引張り亀裂を有する斜面の全体安全率の計算

Calculations of Total Safety Factor of Slopes with Tension Cracks

鵜飼 恵 三*

Keizo UGAI

Abstract

This paper introduces a method for calculations of minimum total safety factors of slopes by means of the elasto-plastic FEM, considering tension cracks. Soils are assumed as elasto-plastic materials which obey the Mohr-Coulomb equation as the yield condition (or failure condition) and the Drucker-Prager equation as the flow rule.

The procedure of calculations is as follows. First, the shear strength of soils is assumed as $\tau_f = c' / F + \sigma' \tan \phi' / F$. The initial value of F is taken so small that the initial state of a slope is almost elastic. Next the value of F is increased step by step, and finally the ultimate value of F where slope failure occurs, is determined as the minimum total safety factor of the slope. If large tensile stresses occur in the slope, the above procedure is repeated again after thin elements with small strength and low Young's modulus are inserted into the places where tension cracks are assumed to appear.

It is shown that the method presented here can take account of tension cracks as well as pore water pressures properly which always reduce the safety factor of slopes.

キーワード: 有限要素法, 塑性, 安全率, 斜面安定解析

1. まえがき

任意の地形形状, 不均質な土質分布及び不規則な間隙水圧分布を有する一般的な斜面の安全率を求める方法を確立することは, 斜面安定解析法の進展という立場ばかりでなく, 実務においても大変重要なことである。通常斜面の安全率の計算は, 分割法のような極限平衡法にもとづいて行われるが, 上記のような一般的な斜面の最小安全率を求めることは, 困難であることが多い。

一方, 最近, 電算機とFEM(有限要素法)の発達に伴い, 斜面の安定問題を弾塑性FEMにより解明しようとする試みが盛んになってきた。FEMは応力状態のみならず変形状態も表現できること, 局所的な破壊現象を把握することができるなど, 斜面の安定性を実態に即した形で表現できる。しかし, FEMで計算される安全率は一般に局所安全率であり, 分割法などで計算される全体安全率との関係が明瞭ではなかった。この点を克服するために筆者はZienkiewiczら¹⁾の方法を発展させ, 弾塑性FEMにもとづいて斜面の全体安全率を計算する方法を提案してきた^{2),3)}。最近, この方法をさらに進展させ, 引張り亀裂をも考慮できるようにしたので, ここに報告を行う。

2. 本方法と極限平衡法から計算される安全率の類似点と相違点

本報告で提示される方法により算出される安全率は全体安全率であり, 極限平衡法(分割法など)から得られる安全率と同じ意味をもつ。このことを説明するために, まず従来の極限平衡法によって斜面の安全率を求める手順を復習してみよう。

極限平衡法では, 土のせん断強度 τ_f は

$$\tau_f = c' + \sigma' \tan \phi' \cdots \cdots \cdots (1)$$

で表せるとする。ここで, c' と ϕ' は有効応力に関する土の粘着力と摩擦角であり, σ' は想定されたすべり面上の有効垂直応力である。斜面内に, あるすべり面を想定し, すべり面上のせん断応力 τ が

$$\begin{aligned} \tau &= \tau_f / F_s \\ &= c' / F_s + \sigma' \tan \phi' / F_s \cdots \cdots \cdots (2) \end{aligned}$$

で表せるとする。 σ' の大きさは, たとえば分割法では, 分割片に作用するいくつかの力のつり合いより決定する。このうち, すべり土塊全体の力のつり合い式もしくはモーメントのつり合い式を立て, これから未知量 F_s の値を決定し, これを対応するすべり面に関する斜面の安全率と定義する。さらに, 最小安全率を求めるためには, 多数のすべり面を想定した上で安全率を計算し, それらの中から最小値を見出す必要がある。すでに示したよ

* 群馬大学工学部建設工学科

うに⁴⁾、極限平衡法は、すべり土塊全体の力のつり合いとモーメントのつり合いをすべて満たすとは限らない。たとえば簡便法 (Fellenius 法) はモーメントのつり合いは満たすが、力のつり合いは満たさない。従って、このような方法から計算される安全率には、おのずから精度の限界がある。一方、本報告で提示する弾塑性 FEM にもとづく方法では、式(1)と式(2)はもちろんのこと、すべり土塊のみならず有限要素に作用する力とモーメントのつり合いが、FEM の精度の範囲内であるが、完全に満たされる。そして最小安全率も同時に得られ、すべり領域あるいはすべり面も確定する。

