有限要素法による貯水池斜面の地すべりを起因とする造波解析

Analysis of Water Waves due to Landslide at the Reservoir Slope by Finite Element Method

吉松弘行^{*)}

Hiroyuki YOSHIMATSU

Abstract

There are reported many serious disasters associated with water waves due to landslides suddenly inflowing into a reservoir and a bay. The estimation of water waves property has been carried out through the calculation of finite differential method. This paper discusses the numerical procedure of finite element method to predict the water waves generated by landslides, and presents the numerical procedure simply combined with the balancing tensor diffusivity term into the finite element method in order to stabilize the numerical calculation. The results of the previous model experiments are compared with the propriety of the present method.

Key words: water wave, landslide, F. E. M., numerical analysis

和文要旨

地すべり地塊の貯水池への突入を起因する造波は大規模の災害を引き起こすことが報告されている。この造波を予測するため有限要素法による数値解析手法を検討した。数値計算の安定化のためBTD項を簡単に計算する手法を提案するとともに、既往の模型実験結果との比較を通して提案手法の妥当性を述べた。

キーワード：造波，地すべり，有限要素法，数値解析

1. まえがき

地すべりなどを起因とする移動地塊が貯水池や湾内に急激に突入することによって、貯水池や湾内の水位が大きく変動する造波現象はこれまで津波として多数報告されている^{1)~5)}。これら地すべりによる造波を起因とする災害の中で特に大規模ものは、1963年10月9日、イタリアのバイオントダムの貯水池斜面のトック山に発生した移動地塊が $2.4 \times 10^8 \text{ m}^3$ 規模の岩盤すべりを起因とするものである^{6)~8)}。この災害は突然 $2 \times 1.6 \text{ km}^2$ の面積にわたり速度 $25 \sim 30 \text{ m/sec}$ と推定される大規模な岩盤すべりによって、湖水総面積の約半分に及ぶ貯水池が移動地塊によって埋塞され、ダム右岸の地点で90m、左岸部では130mの波高でダム本体を越水する大規模な造波現象が生じ、ダム地点から1.8kmの下流に位置するロンガローネ村を約7mに達する波高の段波が襲い、約2,600名もの死者を出したものである。

貯水池内での造波現象ではないが、1958年7月9日、アラスカ州の東南、カナダ領に接する長さ11.3km、最大幅3.2kmほどのフィヨルドのリツヤ湾で、マグニチュード7.9の地震を起因として巨大な岩屑崩落が発生した^{9)~10)}。これによって引き起こされた津波は湾内の直線部では64m以上の波高に達し、滑落地点の対岸では525m、落下地点の側岸でも180mも内陸部へと遡上している。

同様な造波現象による災害として、我が国においても1792年5月21日頃強い地震が九州島原半島の中央部で発生し、標高約700mの眉山に $5 \times 10^8 \text{ m}^3$ と推定される大規模な山体崩壊が発生し、多量の岩屑が島原の街を流下破

壊し、有明湾へ突入した²⁾。この大規模崩壊の移動地塊の突入によって有明海に波高10mにも及ぶ津波が発生し、島原半島の有明湾沿岸のほぼ全域とこれに対置する熊本県の玉名、宇土、天草に大災害をもたらし、15,155名の死者、8,478戸の家屋流出の被害をもたらしている。

このように、地すべりなどの滑落地塊を起因とする造波は局所的に著しい高い波高及び斜面への遡上現象を有し、滑落地塊が 10^6 m^3 以上になると極端な大規模の災害をもたらしている。

我が国は火山列島として脆弱な地質、急峻な地形条件を有しており、台風などの気象要因を起因として、地すべりなどが多発している現状である。地すべりなどによって生成された地塊が貯水池や湾内に突入して大規模な造波現象を引き起こす潜在的な危険性が我が国においては恒に存在していると言える。

バイオントダムの災害やロックフィルダムの建設の増加などと相まって地すべり地塊の貯水池への突入による造波現象の予測に関する研究が精力的に行われるようになった。初期の段階では、造波現象が貯水池内に突入する地塊の速度、規模の影響を強く受けるため解析的研究も行われていたが^{11), 12)}、主に水理模型実験を通して検討がなされていた¹³⁾。しかしながら、これら実験において造波の遡上域まで検討することとなると大規模の実験施設とならざるを得ず、近年の高速、大容量の電子計算機の出現と有限差分法や有限要素法の離散化技術の向上によって経済性の有意な数値解析手法の検討が進められるようになった。

