積分による安定計算の方法について

The Method of a Stability Analysis by Integration

藤 原 明 敏* 井 戸 徹*
Akitoshi FUJIWARA Toru Ibo

Abstract

Various methods are used to analyse a slope such as the friction circle method, Fellenius and Bishop method; method of slices, Jambu's method and others.

The topographic profile of landslides are often complexed so that the analysis method is the more simplified, the better. Method of slices is fitted to these requirements but it still needs amounts of manual calculation. These days, we take the advantage of micro computers, already installed in our laboratories.

It takes long to analyse a slope though we use a micro computer when we adopt the high density slice method. Auther thinks method of slice' called simplified method should be more improved one. Digesting the method of slice, it was found integration method is adoptable for micro computers. Interpreting the expression (integration equality) for a computer and running it, it is clafified that the integration method is quite fitted to computers, results are theoretically accurate and executing time is shorter than the other methods.

1. はじめに

地すべり変動機構の解析には、すべり面形状決定のための地形・地質・地質構造・地すべり現象等の十分なる把握はもとより、地すべりの変動状況を計測機器によって測定することが必要であり、これらの状況を包括考察したうえですべり面形状を決定し、ついで安定解析へと進行する。

安定解析は旧来より各種の方法が行われてきているが、現在最も普及しているのは、いわゆる簡便方法と呼ばれるものである。この方法は分割計算による方法であるが同一のすべり面を解析した場合でも少しずつ解析結果が異なってくるのが実情である。したがって、より正確な解析を行うことを目的として、今回、解析結果が一義的に定義される積分法による解法を試みたので、ここに報告するものである。

2. 安定解析の一般的方法

安定解析の方法は多種類あるが、どの方法をとる場合でもいくつかの検討条件を設定しておく必要がある。検討条件とは、すべり面形状、土のせん断強度、安全率算出方法などである。すべり面形状は、演算し易いように側面抵抗を無視して2次元の扱いをし、形状は真円または真円と直線の組合せに近似させる。土のせん断強度は

全応力法か有効応力法による。安全率はモーメント比によるかあるいはせん断応力に注目する方法のいずれをとるかを定める。

安定解析を進めるにはこれらの他に、斜面の形状、地すべり地質断面、土の単位体積重量、土塊強度、間隙水圧などを把握しておく必要がある。

各種の解析方法のうち現在最も広く使われているのは、すべり面を真円あるいは真円と直線の組合せによる複合体としたうえで分割法を用いる方法である。この方法は斜面形が不規則な場合にも演算し易い特徴をもつものである。

2.1 分割法の一般

分割法はすべり土塊を鉛直方向に細長く分割し、各分割片の鉛直方向重量(力)を、すべり面の接線方向成分=推力と接線垂直方向成分に分力して、そのせん断応力を求めるものである。その方法としては、(i)合衆国開拓局の簡便法、(ii)スウェーデン法、(iii)フェレニウス法、(iv)バターソン法、(v)ビショップ法、(vi)ヤンプ法などがあり、このうち、(i)の簡便法が使用の容易さもあって、国内各省庁を含めて広く用いられている。簡便法(スウェーデン法、フェレニウス法、バターソン法もほぼ同じ)とビショップ法(ヤンプ法はビショップ法を拡大したものと考えられるのでこれに含める)を示すと、図-1のようになる。簡便法の式(1-1式)とビショップ法の式(1-2式)の違いは、摩擦抵抗係数($\tan \phi$)に対する考え方

* (株)防災技術コンサルタント

の差によるもので、 $\tan \phi = 0$ とすれば同一の式となる。
簡便法の式

$$F_s = \frac{\sum S \cdot l}{\sum W \cdot \sin \theta} = \frac{\sum \{c' \cdot l + (W \cos \theta - ul) \tan \phi'\}}{\sum W \cdot \sin \theta} \quad \dots\dots\dots(1-1)$$

F_s : 安全率, W : 単位幅当りの分割片の重力による応力 (t/m), l : 分割片がすべり面を切る弧の長さ (m), θ : 分割片とすべり面の傾斜角 (度), u : すべり面の単位面積当りの間隙水圧 (t/m²), S : 単位面積当りのせん断強さ (t/m²), σ : すべり面に垂直方向の有効応力 (t/m²), c' : 土の粘着力 (t/m²), ϕ' : 土の内部摩擦角