3. 本計算法の概要

地盤は 2 次元平面歪状態であるとし、弾完全塑性の性質を示すとする。土の破壊条件として Mohr-Coulomb 式 (式(1)もしくは式(3))、塑性ポテンシャルとして、Drucker-Prager 式 (式(4)) を仮定する。これらを xy 座標系での応力成分 σ'_x , σ'_y , τ_{xy} により表現すると、各々

$$f \equiv -(\sigma'_x + \sigma'_y) / 2 \cdot \sin \phi' + \sqrt{(\sigma'_x - \sigma'_y)^2 / 4 + \tau_{xy}^2} - c' \cos \phi' = 0 \quad \dots\dots\dots(3)$$

$$\Phi = -(\sigma'_x + \sigma'_y) / 2 \cdot \sin \psi + \sqrt{(\sigma'_x - \sigma'_y)^2 / 4 + \tau_{xy}^2} - c' \cos \psi \quad \dots\dots\dots(4)$$

となる。 ϕ はダイレイタンシー角である。これまでの研究から、 ψ が大きいほど斜面の安全率は大きくなるが、その影響はそれほど大きくないことがわかっている。土が破壊状態にあるとき、体積変化はゼロに近いと考えられるので、 $\psi = 0$ として計算すればよい。ただし、 ϕ' が大きい砂地盤では

$$\psi = \phi' - \phi'_{crit} \quad \dots\dots\dots(5)$$

とすると、砂の要素試験結果と近似的に符合する⁵⁾。ここで ϕ'_{crit} は、同じ砂の非常にゆるい状態での ϕ' の値である。弾塑性 FEM の定式化に際して必要になる応力増分 $d\sigma^T = (d\sigma_x \ d\sigma_y \ d\tau_{xy})$ と全歪増分 $d\epsilon^T = (d\epsilon_x \ d\epsilon_y \ d\gamma_{xy})$ との関係は次のようになる⁶⁾。ここで、添字 T は、行と列の置き換え (転置) を表す。

$$d\sigma = \left[D^e - (1-r) \frac{D^e \{ \partial \Phi / \partial \sigma \} \{ \partial f / \partial \sigma \}^T D^e}{\{ \partial f / \partial \sigma \}^T D^e \{ \partial \Phi / \partial \sigma \}} \right] d\epsilon \quad \dots\dots\dots(6)$$

ここで、 D^e は弾性係数マトリクスである。

$$D^e = \frac{E}{2(1+\nu)} \begin{bmatrix} 2(1-\nu)/(1-2\nu) & 2\nu/(1-2\nu) & 0 \\ 2\nu/(1-2\nu) & 2(1-\nu)/(1-2\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \dots\dots\dots(7)$$

と表せる。 E と ν は、土のヤング係数とポアソン比である。 E と ν の大きさは、斜面の安全率の計算結果に大き

な影響を与えないことが、これまでの計算例からわかっている。式(6)で $\{ \}$ は列ベクトルを表し、たとえば

$$\{ \partial \Phi / \partial \sigma \}^T = (\partial \Phi / \partial \sigma_x \ \partial \Phi / \partial \sigma_y \ \partial \Phi / \partial \tau_{xy}) \quad \dots\dots\dots(8)$$

である。地盤が弾性変形をするときは、式(6)で $r=1$ とおく。完全な弾塑性状態では $r=0$ とする。弾性状態から弾塑性状態へと移行する場合には、 $0 < r < 1$ であり、 r の値は文献 6) などに示される方法から決定する。以上の仮定によれば、均一な地盤の土質定数は、 E , ν , c' , ϕ' , ψ 及び γ の六つのパラメータによって表現されることになる。

計算の具体的な方法を説明しよう。図-1(a)のような斜面の安全率を計算するために、8 節点 4 辺形アイソパラメトリック要素を用いてメッシュ分割する。ある要素の中の一つのガウス点 A に着目する。土のせん断強度 τ_f は

$$\tau_f = c' + \sigma' \tan \phi' \quad \dots\dots\dots(1)$$

で表せるとする。今、仮想的に土のせん断強度が式(1)を係数 F で割った形で表せると仮定しよう。すなわち

$$\tau_F = c' / F + \sigma' \tan \phi' / F \quad \dots\dots\dots(9)$$

最初 F の値を小さくすると、仮想的なせん断強度 τ_F は大きくなるので、点 A での応力状態は弾性状態になる (図-1(b))。次に F を段階的に大きくしていくと、ある F の値のとき、式(9)は A 点でのモール応力円と交差するようになる (図-1(c))。このような応力状態は存在しえないので、図-1(c)の破線の内円で示すようにモール円が仮想的なせん断強度線に接するよう応力補正を行う。さらに F を増加させて計算を行い、ある段階での弾塑性 FEM の反復計算が発散し斜面が崩壊に至ったと判断されたときの F の値を斜面の (全体) 安全率と定義する。