この数値解析手法において使用される基礎方程式は、過去の災害事例から長波現象による水位変動に起因する

^{*)} 砂防・地すべり技術センター

〒102-0074 東京都千代田区九段南4-8-21 山脇ビル

として鉛直方向に平均流速を仮定する浅水長波式が用いられる¹⁴⁾。この基礎方程式は移流項と拡散項を含むため、解の振動を防ぐため風上差分を用いた有限差分法による解析が一般的であり、解析領域は矩形の格子、すなわち、構造格子が用いられている^{15)~20)}。しかしながら、複雑な地形形状をなす貯水池の場合には、局所地形の影響による水位の増幅現象を解析するため非常に細かな格子設定を必要とし、解析のための節点数が増加する。さらに境界領域では仮想格子点を設定しなければならないため、地すべり地塊の貯水池への突入に関する境界条件の設定が困難を伴うなど、解析が複雑になるとともに多量の解析時間や大容量、高速の計算機が必要である。

一方、任意形状の解析領域を対象とする非構造格子による有限要素法を用いた解析事例は比較的少なく²¹⁾、地すべり地塊の貯水池への突入を考慮した三次元的な解析手法は開発されていない。有限要素法によるこの種の解析がこれまで実施されなかったのは以下の理由によるものと考えられる。

- 1) 中央差分によるバブノフ・ガラーキン型有限要素法では数値的な不安定性が生じ、風上化などの安定化の処理が必要であること。
- 2) 傾斜面を流水が遡上する場合、流水とそれが存在しない境いは移動境界であり、合理的な境界条件を設定しなければならないこと。

ところで、この種の解析は大規模な地すべり地塊の移動現象を解析に反映しなければならないことや非線形性の強い造波現象を取り扱うため、その解析領域は比較的細かな要素分割を実施しなければならない。このため地形変化の著しい局部域における造波の大きな変化を追跡するためには、造波の時間追跡において陰的解法よりも陽的解法が望ましいこと²²⁾から陽的解法で実施することが多い。この場合に有限差分法では人工粘性係数²⁰⁾や有限要素法では質量行列の集中化に伴う解の減衰を押さえるためランピングパラメータの導入²²⁾が必要である。この値の設定は一般に経験的に決定されることが多く²²⁾、この設定値の如何によっては解析結果が相違することから慎重な設定が必要となっている。

このため有限要素法では移流項に起因する解の数値振動による不安定性を低減させるため、時間項に関して2次精度まで求めるBTD法 (Balancing Tensor Diffusivity) を適用した手法²³⁾や流速の上流側の節点により大きな重みを配慮し、有限差分法の風上化と同じ効果をもたらすペトロフ・ガラーキン型の解析手法が、安定化有限要素法として提案されている²⁵⁾。しかしながら、前者の手法は時間項を空間物理量で置き換え、時間を2次精度まで求める手法のため計算が煩雑であり^{23), 24)}、その簡略化や地すべり地塊の突入による造波現象の事例解析による解析精度の検討が残されている。

ここでは、複雑な形状の領域を解析するため任意の要素区分を行う非構造格子による解析が可能で、計算機容

量の低減化が図られる陽的有限要素法による解析法を用いる。この場合陽的有限要素法で一般に使用されている人工粘性を制御するランピングパラメータの設定を必要とせず、解の安定化のため時間項を2次精度まで考慮するBTD法を簡略に適用する手法の提案を行うとともに、浅水長波方程式を変形し、地すべり地塊の突入による地形変化量を解析式に直接導入する数値解析手法を提案する。このことによって任意の速度、形状を有する地すべり地塊の貯水池への突入による造波解析が可能となる。

第1節では、地すべりによる造波現象の災害事例と当論文の目的を述べた。第2節では、地すべり地塊の貯水池への突入を直接的に表現し、数値計算の安定化のために提案されているBTD法を組み込んだ基礎方程式について述べる。第3節ではその有限要素法による離散化手法を述べる。第4節では造波の遡上解析において必要な当論文で用いた移動境界条件の取り扱いについて述べる。第5節では提案する解析手法を用いて移動境界問題としての段波解析、地すべり地塊の貯水池内への側面からの突入及び湖底隆起に伴う造波解析、造波の斜面遡上解析について数値実験を行い、既往の種々の模型実験などとの比較を通して当手法の妥当性について述べる。

2. 基礎方程式

解析に用いる基礎方程式は、三次元非圧縮粘性流体の基礎方程式を鉛直方向に平均化した浅水長波方程式であり、平面二次元解析である。浅水長波方程式^{23), 24)}において、風力による自由水面のせん断応力、コリオリ力、大気圧の不均等分布力を見捨てる、水深 h を水位標高 η と池底面の標高 η_b の差 $h = \eta - \eta_b$ とすれば次式が得られる。連続式

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial \eta_b}{\partial t} \quad \dots\dots\dots(1)$$