図-1 分割法概念図

ビショップ法の式

$$F_s = \frac{1}{\sum W \sin \alpha} \sum \left\{ \{c' b + \tan \phi' (W - ub)\} \times \frac{1}{\cos \alpha + \frac{\tan \phi \sin \alpha}{F_s}} \right\} \quad \dots\dots\dots(1-2)$$

b : 分割片の幅

以下、最も普及している簡便法の演算方法に関する検討結果を報告する。

3. 現在使用されている演算方式

広く用いられている演算方式は筆算 (含電卓) による分割方式と、小型電子計算機を用いた詳細分割方式である。詳細分割方式とは分割計算時に分割片の幅を小さくして、少しでも理論値に近づけようとする方法で、精度は演算時間がいたずらに長くなるのを避けるために分割幅を 1.0m にして実行されている。一方、積分方式による演算方法もすでに実行されているが、詳細分割方式と積分方式はまだ普及していないので紹介する。

3.1 詳細分割方式

従来の分割計算は、スライス分割の方法によって結果が少しずつ異なるため、演算方式としては幾分の欠陥を伴う。この欠点をなくすため、スライス分割幅 (D) を一定にした方式を採用し、地すべり土塊の安定解析には、実用上の精度として $D=1.0\text{m}$ を採用している。この方

式は非常に複雑な繰返し計算となるため、電子計算機を使用することによってはじめて可能になるものである。

A) 円弧部分の演算

図-2 において、円弧の諸元と地形座標は既知とする。薄墨部分は、1m 幅のスライスであり、このスライスの面積 (A)、すべり面長 (L) は容易に算出されるが、すべり推力 (T)、すべり土塊法面力 (N) は、重心位置を求めてから仰角 (θ) を算出し、はじめて

$$T = \gamma \cdot A \cdot \sin \theta$$

$$N = \gamma \cdot A \cdot \cos \theta$$

が得られることになる。この方法は 1m 幅ずつ演算位置を更新する膨大な繰返し計算の集合である。

* D は自由に設定できるが、実用上は 1.0m でよい

図-2 詳細分割方式概念図

B) 直線部分の演算

容易なので説明を省略する。

3.2 積分方式

A) 円弧部分の積分

図-3 において、円弧は $y = (x - x_c)^2 + (y - y_c)^2$ 、地表地形は $y = mx + n$ にて与えられているものとすれば、非常に小さい区間 dx の推力成分 T と法面方向成分 N 、面積 A 及びすべり面長 L は

$$T = \int \{f(x) - g(x)\} \cdot \sin \theta \cdot \gamma \cdot dx \quad \dots\dots\dots(3-1)$$

$$N = \int \{f(x) - g(x)\} \cdot \cos \theta \cdot \gamma \cdot dx \quad \dots\dots\dots(3-2)$$

$$A = \int \{f(x) - g(x)\} \cdot dx \quad \dots\dots\dots(3-3)$$

図-3 円弧部分の解析図

$$L = \int \frac{1}{\cos \theta} \cdot dx \dots\dots\dots (3-4)$$

但し, $f(x) = (R^2 - (x - x_c)^2)^{1/2}$, $g(x) = mx + n$

$$\sin \theta = \frac{x - x_c}{R}, \quad \cos \theta = (1 - \sin^2 \theta)^{1/2}$$

γ : 土塊の単位体積重量

したがって, 地表地形が $y = mx + n$ であらわされる区間の安定解析は, 計算をし易いよう, x について考えると,

$$\Sigma T = \gamma \int \{f(x) - g(x)\} \cdot \sin \theta \cdot dx \dots\dots\dots (3-5)$$

$$= \frac{\gamma}{R} \left(\frac{m}{3} x^3 + \frac{P}{2} x^2 - Qx \right) - \frac{R^2 \gamma}{3} \cdot \cos^3 \theta \quad (3-6)$$

