有限要素法による要素網の切り直しを実施しない 近似飽和浸透流解析

An Approximate F. E. M. Analysis of A Free Surface Seepage without Re-mesh Iteration

吉 松 弘 行*

Hiroyuki YOSHIMATSU

Abstract

An approximate finite element method is presented for the transient unconfined flow of porous media combined with un-saturated zone. Free surface water line is progressed by the changing procedure of element situation according to the condition of flux values. This leads to an approximate but simple calculation scheme because of no-remesh element in spite of un-homogeneous media condition. The solution is compared with other solution. It shows the technique is capable of the giving meaningful results when the slope stability analysis carries out on the submerged landslide slope.

キーワード：浸透流解析，FEM，数値解析，非定常解析

1. まえがき

地すべり現象が豪雨時や融雪期に多発することは周知の事実であり、地下水の変動と地すべり運動の間には密接な関係があることが数多く報告されている。特に水没斜面における地すべりにおいては、斜面の一部が完全に水没することよりこの影響は大きなものがあり、降雨の影響を含めて湛水位変動による地すべり斜面内の地下水の変動を予測し、斜面安定解析を経てたうえで適切な対策工を実施しておく必要がある。

ところで、地下水の浸透流解析は、近年の高速電子計算機の発達と解決すべき系に関する微分方程式の解法として重み付き残差法が提案されて、浸透流問題は数値解析問題に帰結され、種々の非線形材料及び解析領域条件下の問題が解決できるようになった。特に、Nueman (1973) によって不飽和領域を含めて解析する有限要素による手法が提案されて以来、自由水面の非定常追跡の解析が解析領域網の再切り直しを行わず実施されるようになって、斜面安定問題とのカップリングが可能となった。しかしながら、不飽和領域を含めて解析するとなるとその領域内の複雑な透水性特性を明らかにする必要がある。また、飽和領域の解析をなす楕円型偏微分方程式と不飽和領域の解析をなす放物型偏微分方程式を連立して解くため初期条件及び要素網の慎重な設定が要求される(向ら, 1986)。

一方、自然斜面における浸透流解析の実施においては地山の不均質特性やすべり面での間隙水圧の把握のため、解析評価点を固定して実施しなければならない。従来の飽和浸透流解析は自由水面の変化に伴い要素網の切り直しが必要なため飽和・不飽和浸透流解析に比較して困難を伴っていた。

このため地下水浸透流斜面安定問題とのカップリングを目指して、飽和領域内の透水性特性のみ利用して解析領域の要素網の切り直しを行わない飽和浸透流解析手法の検討が行われている(Bathe, et al. 1979, Cividini, et al. 1984, Sara, et al. 1987, 吉田ら, 1993)。Cividini (1984) 以外の解析法は定常解析であって主に不飽和領域の透水性を零値などに見なして検討を進めたものである。吉田ら (1993) の手法は不飽和特性を特に考慮しなくても精度の高いポテンシャル近似解が得られるとして定常解析を実施したものである。

当文は、吉田らの手法を基本として Cividini ら (1984) の自由水面の設定基準を拡張適用し、不飽和領域も含め定常解析の繰返し演算によって自由水面の非定常追跡を行う手法を提案することが目的である。2 節で今回用いる浸透流の支配方程式について述べ、3 節では有限要素法による定式化及び離散化手法を詳述する。4 節では要素網の切り直しを実施せず、自由水面形を求める近似解析手法を提案するとともに、5 節では他の解析手法による事例との比較などを通して当手法の妥当性を述べる。

* 防砂防・地すべり技術センター

2. 飽和浸透流解析の支配方程式

簡化のため二次元領域内に図-1に示す微小要素を設定し、その微小要素内への質量の流出入量を考える。いま流体の非圧縮性を設定し、微小要素内の変化量を求めると飽和浸透流の連続式として次式が得られる。

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad \dots\dots\dots(1)$$

ただし、 v_x : x 軸方向の流体の流速、 v_y : y 軸方向の流体の流速

いま、透水係数 k_x , k_y の主要方向が x, y 軸に平行であるととし、水頭値 h を用いて運動則としてダルシー則を適用すると次式が得られる。

$$\begin{aligned} v_x &= -k_x \frac{\partial h}{\partial x} \\ v_y &= -k_y \frac{\partial h}{\partial y} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(2)$$

ここで、

$$h = y + \frac{P}{\gamma}$$

P : 間隙流体圧、 γ : 流体の単位体積重量

したがって、(1), (2)式より、飽和浸透流解析のための支配方程式として次式を得る。

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial h}{\partial y} \right) = 0 \quad \dots\dots\dots(3)$$

上式は、時間項に関するいずれの仮定もなしに求められた式であるが、定常及び非定常飽和浸透流解析の支配方程式となる。すなわち、Neuman (1971), France ら (1971) が既に報告しているように定常解析の繰返し演算によって非定常解析が可能であり、その際の解析の支配方程式である。