運動方程式

x軸方向

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uU) + \frac{\partial}{\partial y}(vU) + gh \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \tau_{xb} \\ - \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\varepsilon \frac{\partial U}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\varepsilon \frac{\partial U}{\partial y} \right) \right\} = 0 \quad \dots\dots\dots(2) \end{aligned}$$

y軸方向

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uV) + \frac{\partial}{\partial y}(vV) + gh \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \tau_{yb} \\ - \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\varepsilon \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\varepsilon \frac{\partial V}{\partial y} \right) \right\} = 0 \quad \dots\dots\dots(3) \end{aligned}$$

ここで、 $U = uh$ 、 $V = vh$ 、 u 、 v ：それぞれx及びy軸方向の流速成分、 h ：水深、 ρ ：水の密度、 ε ：水平渦動粘性係数、 τ_{xb} 、 τ_{yb} ：それぞれ底面のせん断応力のx及びy軸方向成分で、抵抗則に Manning 式を用いると次式で表せる。

$$\tau_{xb} = \rho gh \frac{n^2 U \sqrt{U^2 + V^2}}{h^{10/3}}$$

$$\tau_{yb} = \rho gh \frac{n^2 V \sqrt{U^2 + V^2}}{h^{10/3}} \dots\dots\dots(4)$$

本解析では、(1)式の連続式を使用するため、地すべり地塊の貯水池への突入による池の底面形態の変化を時間変化量として解析式に直接導入できることとなっている。

さて、(1)式の時間項についてテーラー展開を行い、2次精度まで求めると次式が得られる。

$$\eta^{dt} = \eta + \Delta t \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \dots\dots\dots(5)$$

ここで上添え字 Δt はタイムステップ後の値であることを意味する。

(1)式に(5)式を導入すれば次式が得られる。

$$\frac{\eta^{dt} - \eta}{\Delta t} + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial \eta_b}{\partial t} \right) + \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial \eta_b}{\partial t} \dots\dots\dots(6)$$

ここで、左辺の第2項の時間項に関して2次項を無視し、整理を行うと次式が得られる。

$$\frac{\eta^{dt} - \eta}{\Delta t} + \frac{\Delta t}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial U}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial V}{\partial t} \right) \right\} + \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial \eta_b}{\partial t} \dots\dots\dots(7)$$

ここで、Peraireら²⁴⁾は(7)式の左辺第2項を空間微分で表しており、この手法がBTD法と呼ばれる²⁵⁾。

この手法は後述する運動方程式にも適用されるが、個々の解析要素の周辺積分を実施しなければならないなど複雑な取り扱いが必要である^{23), 26)}。このため $\partial U / \partial t$ と $\partial V / \partial t$ は個々の要素節点の時間変化量として表し、そのまま離散化を行うこととした。このため複雑な周辺積分を行わず簡単にBTD手法による安定化の効用を導入することができる。なお時間項の離散化は次式の中央差分で実施することとした。

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{U^{dt} - U^{-dt}}{2\Delta t} \dots\dots\dots(8)$$

同様の概念を適用して、x軸方向の運動方程式にBTD項を配慮した基礎方程式は次式で与えられる。

$$\frac{U^{dt} - U}{\Delta t} + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (uU) + \frac{\partial}{\partial y} (vU) + gh \frac{\partial \eta}{\partial x} \right\} + \frac{\partial}{\partial x} (uU) + \frac{\partial}{\partial y} (vU) + gh \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \tau_{xb} - \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\epsilon \frac{\partial U}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\epsilon \frac{\partial U}{\partial y} \right) \right\} = 0 \dots\dots\dots(9)$$

ただし、拡散項は2次の微分項であり、底面抵抗項は数値計算の不安定性に影響が小さいとして無視している²⁷⁾。ここでBTD項に関する項のみ移流速度及び水深値を個々の要素の平均値（上添え字バー記号）として設定すると簡略化できて次式が得られる。

$$\frac{U^{dt} - U}{\Delta t} + \frac{\Delta t}{2} \left\{ \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial U}{\partial t} \right) + \bar{v} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial U}{\partial t} \right) + g\bar{h} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right) \right\} + \frac{\partial}{\partial x} (uU) + \frac{\partial}{\partial y} (vU) + gh \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \tau_{xb} - \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\epsilon \frac{\partial U}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\epsilon \frac{\partial U}{\partial y} \right) \right\} = 0 \dots\dots\dots(10)$$

