔チャネル閉鎖により形成された閉気孔の体積は粒界拡散のため、Fig. 8 に示すように時間とともに収縮する。ここで、Fig. 9 に示す接触面の両側の粒子が相互に運動することを考える。気孔体積は粒子の相対運動によって収縮する。ここで、Fig. 9 の白と黒の破線で囲んだ面積 A' を考える。粒子が相対運動すると A' のうち気孔にかかる部分の面積と相対速度の積は直接気孔体積の減少に寄与する。さらに相対運動が起こるためには、粒界の原子は気孔、あるいは、表面に向かって排出されなければならない。 A' のうち粒界にかかる部分の面積にある粒界原子は気孔に向かって拡散するので、閉

Fig. 8 Shrinkage of a closed pore. The pore volume is plotted as a function of the dimensionless time²⁷⁾.

Fig. 9 The effective area which contributes to the pore shrinkage (The area bounded by dashed line). The pore volume decreases as particles on both sides of the contact approach each other²⁷⁾.

気孔体積の減少に寄与する。なお、 A' の外側の粒界にある原子は表面に向かって拡散するので気孔収縮には寄与しない。4粒子焼結では6個の接触面があり、気孔体積は粒子間の相対速度と面積 A' の積に比例して減少する。

$$\frac{dV_{\text{pore}}}{dt} = 6\dot{u}_n A' \quad (19)$$

(19)式と(9)式より、気孔体積の収縮速度は焼結力に比例する。

3.6 焼結における気孔構造のトポロジー変化

Coble²⁹⁾は中期焼結のモデルとして粒界3重線に沿って円柱状の気孔が繋がった構造を仮定したが、Fig. 2はそのような気孔構造には決してならないことを明瞭に示した。4球粒子モデルでは、気孔チャネルの閉鎖と閉気孔の形成がいかにして起こるかを見ることができた。閉気孔の形成は終期焼結の開始を特徴づける出来事である。

焼結における気孔構造のトポロジー変化は、表面3重線と粒界3重線の形成と消失のプロセスとしてとらえることができる³⁰⁾。2粒子間の接触面の形成は表面3重線ループの生成とみなせる (Fig. 1 (a))。気孔チャネルの閉鎖は表面3重線から粒界3重線への変換をとまなう (Fig. 2 (c))。閉気孔の消失の際には表面3重線が消失する (Fig. 2 (d))。このようなトポロジー転移の際には、表面に、曲率の発散する特異点が生じる。トポロジー転移にとまなう特異点形成が、焼結力の鋭いピークの原因である (Fig. 5)。

4 おわりに

焼結の連続体力学は、不均質な内部構造を持つ成形体、積層材料や複合材料の焼結における内部応力を解析し、焼結体の寸法精度や焼結プロセスにとまなう内部欠陥形成を予測するための重要な理論的枠組みである。ただし、これまでの理論は、相対密度と平均粒径で材料組織を代表させてきた。しかし、それだけでは焼結現象を捉えきれないことは明白である。焼結の科学の難しいところは、気孔・欠陥の3次元構造があまりにも複雑であり、それをうまく計測する技術や、数学的に記述する概念の整備が未発達なことにある。ミクロスケールの力学理論を基礎として連続体力学につなげ、微構造と巨視的な振る舞いを関連づけていくことが、今後の焼結理論、焼結シミュレーションの進むべき方向であろう。本解説では、わずか3～4個の粒子系の解析を紹介しただけであるが、2球粒子焼結モデルでは把握できなかった様々な現象とその背後にある力学が見えてきた。現実の焼結は、はるかに複雑であり、我々がまだ理解しきれていない現象や、探求すべき未知の基本原則がたくさん残されているように思われる。

