基本不変量理論と熱力学的手法による導電性磁性流体 の構成方程式の決定

慶応義塾大学大学院 井門 康司

慶応義塾大学理工学部 棚橋 隆彦

Yasushi Ido and Takahiko Tanahashi: Determination of Constitutive Equations for Conducting Magnetic Fluids by Using the Theory of Integrity Bases and Thermodynamical method.

Constitutive equations for conducting magnetic fluids have been studied by some researchers, but their equations cannot express the phenomena of conducting magnetic fluids perfectly because they have some defects, for example, some did not satisfy the principle of frame-indifference and not consider with viscoelastic effect. We suggest a new way of determination of constitutive equations for conducting magnetic fluids to formulate the theory that former defects are improved. That is the method which is a combination of the theory of integrity bases and the principle of maximal dissipation rate. The constitutive equations we obtain only include the terms which allowed by thermodynamics and satisfy the principle of frame-indifference. Furthermore, not only for compound process but also for complex process, we can obtain the nonlinear constitutive equations for conducting magnetic fluids
(Received June 14, 1989)

1. 緒言

導電性磁性流体とは、水銀やナトリウム-カリウム混合体などの液体金属に強磁性体微粒子を安定に分散させたようなけん濁液である。このような流体は現在試作段階にあるが、機械的な駆動部分のない高効率のエネルギー変換機などへの応用が期待されている。導電性磁性流体の基礎方程式や構成方程式に関する研究はTarapov⁽⁷⁾をはじめとして志澤・棚橋⁽²⁾⁽³⁾、尹ら⁽¹⁰⁾などによって行われている。ところで、このような導電性磁性流体の正確な構成方程式を誘導する際には、次のようなことが考慮される必要があるものと考えられる。すなわち、構成方程式は標構無差別性の原理を満足すること、熱力学的な考察を経て誘導されていること、内部自由度が考慮されていること、また、現在のところ導電性磁性流体の構造ははっきりしていないが非導電性磁性流体との類推で粘弾性効果を考慮することなどが考えられる。先に述べた理論ではこれらの条件のすべてを十分に満足しているものはない。そこで本論文では、著者らが先に別報⁽¹⁾で提案した熱力学的議論を基礎としてそれに標構無差別性の原理、基本不変量理論および最大散逸速度の原理を取り入れた手法を導電性磁性流体の場合に適用して構成方程式を誘導する。ただし、この際に導電性磁性流体は極性を有する流体であるから、その内部回転を考慮しなければならない。しかしここでは、その準備段階として内部自由度を無視し、非極性を仮定して構成方程式を誘導する。

2. 電磁場の方程式

いま、流速 v は光速 c に比べて十分に遅いものと仮定すれば Lorentz変換の係数は $[1 - (v/c)^2]^{-1/2} \approx 1$ となるから、電磁気学的物理量に関して静止座標系における量と静止座標系に対して速度 v で並進運動する動座標系における量(上添字*付きの量)との変換式は相対論的変換式により

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E}^* &= \mathbf{E} + \boldsymbol{\nu} \times \mathbf{B}, & \mathbf{H}^* &= \mathbf{H} - \boldsymbol{\nu} \times \mathbf{D}, & \mathbf{B}^* &= \mathbf{B}, \\ \mathbf{D}^* &= \mathbf{D}, & \mathbf{j}^* &= \mathbf{j} - \rho_e \boldsymbol{\nu}, & \rho_e^* &= \rho_e. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

となる。ここで、 $\mathbf{E}$ は電界ベクトル、 $\boldsymbol{\nu}$ は流速ベクトル、 $\mathbf{H}$ は磁界ベクトル、 $\mathbf{B}$ は磁束密度ベクトル、 $\mathbf{D}$ は電束密度ベクトル、 $\mathbf{j}$ は電流密度ベクトルで ρ_e は電荷密度である。動座標系においてFaradayの法則、Ampereの法則、Gaussの法則および磁化不在の法則は微分形で表すと以下ようになる⁽⁹⁾。

$$\left. \begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E}^* &= -\partial \mathbf{B}^* / \partial t, & \nabla \times \mathbf{H}^* &= \partial \mathbf{D}^* / \partial t + \mathbf{j}^*, \\ \nabla \cdot \mathbf{B}^* &= 0, & \nabla \cdot \mathbf{D}^* &= \rho_e^*. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

ここで、 $\partial / \partial t$ は流束の輸送に対する実質時間微分で任意のベクトル $\mathbf{A}$ に対して

$$\partial \mathbf{A} / \partial t = \partial \mathbf{A} / \partial t + \nabla \times (\mathbf{A} \times \boldsymbol{\nu}) + (\nabla \cdot \mathbf{A}) \boldsymbol{\nu} \dots\dots\dots (3)$$