同様にy軸方向の運動方程式は次式で与えられる。

$$\frac{V^{dt} - V}{\Delta t} + \frac{\Delta t}{2} \left\{ \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial V}{\partial t} \right) + \bar{v} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial V}{\partial t} \right) + g\bar{h} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right) \right\} + \frac{\partial}{\partial x} (uV) + \frac{\partial}{\partial y} (vV) + gh \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \tau_{yb} - \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\epsilon \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\epsilon \frac{\partial V}{\partial y} \right) \right\} = 0 \dots\dots\dots(11)$$

(7)、(10)及び(11)式が本解析で使用する基礎方程式であり、提案する手法をSBTD (Simple Balancing Tensor Diffusivity) と呼ぶことにする。

3. 基礎方程式の離散化

基礎方程式において時間方向の離散化はBTD法によって実施されたので、重み関数と形状関数に同じ関数を用いるパプノフ・ガラーキン法に従い空間方向に離散化を行う。離散化において用いる要素の選択として、流速項は水位項よりも高次の補間を行う混合補間法が好ましい結果を与えるとの報告もあるが²⁷⁾、混合補間法を用いた場合、すなわち、移流速度項は線形補間、水深項を定数補間すると水深項は移流速度項の節点数に比較してより少ない節点数になる。当解析では移流速度 u 、 v は流束 U 、 V を水深 h で除して求めるため、この不足する水深項の節点において補間関係より水深を内挿する必要がある、この不足節点の水深量を他の節点より内挿補間することは、薄層の流れがある境界領域では水深を支配方程式の解として求めていないため精度の高い手法であるとは言えない。そこで、ここでは流速と水深において同じ節点数を用いる同時補間法を適用することとする。いま重み関数として、 η^* 、 U^* 、 V^* を設定し、重み付き残差方程式をそれぞれ連続及び運動方程式について求めると次式が得られる。

連続方程式

$$\int_{\Omega} \eta^* \frac{\eta^{dt} - \eta}{\Delta t} d\Omega + \frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega} \eta^* \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial U}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial V}{\partial t} \right) \right\} d\Omega + \int_{\Omega} \eta^* \frac{\partial U}{\partial x} d\Omega + \int_{\Omega} \eta^* \frac{\partial V}{\partial y} d\Omega = \int_{\Omega} \eta^* \frac{\partial \eta_b}{\partial y} d\Omega \dots\dots(12)$$

運動方程式

$$\int_{\Omega} U^* \frac{U^{dt} - U}{\Delta t} d\Omega + \frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega} U^* \left\{ \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial U}{\partial t} \right) + \bar{v} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial U}{\partial t} \right) + g\bar{h} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right) \right\} d\Omega + \int_{\Omega} U^* \frac{\partial}{\partial x} (uU) d\Omega + \int_{\Omega} U^* \frac{\partial}{\partial y} (vU) d\Omega$$

$$+ \int_{\Omega} U \cdot gh \frac{\partial \eta}{\partial x} d\Omega + \int_{\Omega} U \cdot \frac{1}{\rho} \tau_w d\Omega \\ - \int_{\Omega} U \cdot \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\epsilon \frac{\partial U}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\epsilon \frac{\partial U}{\partial y} \right) \right\} d\Omega = 0 \quad \dots\dots\dots(13)$$

ここで、 Ω ：各三角形要素の面積領域

$$\int_{\Omega} V \cdot \frac{V^{dt} - V}{\Delta t} d\Omega \\ + \frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega} V \cdot \left\{ \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial V}{\partial t} \right) + \bar{v} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial V}{\partial t} \right) + g \bar{h} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right) \right\} d\Omega \\ + \int_{\Omega} V \cdot \frac{\partial}{\partial x} (uV) d\Omega + \int_{\Omega} V \cdot \frac{\partial}{\partial y} (vV) d\Omega \\ + \int_{\Omega} V \cdot gh \frac{\partial \eta}{\partial x} d\Omega + \int_{\Omega} V \cdot \frac{1}{\rho} \tau_w d\Omega \\ - \int_{\Omega} V \cdot \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\epsilon \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\epsilon \frac{\partial V}{\partial y} \right) \right\} d\Omega = 0 \quad \dots\dots\dots(14)$$

ここで領域を三角形要素で分割し、同時補間法として未知諸量を一次要素で表すとする重み関数は次式で表される。

$$\eta^* = \Phi_a \eta_a^* \\ U^* = \Phi_a U_a^* \\ V^* = \Phi_a V_a^* \quad \dots\dots\dots(15)$$

ここで、 Φ_a ：形状関数、 η_a^* 、 U_a^* 、 V_a^* ：節点の重み
同様に空間物理量にも同じ形状関数を用いて、部分積分を行い、重み関数の任意性を考慮して離散化式を求めると次式が得られる。