$$= \frac{\gamma}{R} \cdot \left(\frac{m}{3} \cdot x^3 + \frac{P}{2} \cdot x^2 - Q \cdot x \right) - \frac{R^2 \gamma}{3} \cdot \left\{ 1 - \left(\frac{x - x_c}{R} \right)^2 \right\}^{3/2} \dots\dots\dots (3-7)$$

$$P = n - y_c - m \cdot x_c$$

$$Q = (n - y_c) \cdot x_c$$

$$\Sigma N = \gamma \int \{f(x) - g(x)\} \cdot \cos \theta \cdot dx \dots\dots\dots (3-8)$$

$$= A \cdot \cos^3 \theta + B \cdot (\theta + \sin \theta \cdot \cos \theta) + c \cdot \left(\sin \theta - \frac{1}{3} \sin^3 \theta \right) \dots\dots\dots (3-9)$$

$$= A \cdot \left\{ 1 - \left(\frac{x - x_c}{R} \right)^2 \right\}^{3/2} + B \left[\sin^{-1} \frac{x - x_c}{R} + \frac{x - x_c}{R} \cdot \left\{ 1 - \left(\frac{x - x_c}{R} \right)^2 \right\}^{1/2} \right] + R^2 \gamma \cdot \left\{ \frac{x - x_c}{R} - \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{x - x_c}{R} \right)^3 \right\} \dots\dots (3-10)$$

$$A = \frac{-m \cdot R^2 \cdot \gamma}{3}$$

$$B = \frac{R \cdot \gamma \cdot (m \cdot x_c + n - y_c)}{2}$$

$$\Sigma A = \int \{f(x) - g(x)\} \cdot dx = \frac{m}{2} x^2 + (n - y_c) x + \frac{R^2}{2} \theta - \sin \theta \cdot \cos \theta \dots\dots\dots (3-11)$$

$$= \frac{m}{2} x^2 + (n - y_c) x + \frac{R^2}{2} \cdot \left[\sin^{-1} \frac{x - x_c}{R} - \frac{x - x_c}{R} \cdot \left\{ 1 - \left(\frac{x - x_c}{R} \right)^2 \right\}^{1/2} \right] \dots\dots (3-12)$$

$$\Sigma L = \int \frac{1}{\cos \theta} dx \dots\dots\dots (3-13)$$

$$= R \cdot \sin^{-1} \frac{x - x_c}{R} \dots\dots\dots (3-14)$$

となり, 全て x 座標で示され, 容易に演算可能である。

B) 直線部分の積分

直線部分においても同様に, 図-4で,

$$T = \{f(x) - g(x)\} \cdot \sin \theta \cdot \gamma \cdot dx \dots\dots\dots (3-15)$$

$$N = \{f(x) - g(x)\} \cdot \cos \theta \cdot \gamma \cdot dx \dots\dots\dots (3-16)$$

$$A = \{f(x) - g(x)\} \cdot dx \dots\dots\dots (3-17)$$

$$L = \frac{1}{\cos \theta} \cdot dx \dots\dots\dots (3-18)$$

図-4 直線部分の解析図

但し, $\theta = \tan^{-1} S$

$$\Sigma T = \gamma \cdot \sin (\tan^{-1} S) \cdot \int \{f(x) - g(x)\} dx \dots\dots (3-19)$$

$$= \frac{1}{2} \sin \theta (m - S) x^2 + \sin \theta (n - T) x \dots\dots (3-20)$$

$$= \frac{\gamma \cdot \sin (\tan^{-1} S) \cdot (m - S)}{2} x^2 + \gamma \cdot \sin (\tan^{-1} S) \cdot (n - T) \cdot x \dots\dots\dots (3-21)$$

$$\Sigma N = \gamma \cdot \cos (\tan^{-1} S) \cdot \int \{f(x) - g(x)\} dx \dots\dots (3-22)$$

$$= \frac{1}{2} \cos \theta \cdot (m - S) x^2 + \cos \theta (n - T) x \dots\dots (3-23)$$

$$= \frac{\gamma \cdot \cos (\tan^{-1} S) \cdot (m - S)}{2} x^2 + \gamma \cdot \cos (\tan^{-1} S) \cdot (n - T) \cdot x \dots\dots\dots (3-24)$$