で定義される。

3. つり合い方程式

質量保存則、運動量、角運動量およびエネルギーの各つり合い方程式を積分形で表示し、それらの式をReynoldsの輸送定理および Gaussの定理などを使って微分形表示にすると次に示すような力学的つり合い方程式が得られる。

$$\partial \rho / \partial t + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{\nu}) = 0 \dots\dots\dots (4)$$

$$\rho d\boldsymbol{\nu} / dt + \partial \mathbf{g} / \partial t = \nabla \cdot \mathbf{T} + \rho \mathbf{b} \dots\dots\dots (5)$$

$$\boldsymbol{\epsilon} : \mathbf{T} = 0 \dots\dots\dots (6)$$

$$\rho d\mathbf{u} / dt = \mathbf{T}' : \nabla \boldsymbol{\nu} + \mathbf{H} \cdot d\mathbf{M} / dt + \mathbf{E} \cdot d\mathbf{P} / dt + (\mathbf{P} \cdot \mathbf{E}) \mathbf{I} : \nabla \boldsymbol{\nu} \\ (\mathbf{M} \cdot \mathbf{H}) \mathbf{I} : \nabla \boldsymbol{\nu} - \nabla \cdot \mathbf{q} + \rho r \dots\dots\dots (7)$$

$$\mathbf{T}' = \mathbf{T} - \mathbf{T}^{(n)} \dots\dots\dots (8)$$

ここで、 ρ は磁性流体の密度、 $\mathbf{g}$ は電磁運動量で $\mathbf{g} = \mathbf{D} \times \mathbf{B}$ 、 $\mathbf{T}$ は応力テンソル、 $\mathbf{b}$ は単位質量あたりの外力、 $\mathbf{P}$ は分極ベクトル、 $\mathbf{M}$ は磁化ベクトル、 $\mathbf{r}$ は単位質量あたりの熱源の強さで、 $\mathbf{I}$ は恒等テンソルであり、 $\mathbf{T}^{(n)}$ はMaxwellの応力テンソルで $\mathbf{T}^{(n)} = \mathbf{D} \mathbf{E} + \mathbf{B} \mathbf{H} - (\epsilon_0 \mathbf{E}^2 + \mu_0 \mathbf{H}^2) \mathbf{I} / 2$ で定義される。ただし、 ϵ_0 および μ_0 はそれぞれ真空中の誘電率および透磁率である。また、 $\mathbf{u}$ は単位質量あたりの内部エネルギー密度であるが、電磁場のエネルギーのうち具体化できない部分のみを含んでいる。式(6)より応力テンソル $\mathbf{T}$ は対称テンソルであることがわかる。

4. 熱力学的関係式

エネルギーのつり合い方程式(7)は、よく知られた関係式 $d\mathbf{e} / dt = d$ によって次式のように書き換えることができる。

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{T}' : \frac{d\mathbf{e}}{dt} + \rho \mathbf{E} \cdot \frac{d\mathbf{P}}{dt} + \rho \mathbf{H} \cdot \frac{d\mathbf{M}}{dt} - \nabla \cdot \mathbf{q} + \rho r \dots\dots\dots (9)$$

ただし、 $\mathbf{e}$ はGreenの歪テンソルであり、 d は変形速度テンソルで $d = \{\nabla \boldsymbol{\nu} + (\nabla \boldsymbol{\nu})^t\} / 2$ である。また、微小変位論の範囲で議論するものとする。一方、熱力学の第1法則により、単位時間あたりの熱供給 Q は $Q = \rho T ds / dt - \mathbf{T}'^{(d)} : d\mathbf{e} / dt$ であるから、式(9)は次のようになる。

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{T}'^{(q)} : \frac{d\mathbf{e}}{dt} + \rho \mathbf{E} \cdot \frac{d\mathbf{P}}{dt} + \rho \mathbf{H} \cdot \frac{d\mathbf{M}}{dt} + \rho T \frac{ds}{dt} \dots\dots\dots (10)$$

ここで、 s は単位質量あたりのエントロピー、 T は絶対温度であり、上添字 (q) 、 (d) はそれぞれ構成量の準保存部分および散逸部分であることを表す。

ところで、自由エネルギー f は $f = u - T s$ で定義される。この式の全微分をとって式(4.2)を代入し、さらに熱力学的ポテンシャル ϕ を $\phi = f - (\mathbf{P} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{M} \cdot \mathbf{H}) / \rho$ で定義してこの式の全微

分式に代入すると、次のような Gibbs の式に相当する式を得ることができる。

$$d\phi = -s dT + \frac{T'^{(q)}}{\rho} : de - \frac{P}{\rho} \cdot dE - \frac{M}{\rho} \cdot dH \quad \dots\dots\dots (11)$$