連続方程式

$$M_{\alpha\beta} \frac{\eta_{\beta}^{dt} - \eta_{\beta}}{\Delta t} + \frac{\Delta t}{2} X_{\alpha\beta} \left(\frac{U_{\beta}^{dt} - U_{\beta}^{-dt}}{2\Delta t} \right) + \frac{\Delta t}{2} Y_{\alpha\beta} \left(\frac{V_{\beta}^{dt} - V_{\beta}^{-dt}}{2\Delta t} \right) \\ + X_{\alpha\beta} U_{\beta} + Y_{\alpha\beta} V_{\beta} = M_{\alpha\beta} \dot{\eta}_{\beta\beta} \quad \dots\dots\dots(16)$$

ここで上添え字・は時間微分を表す。

運動方程式

$$M_{\alpha\beta} \frac{U_{\beta}^{dt} - U_{\beta}}{\Delta t} + \frac{\Delta t}{2} \left\{ \bar{u} X_{\alpha\beta} \left(\frac{U_{\beta}^{dt} - U_{\beta}^{-dt}}{2\Delta t} \right) + \bar{v} Y_{\alpha\beta} \left(\frac{U_{\beta}^{dt} - U_{\beta}^{-dt}}{2\Delta t} \right) + g \bar{h} X_{\alpha\beta} \left(\frac{\eta_{\beta}^{dt} - \eta_{\beta}^{-dt}}{2\Delta t} \right) \right\} \\ + (N_{\alpha\beta}^* + N_{\alpha\beta}^* + N_{\alpha\beta}^* + N_{\alpha\beta}^*) U_{\beta} + H_{\alpha\beta}^* U_{\beta} + T_{\alpha\beta}^* U_{\beta} + D_{\alpha\beta}^* U_{\beta} = O_{\alpha\beta} \hat{t}_{\alpha\beta} \quad \dots\dots\dots(17)$$

$$M_{\alpha\beta} \frac{V_{\beta}^{dt} - V_{\beta}}{\Delta t} + \frac{\Delta t}{2} \left\{ \bar{u} X_{\alpha\beta} \left(\frac{V_{\beta}^{dt} - V_{\beta}^{-dt}}{2\Delta t} \right) + \bar{v} Y_{\alpha\beta} \left(\frac{V_{\beta}^{dt} - V_{\beta}^{-dt}}{2\Delta t} \right) + g \bar{h} Y_{\alpha\beta} \left(\frac{\eta_{\beta}^{dt} - \eta_{\beta}^{-dt}}{2\Delta t} \right) \right\} \\ + (N_{\alpha\beta}^* + N_{\alpha\beta}^* + N_{\alpha\beta}^* + N_{\alpha\beta}^*) V_{\beta} + H_{\alpha\beta}^* V_{\beta} + T_{\alpha\beta}^* V_{\beta} + D_{\alpha\beta}^* V_{\beta} = O_{\alpha\beta} \hat{t}_{\alpha\beta} \quad \dots\dots\dots(18)$$

ここで、

$$M_{\alpha\beta} = \int_{\Omega} \Phi_{\alpha} \Phi_{\beta} d\Omega$$

$$X_{\alpha\beta} = \int_{\Omega} \Phi_{\alpha} \frac{\partial \Phi_{\beta}}{\partial x} d\Omega$$

$$Y_{\alpha\beta} = \int_{\Omega} \Phi_{\alpha} \frac{\partial \Phi_{\beta}}{\partial y} d\Omega$$

$$N_{\alpha\beta}^* = \int_{\Omega} \Phi_{\alpha} \Phi_{\beta} u_{\beta} \frac{\partial \Phi_{\beta}}{\partial x} d\Omega$$

$$N_{\alpha\beta}^* = \int_{\Omega} \Phi_{\alpha} \frac{\partial \Phi_{\beta}}{\partial x} u_{\beta} \Phi_{\beta} d\Omega$$

$$N_{\alpha\beta}^* = \int_{\Omega} \Phi_{\alpha} \Phi_{\beta} v_{\beta} \frac{\partial \Phi_{\beta}}{\partial y} d\Omega$$

$$N_{\alpha\beta}^* = \int_{\Omega} \Phi_{\alpha} \frac{\partial \Phi_{\beta}}{\partial y} v_{\beta} \Phi_{\beta} d\Omega$$

$$H_{\alpha\beta}^* = g \int_{\Omega} \Phi_{\alpha} \Phi_{\beta} h_{\beta} \frac{\partial \Phi_{\beta}}{\partial x} d\Omega$$

$$H_{\alpha\beta}^* = g \int_{\Omega} \Phi_{\alpha} \Phi_{\beta} h_{\beta} \frac{\partial \Phi_{\beta}}{\partial y} d\Omega$$