4. 間隙水圧と引張り亀裂の考慮の仕方

斜面内の間隙水圧 (静水圧、透水による水圧、盛土内での過剰間隙水圧) の分布と大きさは、与えられるものとする。これを FEM 計算に組み込む方法は、すでに文献 3) などで説明したが、それは 3 節点 3 角形要素 (要素内で応力と歪が一定) に対するものであった。本報告では 8 節点 4 辺形アイソパラメトリック要素と有限要素として用いているので、その場合の間隙水圧の考慮の仕方を説明する。

図-2 に示す要素の四つの頂点の番号を I, J, K, L とし、各節点位置での水圧を $p(I)$, $\dots$, $p(L)$ とする。四つの辺上では水圧は直線分布であると仮定し、各辺上の全水圧を計算する。そして、これらの水圧の合力を計算する。次にこの合水圧は、要素に作用する一様な物体力から生じたものであると仮定し、等価節点力に換算する。そしてこの等価節点力を、各節点に合水圧と同じ方向に作用させる。このようにして水圧を等価節点力

図-1 計算の方法を説明するための図

に置き換えた。以上の仮定が正しいかどうかをチェックするために、ある斜面で、完全水没のケースと、非水没で水中重量を用いたケースの計算結果を比較したところ安全率やせん断歪分布などが完全に一致することがわかった。

次に、引張り亀裂の考慮の仕方を説明する。引張り亀裂が斜面上部に予測されるときには、図-3のように鉛直方向に何箇所か薄い要素をはさんでおく。このようなメッシュ分割のもとで、まず引張り亀裂を考慮しない弾塑性 FEM 計算を行い、斜面のすべり破壊状態における応力分布を求める。このとき、挿入されている薄い要素のうち、引張り応力が作用しているものをピックアップする。次に、引張り亀裂を考慮した解析を行う。その方法は、以前と同じメッシュ分割で、引張り応力の作用した薄い要素の強度定数を他の要素よりもかなり小さくし、かつヤング係数も小さくする。また自重はゼロにしてし

図-2 4 辺形要素に作用する水圧

図-3 引張り亀裂を考慮するためのメッシュ分割の例

まう。そして再び弾塑性 FEM 計算を行い、斜面の破壊状態を求め、応力分布を決定する。このとき、斜面上部の要素内に大きな引張り応力が生じていなければ、その結果を引張り亀裂を考慮した正しい解析結果と考える。安全率の値は、引張り亀裂を考慮したときの方が当然小さくなる。

5. 計算例

図-4(a)に示す斜面を対象にして計算の具体的な方法と計算結果を示す。斜面の高さは 10 m、勾配は 45°である。土質定数は次のようである。 $E = 20000 \text{ tf/m}^2$, $\nu = 0.25$, $c = 2 \text{ tf/m}^2$, $\phi = 20^\circ$, $\psi = 0^\circ$, $\gamma = 2 \text{ tf/m}^3$ 。

5.1 引張り亀裂を考慮しないケース

図-5(a)に弾塑性 FEM による結果を示す。図中には斜面崩壊直前の最大せん断歪速度 $\dot{\gamma}_m$ (相対値) の分布図が示されている。安全率は 1.26 となった。簡便分割法と簡易 Bishop 法による最小安全率は、各々 1.23 と 1.27 であり、弾塑性 FEM による値とほぼ一致する。また、これらの分割法によるすべり面の位置も、図-5(a)に示されるすべり領域内にほぼ収まることが確認された。

同じ斜面で間隙水圧を考慮した解析を行った。斜面内

図-4 計算例に用いた斜面とメッシュ分割

の間隙水圧は

$$u = r_u \gamma h \quad \text{.....(10)}$$

で表せるとした。 r_u は間隙水圧係数と呼ばれ、その位置での間隙水圧と土被り圧との比を表わす。 h は斜面の表面からの深さである。図-5(b)に崩壊直前の $\dot{\gamma}_m$ の分布図を示す。弾塑性FEMによる安全率は1.03になった。簡便分割法と簡易 Bishop 法による最小安全率は1.00と1.05であり、ほぼ一致する。すべり面の位置もほぼ同様であることがわかった。

以上より、均質な単純斜面で、間隙水圧が大きくない場合には、本報告で述べる弾塑性FEMから得られる安全率の値と、代表的な分割計算法から得られる最小安全率の値はほぼ一致し、すべり面形状も同様となることが確認された。