したがって、 $-d\rho/\rho = I : de$ なる関係式があることに注意すると式(11)より次のような熱力学の諸関係式を得る。

$$\left. \begin{aligned} T'^{(q)} &= -\rho^2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial \rho} \right)_{T, e, E, H} I + \rho \left(\frac{\partial \phi}{\partial e} \right)_{T, \rho, E, H} \\ P &= -\rho \left(\frac{\partial \phi}{\partial E} \right)_{T, e, H}, \quad M = -\rho \left(\frac{\partial \phi}{\partial H} \right)_{T, e, E} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (12)$$

一方、エネルギーのつり合い方程式をエントロピーを用いて書き換えると次のようになる。

$$\rho T ds / dt = \Phi - \nabla \cdot q + \rho r \quad \dots\dots\dots (13)$$

ここで、 Φ は散逸関数で次式で定義される。

$$\Phi = T'^{(d)} : d \quad \dots\dots\dots (14)$$

連続体の場に熱力学の第2法則を適用すると、次のような Clausius-Duhem の不等式が得られる。

$$\Phi + q \cdot \nabla (\ln T^{-1}) \geq 0 \quad \dots\dots\dots (15)$$

任意の現象に対して、熱力学的な項とそれ以外の項とに分解できることが知られているから⁽⁸⁾、式(15)より次の式が得られる。これらの式は最大散逸速度の原理の付帯条件となる。

$$\Phi \geq 0, \quad \Phi_{th} = q \cdot (-\nabla T / T) \geq 0 \quad \dots\dots\dots (16)$$

5. 構成方程式

本章において導電性磁性流体の構成方程式を決定する。その際に基本となる考えは、構成方程式を構成する項は標構に無差別でなければならないことから、熱力学的ポテンシャル ϕ と散逸関数 Φ はともにそれぞれの引数を作る基本不変量の多項式として表されなければならないということである。この考えを基礎として、準保存部分は先の熱力学の関係式(12)より決定し、散逸部分は最大散逸速度の原理によって決定する。決定すべき構成方程式は、 T' 、 P 、 M および q の4個である。

いま、式(11)より熱力学的ポテンシャル ϕ は $\phi = \phi(T, e, E, H)$ であるから、 ϕ は引数 e 、 E および H から作られる基本不変量⁽⁴⁾⁽⁵⁾⁽⁶⁾

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \text{tr } e, & I_2 &= \text{tr } e^2, & I_3 &= \text{tr } e^3, & I_4 &= E \cdot E, & I_5 &= H \cdot H, \\ I_6 &= E \cdot e \cdot E, & I_7 &= E \cdot e^2 \cdot E, & I_8 &= H \cdot e \cdot H, \\ I_9 &= H \cdot e^2 \cdot H, & I_{10} &= E \cdot H, & I_{11} &= E \cdot e \cdot H \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots (17)$$

で作られる多項式となる。この多項式を熱力学の関係式(12)に代入すると構成方程式の準保存部分は式(6)を考慮して以下のように決定される。

$$\begin{aligned} T'^{(q)} &= -p I + \alpha_1 I + 2\alpha_2 e + 3\alpha_3 e \cdot e + \alpha_6 E E + \alpha_7 (E \cdot e E + E e \cdot E) \\ &\quad + \alpha_8 H H + \alpha_9 (H \cdot e H + H e \cdot H) \quad \dots\dots\dots (18) \end{aligned}$$

$$P = \chi_o' \cdot E, \quad M = \chi_m' H \quad \dots\dots\dots (19, 20)$$

ただし、

$$\chi_o' = -\alpha_4 - (2\alpha_6 E \cdot e \cdot E + 2\alpha_7 E \cdot e^2 \cdot E + \alpha_{10} E \cdot H + \alpha_{11} E \cdot e \cdot H) / E^2 \quad \dots\dots (21)$$

$$\chi_m' = -\alpha_5 - (2\alpha_8 H \cdot e \cdot H + 2\alpha_9 H \cdot e^2 \cdot H + \alpha_{10} E \cdot H + \alpha_{11} E \cdot e \cdot H) / H^2 \quad \dots\dots (22)$$

$$p = p_0 + \int_E \left(\frac{\partial (vP)}{\partial v} \right) \cdot dE + \int_H \left(\frac{\partial (vM)}{\partial v} \right) \cdot dH \quad \dots\dots\dots (23)$$

ここで、係数 $\alpha_k (k=1 \sim 11)$ は $\alpha_k = \rho (\partial \phi / \partial I_k)$ である。また、 χ_o' および χ_m' はそれぞれ分極率および磁化率に相当し、 p は圧力、 p_0 は静水圧、 v は比体積である。