3. 支配方程式の有限要素法による定式化

3.1 重み残差法による定式化

当節では、(3)式で与えられる浸透流解析式の離散化の

図-1 微小要素における質量の流出入量

ために重み付き残差式を求める。いま、 w^* を重み関数として(3)式に重み残差法を適用すれば次式が得られる。

$$\int_V w^* \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial h}{\partial y} \right) \right\} dx dy = 0 \quad \dots\dots\dots(4)$$

ここで、 k_x , k_y が x, y 軸に関して定数であるとして部分積分の定理を適用すれば次式を得る。

$$\begin{aligned} & \int_S w^* \left(k_x \frac{\partial h}{\partial x} dy + k_y \frac{\partial h}{\partial y} dx \right) \\ & - \int_V \left(k_x \frac{\partial w^*}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} + k_y \frac{\partial w^*}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial y} \right) dx dy = 0 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(5)$$

ここで上式の第一項は次のように変換される。

$$\int_S w^* \left(k_x \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial s} - k_y \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\partial x}{\partial s} \right) ds = \int_S w^* v_n ds \quad \dots\dots\dots(6)$$

したがって、(4)式は次式に変換される。

$$\int_V \left(k_x \frac{\partial w^*}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} + k_y \frac{\partial w^*}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial y} \right) dx dy = \int_S w^* v_n ds \quad \dots\dots\dots(7)$$

上式が当文における飽和浸透流解析において用いられる重み付き残差方程式である。この式においては不透過型境界条件としての Neumann 条件が自動的に満足されていることに注意しておく必要がある。

3.2 Galerkin 法による離散化

(7)式の飽和浸透流解析の重み付き残差方程式の離散化手法としては、選点法、最小自乗法、モーメント法及び Galerkin 法が提案されている (C. A. プレビア, 1981)。ここでは有限要素法で良く使用されている、重み関数と近似関数に同じ形式を用いる Galerkin 法を適用する。そこで近似関数として四角形要素を用いて解析領域を近似するために、4 節点の長方形要素に対する内挿多項式として最も簡単な形式は次式で与えられる。

$$h = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy \quad \dots\dots\dots(8)$$

ここで、x, y を用いるのは x, y 軸に沿って水頭値 h に一次の変化を与えるためである。図-2 に従い、 $\alpha_1 \sim \alpha_4$ について解けば

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{h_1 + h_2 + h_3 + h_4}{4} & \alpha_2 &= \frac{-h_1 + h_2 + h_3 - h_4}{4b} \\ \alpha_3 &= \frac{-h_1 - h_2 + h_3 + h_4}{4a} & \alpha_4 &= \frac{h_1 - h_2 + h_3 - h_4}{4ab} \end{aligned}$$

ここで、上式を(8)式に代入し、 $h_1 \sim h_4$ に関して整理しなおせば補間関数として次式を得る。

$$h = N_1 h_1 + N_2 h_2 + N_3 h_3 + N_4 h_4 \quad \dots\dots\dots(9)$$

ただし、

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4ab} (b-x)(a-y) & N_2 &= \frac{1}{4ab} (b+x)(a-y) \\ N_3 &= \frac{1}{4ab} (b+x)(a+y) & N_4 &= \frac{1}{4ab} (b-x)(a+y) \end{aligned}$$

したがって、(9)式を用いることによって四角形要素内の任意点における水頭値 h の値が 4 節点の値を用いて表現される。

図-2 四角形要素

図-3 境界辺要素

一方、(7)式の右辺における積分は境界積分であるため以下の手法によって積分を実施する。いま、図-3において任意点 s における v_n の値は線形に変化するとすれば次式が得られる。

$$v_n = \frac{1}{\ell} [\ell - s, s] \begin{Bmatrix} v_{n1} \\ v_{n2} \end{Bmatrix} \quad \dots\dots\dots(10)$$

したがって、重み関数として Galerkin 法を適用し、(9)、(10)式を(7)式に代入すれば次式が得られる。

$$\begin{aligned} & \int_V \left\{ k_x \frac{\partial}{\partial x} ([N]\{w^*\}) \frac{\partial}{\partial x} ([N]\{h\}) \right\} dx dy \\ & + \int_V \left\{ k_y \frac{\partial}{\partial y} ([N]\{w^*\}) \frac{\partial}{\partial y} ([N]\{h\}) \right\} dx dy \quad \dots\dots\dots(11) \\ & = \int_s [N_s]\{w_s^*\} [N_s]\{v_n\} ds \end{aligned}$$