$$T_{\alpha\beta}^* = \frac{1}{\rho} \int_{\Omega} \Phi_{\alpha} \Phi_{\beta} \tau_w \Phi_{\beta} d\Omega$$

$$O_{\alpha\beta} = \epsilon \int_{\Omega} \zeta_{\alpha} \zeta_{\beta} dS$$

$$D_{\alpha\beta} = \epsilon \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \Phi_{\alpha}}{\partial x} \frac{\partial \Phi_{\beta}}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_{\alpha}}{\partial y} \frac{\partial \Phi_{\beta}}{\partial y} \right) d\Omega$$

$$\tau_w = \rho gh \frac{n^2 \sqrt{U^2 + V^2}}{h^{10/3}}$$

$$\tilde{t}_x = \frac{\partial U}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial U}{\partial y} \sin \theta$$

$$\tilde{t}_y = \frac{\partial V}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial V}{\partial y} \sin \theta$$

θ ：境界に立てた法線方向と水平線とのなす角度

ここで、(16)、(17)及び(18)式はタイムステップ後の単一の未知量のための記述式ではなく、タイムステップ後の流速と水深を乗じた U 、 V 及び水位標高 η を含んだ式であり、このままでは陽的に解くことができない。このため初回はSBTD法を適用せず、未知諸量の初期値を求め、この初期値を基に所要の誤差以内に収まるように繰り返し演算によってタイムステップ後の未知諸量を求める。

この場合、繰り返し演算は、長周期成分による振動を排除するため逆行列を求めず、質量行列 $M_{\alpha\beta}$ の集中化を行わない整合質量行列で求めるマルチ・パス²⁵⁾を適用する。この繰り返し演算の際にSBTD法における時間微分項を(8)式で求めて、繰り返し演算を行う。このアルゴリズムは以下の通りである。

いま、(16)式は整理を行うと次式で表現される。

$$M \eta^{dt} = -X \left(\frac{U^{dt} - U^{-dt}}{2\Delta t} \right) - Y \left(\frac{V^{dt} - V^{-dt}}{2\Delta t} \right) + f \quad \dots\dots(19)$$

1) 質量行列の集中化を実施した後、SBTD法を考慮せず水深 η を次式より求める。

$$\bar{M} \eta^{dt} = f \quad \dots\dots\dots(20)$$

2) 同様にして流速に関する未知諸量 U 、 V を集中行列化後にSBTD法を適用せず求める。以上の手法で求められた水深及び流速をマルチ・パス法の初期値とする。

3) (19)式を変換した次式で示すマルチ・パス法により、整合質量行列によって未知諸量を求める。この際にSBTD法の時間項に関する計算値を求め、SBTD法による補正項として(21)式の右辺に導入する。これの繰り返し演算を行い、求められた未知諸量が許容の誤差の範囲内に収まるまで行う。

$$\overline{M}\eta_{n+1}^{dt} = -M\eta_n^{dt} + \overline{M}\eta_n^{dt} - X\left(\frac{U_n^{dt} - U^{-dt}}{2\Delta t}\right) - Y\left(\frac{V_n^{dt} - V^{-dt}}{2\Delta t}\right) + f \dots\dots\dots(21)$$

ここで、 n は繰り返し演算回数を意味する。また、上添えマイナスの記号は行列の集中化を意味する。

以上の計算アルゴリズムによって、時間精度を2次精度まで高めたBTD法の適用が図られ、解の減衰をもたらす行列の集中化を行わず整合質量行列による解が簡単に求められる。

4. 移動境界の取り扱い

地すべり地塊の突入を起因とする造波は著しく高い波高を有し、斜面上を高い標高域まで急激に遡上し、大規模の被害をもたらす。この解析の初期においては、造波の遡上域は水深がないわけであり、造波の遡上につれて解析領域を拡大して取り込んでいく必要があり、その造波の水深の先端線は移動境界となる。この移動境界を取り扱う手法には、解析領域の再分割を行うラグランジェ的な移動境界法と解析領域の再分割を実施しないオイラー的な移動境界法に大別される²⁸⁾。今回対象とする解析条件は大幅な移動境界を有し、解析領域も大幅に増減する。この繰り返し計算の過程において要素網の再設定を行うことは効率が悪く、煩雑である。このため当解析ではオイラー的な移動境界法を採用する。

オイラー的な移動境界の手法は、個々の解析要素網の水深の存在の有無を判定し、全ての節点において水深が許容値以下の場合は、造波の遡上がないとして解析領域の対象外とする。この手法は水深の存在する解析領域のみを対象とする効率的な解析法である²⁹⁾。しかしながら、個々の解析要素における水深の有無の判定において、どれかの節点が水深の許容値以下の場合は水深が存在しないことから、流速を零として解析を進めると移流項の影響で移動境界域の流速が急速に小さくなり、造波の広がる速度が遅くなる。このためこの条件の節点では仮想流速を与える手法が取られている²⁷⁾。