5.2 引張り亀裂を考慮するケース

図-5(a), (b)に示される斜面の崩壊直前の応力状態を調べると、斜面の上部に水平方向の引張り応力が生じていることが確認された。たとえば図-5(a)のケースでは、図-6に示される斜線部に引張応力が生じていた。そこで、このような引張応力を低減させるためにAB線部とCD線部を含む幅5cmの薄い要素を図-4(b)のように配置した上で、ABとCD部の土質定数を次のように変えた。

$$E = 200 \text{ tf/m}^2, \nu = 0, c = 0.02 \text{ tf/m}^2, \phi = 0^\circ, \gamma = 0 \text{ tf/m}^3$$

すなわち、引張り亀裂を考慮するために、その部分に伸張性が良く強度と自重の小さい要素をそう入した。図-7に崩壊直前の $\dot{\gamma}_m$ の分布図を示す。この図より、鉛直線

図-5 崩壊直前の最大せん断歪速度 $\dot{\gamma}_m$ (相対値)の分布
(a) $r_u = 0$, (b) $r_u = 0.5$

図-6 図-5(a)のケースにおける引張り応力発生箇所(斜線部)

BA 図-6に沿って深さ2mの亀裂が発生し、亀裂下端よりすべり領域が始まっている様子がうかがえる。図-6において斜面上部に存在した引張り応力は図-7においては1/5以下に低減していることがわかった。また、斜面の安全率は1.24となり、亀裂を考慮しないケースに比べ0.02低下した。引張り亀裂を考慮した効果をより明瞭に示すために、図-6のDCを通る鉛直線上の水平応力 σ_x の分布を示したのが図-8(a), (b)である。図-8より斜面上部に発生していた引張応力が、引張り亀裂を考慮することによりほぼゼロになっているのがわかる。

図-9は $r_u = 0.5$ のケースで、引張り亀裂を考慮した場合の崩壊直前の $\dot{\gamma}_m$ の分布図である。引張り亀裂は、

図-7 引張り亀裂を考慮したときの崩壊直前の γ_m (相対値) の分布 ($r_u = 0$)

図-9 引張り亀裂を考慮したときの崩壊直前の γ_m (相対値) の分布 ($r_u = 0.5$)

図-8 DC (図-6) を含む鉛直線上の σ_x 分布
(a)引張り亀裂を考慮しないケース
(b)考慮したケース

図-10 BA (図-6) を含む鉛直線上の σ_x の分布
(a)引張り亀裂を考慮しないケース
(b)考慮したケース

図-6の点BとDから4mの深さまで達するとして計算を行った。この際、浮力により上方向の荷重が発生しないよう、亀裂部の薄い要素の単位体積重量を 1 tf/m^3 にした。斜面の安全率は1.01となり、亀裂を考慮しないケースに比べ0.02低下した。図-6のBAを通る鉛直線上の水平応力 σ_x の分布を示したのが図-10(a), (b)である。斜面上部に発生していた引張応力が、引張り亀裂を考慮することによりほぼゼロになっているがわかる。

6. あとがき

本報告では、通常用いられる弾塑性FEMに工夫を加えて、斜面の全体安全率を計算する方法を示した。そして、しばしば見られる斜面肩付近の引張り亀裂を考慮する方法を提示した。弾塑性FEMを用いて斜面崩壊の解析を行う事例は今後さらに増加してゆくものと思われるが、従来の慣用的な弾塑性FEM手法のみにとらわれず、それに色々な工夫を加えて安定解析を試みる必要があります必要となるであろう⁷⁾。

本計算で用いた弾塑性FEMプログラムは700行程度である。読者の中で必要とされる方がおられれば、コピーを差し上げる。筆者まで申し込まれたい。

参考文献

- 1) Zienkiewicz, O. C., Humpheson, C. and Lewis, R. W.: Associated and Non-associated Viscoplasticity and Plasticity in Soil Mechanics, Geotechnique, 25-4, pp. 671-689, 1975.
- 2) 鶴飼恵三: 弾塑性FEMによる斜面の全体安全率の計算法, 土質工学会論文報告集, 29-2, pp. 190-195, 1989.
- 3) 鶴飼恵三: 安定解析におけるせん断強度低減法の有用性, 土と基礎, 38-1, pp. 67-72, 1990.
- 4) 鶴飼恵三: 分割法による斜面の三次元安定性の検討, 土と基礎, 36-5, pp. 19-24, 1988.
- 5) Bolton, M. D.: The strength and dilatancy of sands, Geotechnique, 36-1, pp. 65-78, 1986.
- 6) 田中忠次: 「土質力学における数値解析」, わかりやすい土質力学原論, 土質工学会, pp. 203-243, 1987.
- 7) 藤田寿雄・吉松弘行・白石一夫: 地すべり対策杭の挙動と有限要素法による解析, 地すべり, 24-3, pp. 15-22, 1987.

(原稿受理日 平成3年10月21日)