ここで、 $\{w^*\}$ 、 $\{h\}$ 、 $\{v_n\}$ は四角形要素の節点値あるいは境界辺上の節点値で与えられるので、積分は $[N]$ 、 $[N_s]$ に関してのみ積分を行えば良い。すなわち、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} [N] &= \frac{1}{4ab} [-(a-y), (a-y), (a+y), -(a+y)] \\ \frac{\partial}{\partial y} [N] &= \frac{1}{4ab} [-(b-y), -(b+y), (b+y), (b-y)] \quad \dots\dots\dots(12) \end{aligned}$$

(12)式を(11)式に代入し、積分を行うと次式で示される重み付き残差方程式の離散化式が得られる。

$$\begin{aligned} & \frac{1}{6} k_x \frac{a}{b} \{w^*\} \begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & -2 & 2 \end{bmatrix} \{h\} \\ & + \frac{1}{6} k_y \frac{a}{b} \{w^*\} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \{h\} \\ & = \frac{\ell}{6} \{w_s^*\} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \{v_n\} \quad \dots\dots\dots(13) \end{aligned}$$

したがって、重み関数の任意性を考慮すれば四角形要素節点に関する多元連立方程式が得られる。この方程式を解析全領域にわたり総計することによって(3)式で与えられる飽和浸透流の支配方程式が有限要素法を解法として離散化できたこととなり、境界条件を課することによって非定常時刻での自由水面の追跡が可能となる。

4. 自由水面の非定常追跡

自由水面の非定常追跡は、Neuman ら (1971)、France ら (1971) が述べているように非定常時刻ごとの境界条件を考慮することによって、定常解析の繰返し演算によって非定常自由水面の追跡が可能であることが既に報告されている。当手法においてもこの解析手法を適用することとするが、このためには自由水面の変動状況、とりわけ解析結果を左右する解析時刻ごとの浸出点の位置を明確にしなければならない。

当解析においては、解析領域は四角形要素で離散化されているため Cividini ら (1984) らの提案する基準を準用する。すなわち、Cividini ら (1984) は四角形要素両側の節点のポテンシャル値を用いて自由水面の節点位置の移動を求めているが、当解析の最大の特徴である要素網の切り直しを行わないため自由水面位置が要素節点と必ずしも厳密に一致しない。そこで次式で示す自由水面に関係する要素の中央地点におけるフラックス値を求めて自由水面に関与する要素を逐次探索設定することとした。すなわち、自由水面に近接する要素中点におけるフラックス値を求め、このフラックス値がその要素節点内を通過する速度以上であればその要素は飽和領域から不飽和領域へ移行したとして、自由水面を移動させる。このような手続きを経て、浸出点はこの要素の判別移動によって自動的に決定される。

$$\begin{aligned} \frac{k_x}{n} \frac{\partial h}{\partial x} &= \frac{k_x}{n} \frac{1}{4b} (-h_1 + h_2 + h_3 - h_4) \\ \frac{k_y}{n} \frac{\partial h}{\partial y} &= \frac{k_y}{n} \frac{1}{4a} (-h_1 - h_2 + h_3 + h_4) \quad \dots\dots\dots(14) \end{aligned}$$

なお、解析時刻の更新は自由水面を有する要素の中心点のフラックス値より、その要素長を除いた刻み時刻のうち最小値を次の時刻への更新値とする。これは自由水面が要素網を逐次的に変化するための処置である。この計算過程において総ての自由水面に関係する要素の移動が見られなくなった時刻あるいは比較的大きな刻み時刻が得られた状態を定常状態と考える。

5. 解析事例

最初の解析事例は、 10×10 m の均一構成材料（透水係数： 10^{-3} cm/sec）よりなる矩形断面での非定常浸透流問題である。浸透領域は 121 個の四角形要素で区分され、一辺の長さは 1.0 m である。左側上流側の水位はブロック上位端で一致し、右側下流端では 2 m の位置まで急激に低下した条件である。解析結果は無次元時刻 ($kt/n\ell$) で表記し、Cividini ら (1984) の解析結果も含めて図-4 に示す。解析ごとの時刻更新手法が異なるため厳密な非定常時刻での一致した解析結果となっていないが、要素網の大きな設定にも関わらず比較的良好一致を見ている。ただし、要素網の大きさに影響されたものと考えるが、厳密にみると今回の解析では自由水面の非定常時刻での追跡を要素の中央点におけるフラックス値を用いているため、わずかではあるが早めの自由水面の低下現象が現れる傾向がある。

次の解析事例は、解析断面は図-4 と同じであるが、5 ~ 10 m 区間の領域が 2×10^{-3} cm/sec の透水係数で構成されている場合である。図-4 との比較において透水係数の高い領域において早めの地下水面の低下が見られ、不均質材料の特性が現れている。