この仮想流域の取り方として松本ら²⁷⁾は1節点のみ水深が許容値以下、すなわち、水深のないドライベットのの場合のみに他の2節点の流速の平均値を仮想流速として与えている。ここではSBTD法を採用する場合に平均流速を用いていることから、1節点のみ水深があり、他の節点がドライベットの場合でもドライベットを含む要素の中央地点における平均の流速値を求め、この値をドライベットの節点の仮想流速として与え、この境界条件で次のタイムステップ時刻の未知諸量を求めることとした。

5. 数値解析

5.1 段波解析

前節で述べたSBTD法や移動境界の設定手法の精度を検討するため、図-1に示す長さ10mの水路における高さ0.2mの水位差を有する段波の流れ解析を実施した。なお中央部より右端部は流水の存在しないドライベット

として設定してある。解析条件は、渦動粘性係数 $\epsilon=0$ 、マンニングの粗度係数 $n=0$ として検討を行う。ここで渦動粘性係数及び粗度係数を零としたのは、理論解との比較を行うことと、特に前者の項を零としたのはこの項を考慮すると粘性の影響で数値計算は安定性が見られるので粘性項を無視した厳しい条件下での数値計算の安定性を検討するためである。また、時間増分幅 $\Delta t=0.001$ 秒、要素分割幅は0.2mの均等分割、水深の存在の有無を判定する許容値は0.001mを設定し解析を行っている。当問題において渦動粘性係数及び水路底面の摩擦を考えない場合の粒速及び水深の理論解は次式で与えられている²⁷⁾。

$$u(x;t) = \frac{2}{3} \left(C_0 + \frac{x}{t} \right)$$

$$\eta(x;t) = \frac{1}{9g} \left(2C_0 - \frac{x}{t} \right)^2 \dots\dots\dots(22)$$

ここで、 C_0 は初期水深の波速であり、 $C_0 = \sqrt{g\eta_0}$ で求められる。

解析モデルは図-1のとおりである。水深及び流速の解析結果を鉛直断面表示として図-2、3に示す。平均流速を用いたSBTD法は理論解との一致が非常によく、特に流水の先端部における流速が理論解の2.8m/sec近くまで追跡できており、提案された手法が妥当であることが理解できる。移流項の流速を平均流速を用いず、各節

図-1 段波の伝搬

Fig. 1 Model of water dam breaking problem

図-2 段波の水面標高

Fig. 2 Water altitude of water dam breaking

点の諸量としてより厳密な離散化を行った場合は、水深に関する解析結果は先端部を除外して理論解との一致は良いものの、図-3の流速分布に見られるように、移動境界域の段波の先端部では数値振動が見られている。これは移流項の流速 u , v が解析結果から得られる流速に水深を乗じた U , V を水深 h で除して求めるため、わずかな水深の数値振動によって影響を受けやすいことによる。今回用いている移動境界手法が厳密に流水の連続性を満足していないため、より厳密な離散化を行うSBTD法を用いても数値振動を発生したことが原因であると考えている。また、質量行列を集中化するため生じる人工粘性を制御するためにランピングパラメータを0.8に設定し、解析を行った結果も併せて記載したが、まだ人工粘性の影響が強く、更なる検討が必要である。この種の造波問題におけるランピングパラメータ値の設定法は未だ確立されておらず、この人工粘性を制御するパラメータを必要としない提案手法が精度の面において有利であると考えている。

5.2 水路底面の隆起による津波解析

今回提案する基礎方程式は流体の境界部の地形変化量を直接取り込める手法である。この条件の導入精度を確認するため図-4示すように長さ7.2m、水深0.2mの水路底面が次式で表される隆起速度を有する長さ2.44mの

図-3 段波の流速分布

Fig. 3 Velocity distribution of water dam breaking

図-4 二次元水槽と造波ピストン

Fig. 4 Two dimensional water tank and generation wave piston

ピストンによって形成された津波³⁰⁾との比較解析を実施した。このピストンの隆起速度は地すべり地塊の貯水池への突入速度と比較して緩速なものと思われるが、提案手法と比較する現実斜面の実例が無いので、本解析では模型実験で使用されている次式のピストン速度を使用する。

$$\zeta(t) = \zeta_0(1 - e^{-\alpha t}) \quad \dots\dots\dots (2)$$

ここで、 ζ : 所要時刻におけるピストンの移動位置、 ζ_0 : 所要時刻におけるピストンの移動位置を制御するパラメータ

この制御パラメータは $\zeta_0 = 0.02$, $\alpha = 1.617$ である。計算条件として、5.1の段波解析と同じ目的により渦動粘性係数 $\varepsilon = 0$, マニングの粗度係数 $n = 0$, 時間増分幅 $\Delta t = 0.01429$ (無次元表示), 要素の分割幅は0.2mの均等分割を設定した。