$$\Sigma A = \int \{f(x) - g(x)\} dx \dots\dots\dots (3-25)$$

$$= \frac{m - S}{2} \cdot x^2 + (n - T) x \dots\dots\dots (3-26)$$

$$\Sigma L = \int \frac{1}{\cos \theta} dx \dots\dots\dots (3-27)$$

$$= \frac{1}{\cos \cdot \tan^{-1} S} \cdot x \dots\dots\dots (3-28)$$

となり, 円弧部分同様に x 座標のみで示される。

これらの, x の関数としてあらわされた各式は, 現在一般に普及されつつある小型電子計算機 (マイ・コン, オフ・コン, パソ・コンなど) に比較的短いプログラムとして組みこむことが可能であり, さらに小型電卓にも組みこみが可能である。因みに, $fx 502P$ (256ステップ・22メモリー) カシオ製にて試みたが, ΣT , ΣN の演算は地形座標の繰り返し入力により自動演算させることが容量内で可能であった。

4. 積分方式・詳細分割方式・筆算分割方式の演算比較

3項にて導出した積分式の式(3-7, 3-10, 3-13, 3-14, 3-21, 3-24, 3-26, 3-28)を用いて演算を試み, 詳細分割方式, 筆算方式による演算結果と比較すると次のようになる。

A) 積分方式による演算経過

図-5 計算例に使用した地すべりの状況

使用機 SX-320 キャノン製

ii) 分割幅 $D=0.1\text{m}$ の場合

```

DENSITY= 1.8000 (T/M*M)
INPUT TYPE = 4
( 33.0123 )
X1= 2.00 Y1= 4.00 X2= 44.00 Y2= 8.00
NO. 1 7 13 7 13
NO. X Y H L A T N
1 10.00 4.76 0.00
2 12.00 8.00 3.05 2.01 3.05 0.52 5.46
3 15.00 8.40 3.16 3.01 9.31 1.53 16.69
4 18.00 11.00 5.43 3.01 12.96 2.21 23.22
5 23.40 13.00 6.96 5.42 33.53 5.73 60.18
6 30.00 16.00 9.33 6.63 53.77 9.13 96.36
7 34.24 16.95 9.88 4.26 40.77 6.96 73.05
ΣL 24.35 ΣH 153.44 ΣT 26.13 ΣN 274.95
( エンコウ )
MC= 33.0123 VC= 20.0000 R= 12.9877
NO. 7 13 13 7 13
NO. X Y H L A T N
7 34.24 16.95 9.88
8 35.60 17.20 9.93 1.37 13.45 3.56 23.93
9 38.00 17.40 9.39 2.51 23.28 12.19 40.03
10 40.00 17.50 8.45 2.26 17.91 14.62 28.59
11 42.00 19.00 8.38 2.55 16.93 18.74 23.97
12 44.60 19.00 4.87 4.39 17.75 25.04 19.62
13 46.00 20.00 0.00 6.09 4.84 8.13 2.94
ΣL 19.17 ΣH 94.17 ΣT 82.50 ΣN 139.03
ΣTL= 43.52 (M)
ΣTA= 247.61 (M**2)
ΣTN= 108.69 (T/M)
ΣDN= 414.04 (T/M)
    
```

CHOISAI GIJUTSU CONSULTANT CO., INC.

```

D= 1.00 DENSITY= 1.80
INPUT TYPE = 4
( 33.0123 )
X1= 2.00 Y1= 4.00 X2= 44.00 Y2= 8.00
NO. 1 7 13 7 13
NO. X Y H L A T N
1 10.00 4.76 0.00
2 12.00 8.00 3.05 2.01 3.05 0.52 5.46
3 15.00 8.40 3.16 3.01 9.31 1.53 16.69
4 18.00 11.00 5.43 3.01 12.96 2.21 23.22
5 23.40 13.00 6.96 5.42 33.53 5.73 60.18
6 30.00 16.00 9.33 6.63 53.77 9.13 96.36
7 34.24 16.95 9.88 4.26 40.77 6.96 73.05
ΣL 24.35 ΣH 153.44 ΣT 26.13 ΣN 274.95
( エンコウ )
MC= 33.0123 VC= 20.0000 R= 12.9877
NO. 7 13 13 7 13
NO. X Y H L A T N
7 34.24 16.95 9.88
8 35.60 17.20 9.93 1.37 13.45 3.56 23.93
9 38.00 17.40 9.39 2.51 23.28 12.19 40.03
10 40.00 17.50 8.45 2.26 17.91 14.62 28.59
11 42.00 19.00 8.38 2.55 16.93 18.74 23.95
12 44.60 19.00 4.87 4.39 17.75 25.04 19.58
13 46.00 20.00 0.00 6.09 4.84 7.52 2.83
ΣL 19.17 ΣH 94.17 ΣT 81.72 ΣN 138.87
ΣTL= 43.52 (M)
ΣTA= 247.60 (M**2)
ΣTN= 107.91 (T/M)
ΣDN= 413.82 (T/M)
    
```