次に、構成方程式の散逸部分を決定する。式(14)より散逸関数 Φ は変形速度テンソル d を引数として持つから、 Φ は次に示す3個の基本不変量の多項式として表される。

$$I'_1 = \text{tr } d, \quad I'_2 = \text{tr } d^2, \quad I'_3 = \text{tr } d^3 \quad \dots\dots\dots (24)$$

最大散逸速度の原理⁽¹¹⁾により、応力テンソルの散逸部分 $T'^{(d)}$ は次式で決定される。

$$T'^{(d)} = \sum_{k=1}^3 \beta_k \frac{\partial I'_k}{\partial d} \quad \dots\dots\dots (25)$$

ただし、 $\beta_k = \nu (\partial \Phi / \partial I'_k)$ である。ただし、 ν は比例定数である。式(25)に式(24)で与えられた基本不変量を代入すると、応力テンソルの散逸部分は次式のように決定される。

$$T'^{(d)} = \beta_1 I + 2\beta_2 d + 3\beta_3 d \cdot d \quad \dots\dots\dots (26)$$

同様にして最大散逸速度の原理を用いて Φ_{th} から熱流束密度ベクトルは次のように決定される。

$$q = -\kappa \nabla T \quad \dots\dots\dots (27)$$

以上の結果をまとめると導電性磁性流体の応力テンソルは最終的に以下のように決定される。

$$\begin{aligned} T = & (-p + \alpha_1 + \beta_1) I + 2\alpha_2 e + 3\alpha_3 e \cdot e + \alpha_6 E E + \alpha_7 (E \cdot e E + E e \cdot E) \\ & + \alpha_8 H H + \alpha_9 (H \cdot e H + H e \cdot H) + 2\beta_2 d + 3\beta_3 d \cdot d + D E + B H \\ & - (\epsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2) I / 2 \quad \dots\dots\dots (28) \end{aligned}$$

これまでは複合過程を仮定してきたが、ここで結合過程の場合を考えると、式(17)の基本不変量は I_1 から I_6 までの5個となり、構成方程式は従来の理論と比較して以下のように決定される。

$$\begin{aligned} T = & -p' I + \lambda_1 (\text{tr } e) I + 2\lambda_2 e + \lambda_3 e \cdot e + \eta_2 (\text{tr } d) I + 2\eta d + \eta_3 d \cdot d \\ & + D E + B H - (\epsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2) I / 2 \quad \dots\dots\dots (29) \end{aligned}$$

$$P = \chi_e E, \quad M = \chi_m H, \quad q = -\kappa \nabla T \quad \dots\dots\dots (30, 31, 32)$$

ここで、 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ は弾性係数、 η, η_2, η_3 は粘性係数、 $\chi_e = -\alpha_4, \chi_m = -\alpha_5$ はそれぞれ分極率および磁化率、 κ は熱伝導率で、圧力 p' には式(23)の p の他、熱膨張を表す項も含まれている。

6. 結論

以上のように、基本不変量理論と最大散逸速度の原理を基礎とした熱力学的手法による導電性磁性流体の構成方程式の誘導は従来の手法と比較して次のような特徴を有している。すなわち、構成方程式には熱力学的に許容される項のみが含まれており、すべての構成方程式が標構無差別性の原理を満足している。また、式(29)の右辺第4、7項のように非線形項をも含めて、結合過程のみならず複合過程を仮定した場合にでも構成方程式を誘導することができ、非常に有効な手法である。

参考文献

- (1)井門・棚橋, 日本機械学会論文集, 現在投稿中, 論文No. 88-1587.
- (2)志澤・棚橋, 日本機械学会論文集, 51-468 B(昭60), 2737.
- (3)志澤・棚橋, 日本機械学会論文集, 52-473 B(昭61), 325.
- (4)Spencer, A. J. and Rivlin, R. S., Arch. Rat. Mech. Anal., 2(1959-a), 309.
- (5)Spencer, A. J. and Rivlin, R. S., Arch. Rat. Mech. Anal., 2(1959-b), 453.
- (6)Spencer, A. J. and Rivlin, R. S., Arch. Rat. Mech. Anal., 4(1960), 214.
- (7)Tarapov, I. E., Magnit. Gidrodin., No. 1(1972), 1.
- (8)棚橋, 機械の研究, 35-8(昭58), 930.
- (9)棚橋・岡永・井門, 日本機械学会論文集, 現在投稿中.
- (10)尹・井門・岡永・棚橋, 日本機械学会論文集, 現在投稿中, 論文No. 88-1226.
- (11)Ziegler, H., An Introduction to Thermomechanics, (1983), 245, North-Holland Pub. Co..