文 献

- 1) J. Frenkel: J. Phys. USSR, **9** (1945) 385-391.
- 2) G. C. Kuczynski: Trans. Am. Inst. Min. Metall. Eng., **185** (1949) 169-178.
- 3) W. D. Kingery, M. Berg: J. Appl. Phys., **26** (1955) 1205-1212.
- 4) R. L. Coble: J. Am. Ceram. Soc., **41** (1958) 55-62.
- 5) D. L. Johnson: J. Appl. Phys., **40** (1969) 192-200.
- 6) P. Bross, H. E. Exner: Acta Metall., **27** (1979) 1013-1020.
- 7) F. B. Swinkels, M. F. Ashby: Acta Metall., **29** (1981) 259-281.
- 8) D. Bouvard, R. M. McMeeking: J. Am. Ceram. Soc., **79** (1996) 666-672.
- 9) J. Pan, A. C. F. Cocks: Acta Metall. Mater., **43** (1995) 1395-1406.
- 10) W. Zhang, I. Gladwell: Comput. Mater. Sci., **12** (1998) 84-104.
- 11) V. Tikare, M. Braginsky, E. A. Olevsky: J. Am. Ceram. Soc., **86** (2003) 49-53.
- 12) K. Mori, H. Matsubara, N. Noguchi: Int. J. Mech. Sci., **46** (2004) 841-854.
- 13) Y. U. Wang: Acta Mater., **54** (2006) 953-961.
- 14) A. Jagota, P. R. Dawson, J. T. Jenkins: Mech. Mater., **7** (1988) 255-269.
- 15) R. K. Bordia, G. W. Scherer: Acta Metall. Mater., **36** (1988) 2393-2397.
- 16) R. M. McMeeking, L. T. Kuhn: Acta Metall. Mater., **40** (1992) 961-969.
- 17) E. A. Olevsky: Mater. Sci. Eng. R, **23** (1998) 41-100.
- 18) J. Svoboda, H. Riedel, H. Zipse: Acta Metall. Mater., **42** (1994) 435-443.
- 19) H. Riedel, H. Zipse, J. Svoboda: Acta Mater., **42** (1994) 445-452.
- 20) P. A. Cundall, O. D. L. Strack: Geotechnique., **29** (1979) 47-65.
- 21) C. L. Martin, H. Camacho-Montes, L. Olmos, D. Bouvard, R. K. Bordia: J. Am. Ceram. Soc., **92** (2009) 1435-1441.
- 22) A. Wonisch, O. Guillon, T. Kraft, M. Moseler, H. Riedel, J. Rödel: Acta Mater., **55** (2007) 5187-5199.
- 23) K. Shinagawa: Acta Mater., **66** (2014) 360-369.
- 24) F. Raether, G. Seifert, H. Ziebold: Adv. Theory Simul., (2019) 1900048.
- 25) F. Wakai, K. A. Brakke: Acta Mater., **61** (2013) 4103-4112.
- 26) F. Wakai, O. Guillon, G. Okuma, N. Nishiyama: J. Am. Ceram. Soc., **102** (2019) 538-547.
- 27) F. Wakai, Okuma, N. Nishiyama, O. Guillon: J. Euro. Ceram. Soc., **39** (2019) 2952-2959.
- 28) G. Okuma, D. Kadowaki, T. Hondo, S. Tanaka, F. Wakai: Sci. Rep., **7** (2017) 11106.
- 29) R. L. Coble: J. Appl. Phys., **32** (1961) 787-792.
- 30) W. Beere: Acta Metall., **23** (1975) 139-145.
- 31) W. W. Mullins: J. Appl. Phys., **28** (1957) 333-339.
- 32) K. A. Brakke: Exp. Math., **1** (1992) 141-165.
- 33) F. Wakai, F. Aldinger: Acta Mater., **51** (2003) 641-652.
- 34) C. Herring: J. Appl. Phys., **21** (1950) 301-303.
- 35) F. A. Nichols, W. W. Mullins: J. Appl. Phys., **36** (1965) 1826-1835.
- 36) F. Wakai: J. Am. Ceram. Soc., **89** (2006) 1471-1484.