CHOISAI GIJUTSU CONSULTANT CO., INC.

B) 現在使用している詳細分割方式による演算経過

使用機 SX-320 キャノン製

i) 分割幅 $D=1.0\text{m}$ の場合

```

D= 0.10 DENSITY= 1.80
INPUT TYPE = 4
( 33.0123 )
X1= 2.00 Y1= 4.00 X2= 44.00 Y2= 8.00
NO. 1 7 13 7 13
NO. X Y H L A T N
1 10.00 4.76 0.00
2 12.00 8.00 3.05 2.01 3.05 0.52 5.46
3 15.00 8.40 3.16 3.01 9.31 1.53 16.69
4 18.00 11.00 5.43 3.01 12.96 2.21 23.22
5 23.40 13.00 6.96 5.42 33.53 5.73 60.18
6 30.00 16.00 9.33 6.63 53.77 9.13 96.36
7 34.24 16.95 9.88 4.26 40.77 6.96 73.05
ΣL 24.35 ΣH 153.44 ΣT 26.13 ΣN 274.95
( エンコウ )
MC= 33.0123 VC= 20.0000 R= 12.9877
NO. 7 13 13 7 13
NO. X Y H L A T N
7 34.24 16.95 9.88
8 35.60 17.20 9.93 1.37 13.45 3.56 23.93
9 38.00 17.40 9.39 2.51 23.28 12.19 40.03
10 40.00 17.50 8.45 2.26 17.91 14.62 28.59
11 42.00 19.00 8.38 2.55 16.93 18.74 23.97
12 44.60 19.00 4.87 4.39 17.75 25.04 19.62
13 46.00 20.00 0.00 6.09 4.84 8.13 2.94
ΣL 19.17 ΣH 94.17 ΣT 82.50 ΣN 139.03
ΣTL= 43.52 (M)
ΣTA= 247.61 (M**2)
ΣTN= 108.69 (T/M)
ΣDN= 414.04 (T/M)
    
```

CHOISAI GIJUTSU CONSULTANT CO., INC.

C) 筆算分割方式による演算経過

No.	h_1	h_2	d	A	$\theta(^{\circ})$	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$W=1.8A$	
								$W\sin\theta$	$W\cos\theta$
1	0	3.0	2.0	6.0	5.0	0.087	0.996	0.94	10.76
2	3.0	3.4	3.0	9.6	5.0	*	*	1.503	17.21
3	3.4	5.5	3.0	13.35	5.0	*	*	2.091	23.93
4	5.5	7.0	3.4	21.25	5.0	*	*	1.849	21.17
5	7.0	6.6	6.6	54.12	5.0	*	*	8.475	97.03
6	6.6	10.0	4.2	34.86	5.0	*	*	5.459	62.50
7	10.0	10.0	2.6	26.0	5.0	*	*	4.072	46.61
8	10.0	9.4	2.4	23.28	16.0	0.276	0.961	11.556	40.27
9	9.4	8.6	2.0	18.0	27.0	0.454	0.891	14.710	28.87
10	8.6	8.6	2.0	17.2	38.5	0.623	0.783	19.288	24.24
11	8.6	5.0	2.6	17.68	53.5	0.804	0.595	25.586	18.94
12	5.0	0	1.4	3.5	70.5	0.943	0.334	5.941	2.10
Σ				244.84				101.48	393.63
直線部分				139.18				20.317	232.60
円弧部分				105.66				81.163	161.03