次の解析は、ダム湛水に伴う地すべり対策として盛土が実施された事例である。解析領域は地すべり地塊及び盛土域は 5×5 m の四角要素で区分し、用いた水文定数

は、透水係数が 10^{-3} cm/sec、有効間隙率が 0.3 である。解析条件は湛水位の低下速度が 1 m/日であるとして、四角形要素の長さ 5 m に応じて 5 日ごとに水位を低下させ、自由水面の追跡を行った。解析の停止は斜面の安定が最も低下する可能性のある盛土斜面前面の擁壁高さまで湛水位が達した時点とした。

解析結果を図-6 に示す。当図における実線は盛土が施工されていない場合で、破線は盛土が施工された場合である。これによれば湛水位が盛土高に低下するまでは盛土の残留間隙水圧への影響は見られていないが、それ以降は盛土のため地すべり末端域の排水が阻害され、残留間隙水圧が発生する。一方、斜面の上部域ではあまり影響は見られず、地下水位の低下が見られている。これは斜面内の地下水は斜面勾配に近い動水勾配を有しているため、この影響により地下水が変動することにより盛土の影響を受ける範囲が限定されるためである。この影響範囲は下久保ダムにおいて見られた湛水位の地すべり内地下水変動範囲が水平距離で 40 m 前後であることより理解できるところである（藤田ら、1983）。

当解析結果から判断すると、地すべりの抵抗部としての末端域の間隙水圧が盛土の規模によっては低下しないことになり、地すべり斜面の不安定化を招く懸念が生じる。特に地すべり末端域では不透水層が水平であるため地下水の低下速度が遅くなる傾向がある。このため十分な地下水調査を得て浸透流解析などを通して盛土の地すべり対策工としての効果判定を行う必要があり、これから検討が今回提案する浸透流解析手法によって容易に可能であると考えられる。

6. あとがき

地すべり斜面の安定解析手法に適用する間隙水圧分布

図-4 矩形断面における非定常浸透流解析

図-5 矩形断面における非定常浸透流解析例（不均質）

図-6 盛土による地すべり地塊内の水位変化解析例

を得るために簡便な近似飽和浸透流解析手法を検討したが、得られた成果は以下の通りである。

- 1) 飽和・不飽和領域を解析領域として用いることにより要素網の切り直しを実施することなしに、非定常の飽和浸透流解析が可能である。
- 2) 要素の中心点におけるフラックス値より自由水面の追跡が可能である手法を提案した。ただし、これは要素網の大きさの影響を受ける。
- 3) 当解析手法は要素網の切り直しを実施しないので不均質材料特性が容易に取り込める手法である。

今回検討した解析手法は、解析出力としての非定常時刻が要素網の大きさ及び水文定数の影響を受けるため任意時刻での解析結果が得にくい計算スキームとなっており、この点の改良と亀裂特性を導入した解析手法の開発などが残された課題である。

参考文献

Bathe, K. and Khoshgoftaar, M. R. (1979): Finite Element Free Surface Seepage Analysis without Mesh Iteration, Inter. Jour. for Numer. and Anal. Method in Geomechanics, Vol. 3, pp. 13-22

ブレビア, C. A. (1981): 流体解析への有限要素法の応用, サイエンス社, p. 232
 Cividini, A. and Gioda, G. (1984): An Approximate F. E. Analysis of Seepage with A free Surface, Inter. Jour. for Numer. and Anal. Method in Geomechanics, Vol. 8, pp. 549-566
 France, P. W., Parekh, C. J. and Peter, J. C. (1971): Numerical Analysis of free surface Problems, Proc. of ASCE, Vol. 97, No. IR 1, pp. 165-179
 藤田寿雄, 吉松弘行, 坂元靖秀 (1983): 水没斜面の安定解析の一手法, 土木技術資料, Vol. 29, No. 29, pp. 14-29
 向上拡美, 北村孝海 (1986): 浸透流における不飽和特性と解析精度に関する考察, 間組研究年報, pp. 163-174
 Neuman, S. P. (1973): Saturated-unsaturated Seepage by Finite Element Method, Proc. of ASCE, Vol. 99, No. HY 12, pp. 2233-2250
 Neuman, S. P. and Witherspoon, P. A. (1971): Analysis of Nonsteady Flow with A Free Surface Using the Finite Element Method, Water Resources Research, Vol. 7, No. 3, pp. 611-623
 Sara, J. L. and Jean, H. P. (1987): Flow through Porous Media: A Procedure for Locating the Free Surface, Inter. Jour. for Numer. and Anal. Method in Geomechanics, Vol. 11, pp. 585-601
 吉田昭治, 竹内伸一, 稲葉一成, 中野俊郎 (1993): 自由水面をもつ定常浸透流の有限要素による新簡易解析法, 土と基礎, Vol. 41, No. 11, pp. 35-40
 (原稿受理日 平成 11 年 10 月 6 日)