直線部分
円弧部分

以上の演算結果をまとめると表-1 のようになる。

表-1に示すように理論値である積分方式の演算結果に対して、他の方式では、 ΣT 、 ΣN がわずかに小さいことが判明した。1)~3)の演算経過によると特に円弧部分において数値の違いが認められるため、円弧部分を取り出して比較すると、表-2 のようにすべり面の仰角が大

きくなるに従って差違があらわれてくる。

各計算方式とも、特に詳細分割方式の演算結果は限りなく積分方式による理論値に近づくが同一とはなり得ない。

積分方式は普及しはじめた小型電子計算機による演算が十分に可能であるばかりでなく、入力データとして測量データをそのまま使用でき、さらに他の方式よりも演算が正確で、しかも非常に高速演算である余りもある。これからの安定解析は本方式による方法が最も理にかなっているものと思われる。

5. まとめ

安定解析には種々の方法があるが、最も広く用いられているのは簡便法である。この方法の演算方式のうち、積分方式・詳細分割方式・筆算方式の3種について比較検討を行った結果、電子計算機を用いれば、積分方式は入力容易で理論値を速かに得られるが、詳細分割方式では、入力は容易であるが理論値そのものは得られず、演算所要時間が長くなることが判明した。筆算方式は演算過程でしばしば人為誤差を生ずる可能性が大である。したがって電子計算機を使用できる場合には、積分方式の利用を推奨するものである。しかしながら、詳細分割方式・筆算方式とも積分方式に比して演算速度こそ低いが、実用上差支えることは無く、演算環境に応じて十分に利用価値があることを言及しておく。

主 要 文 献

1. 大草重康・柴田哲男共訳 (1980)：地すべり工学，森北出版，

表-1 各種計算方法による結果

計 算 の 方 法	すべり面長 ΣL (m)	すべり土塊 の断面積 ΣA (m ²)	すべり推力 ΣT (t/m)	すべり土塊 法 面 力 ΣN (t/m)
A) 積 分 方 式	43.52	247.61	108.69	414.04
B) 現在使用している詳細分割 方式。分割幅 $D=1.0m$	43.52	247.60	107.91	413.82
B) 同 上 $D=0.1m$	43.52	247.60	108.63	414.03
C) 筆 算 に よ る 方 式	40.45	244.84	101.48	393.63

表-2 各種計算方法の円弧部分の結果

計 算 の 方 法	すべり面長 ΣL (m)	すべり土塊 の断面積 ΣA (m ²)	すべり推力 ΣT (t/m)	すべり土塊 法 面 力 ΣN (t/m)
A) 積 分 方 式	19.17	94.17	82.50	139.09
B) 詳細分割方式。分割幅 $D=1.0m$	19.17	94.16	81.72	138.87
B) 同 上 $D=0.1m$	19.17	94.16	82.44	139.08
C) 筆 算 に よ る 方 式	18.16	105.66	81.16	161.03

pp. 198~217, 原著 (1977) N. N. マスロフ

2. クイドザルバ・ボイチエフメンツェル (1967)：LAND SLIDES and THEIR CONTROL, ELSEVIER, pp. 123~137

3. 福岡正巳・谷口敏雄 (S48)：地すべり調査と対策講座Ⅴ地すべり斜面の安定解析，全国地すべり対策協議会，pp. 1~110

4. 藤原明敏・谷口敏雄 (45)：地すべり調査と解析，理工図書，pp. 117~125

5. 藤原明敏 (S. 54)：地すべりの解析と防止対策，理工図書，pp. 141~151.

6. 小橋澄治 (S. 50)：斜面安定，鹿島出版会，pp. 58~67

7. R. N. チョードリ (1978)：SLOPE ANALYSIS, ELSEVIER, pp. 132~159, pp. 277~311.

8. 矢野義男・谷勲・釣谷義範・渡正亮 (S. 43)：砂防・地すべり工事ハンドブック，山海堂，pp. 192~204.

9. 谷口敏雄 (1972)：地すべり調査と対策，山海堂，pp. 1~254.
(原稿受理日 昭和56年6月3日)