図-5はピストンの左端位置における水位標高の時間変化を、図-6はピストン右端位置におけるそれを示したものである。図-5における水面変化量は模型実験結果と非常に一致を見ている。質量行列の集中化を行っている解析は2段階ラックス・ウエンドルフ法による時間更新とランピングパラメータは0.8の値を設定しているが、まだ人工粘性の影響が強く、この値の検討が必要であり、この検討を必要としない今回提案するSBTD法が有利であることが理解できる。図-6では数値計算の方が波高において模型実験より若干高く、波速が遅くなっている。そこで今回提案する数値解析手法の精度を検証すべく、同じ解析条件で自由水面のエネルギー式を用いた2次元断面における境界要素法 (BEM) による計算結果と比較したものを図-7に示す。解析結果は波高及び波速とも非常に一致をみている。

図-5 水路面の隆起による津波の波高 (X=0.0)

Fig. 5 Tunami wave height generated by rising up of channel bottom (X=0.0)

5.3 孤立波の鉛直壁面及び傾斜面の遡上解析

地すべり地塊の貯水池への突入による造波は一種の孤立波であるが、突入地塊の形状及び速度によって波形の対称な孤立波は形成されず、その形状及び波高の予測は困難である。ここでは今回提案する解析手法の精度を検証するため理論解の得られている孤立波との比較を行う。

解析に用いる孤立波の水面標高は、次式に示されるLaitoneによって得られている第1次近似の次式を用いた³¹⁾。

$$\eta = h + A \operatorname{sech}^2 \left[\sqrt{\frac{3}{4}} \frac{A}{h^3} (x - ct) \right] \quad \dots\dots\dots (23)$$

ここで、 η ：孤立波の水面標高、 A ：初期波形の波高、 h ：水深、 g ：重力の加速度、 $c = \sqrt{gh(1+A/h)}$

計算条件は渦動粘性係数 $\varepsilon = 0$ 、マニングの粗度係数 $n = 0$ を設定し、時間増分幅 $\Delta t = 1.0^{-5}$ 秒、初期水深1.0m、水路長さ12mで要素分割幅は0.4mの均等分割を設定した。当解析手法では解析領域の切り直しを実施しないため、孤立波の生成は(23)式で与えられる水深を左端の境界条件として与えた。

波高比 $A/h = 0.2, 0.3$ の解析結果を図-8, 9に示す。解析結果は孤立波の進行とともに波高の減衰は見られず、有限要素法で懸念される解のなまりは見られない。しかし、理論値と比較して波高が若干低くなっており、波高比が高くなるほどこの傾向が強くなり、波高比が0.3以上

図-6 水路底面の隆起による津波の波高 ($X=b$)

Fig. 6 Tsunami wave height generated by rising up of channel bottom ($X=b$)

図-7 提案手法と境界要素法 (BEM) による波高の比較

Fig. 7 Comparison of wave height between proposed method and BEM

上になると波形の時間変化量の追跡も孤立波の進行の先端部で水面の振動が見られるようになる。これは鉛直方向の流速が一定であると仮定する浅水長波式による解析によることを起因としていていると考えている。

図-10は鉛直壁面の孤立波の遡上高さを過去の事例解析と比較して示す。解析結果は波高比0.2以下においては模型実験や理論解との一致はよいが、波高比が高くなると鉛直方向に平均化した流速を用いる浅水長波式の影響で低めの鉛直遡上高さが得られる。しかしながら、鉛直壁面の衝突直前の孤立波の波高比を用いて解析を行うと理論解に近い結果が得られている。これ以上の波高比の場合には鉛直方向の流速分布を評価した三次元解析が必要であると考えている。

図-11は傾斜角度 30° の傾斜面を遡上する孤立波 ($A/h = 0.19$) の解析結果を示す。最高遡上時の水位標高が若干低めに計算されるもののその相違はわずかであり、今回提案する移動境界の取り扱いが傾斜面上でも有効であることが理解できる。

5.4 土塊の貯水池への突入による造波解析

当解析は図-12に示すように傾斜上端面から移動地塊が貯水池に突入した場合である。模型実験は道上ら³²⁾によって表-1の条件で実施されている。

図-8 孤立波 ($A/h = 0.2$) の鉛直壁の反射

Fig. 8 Reflection of solitary wave with amplitude ratio $A/h = 0.2$ on a vertical plane

図-9 孤立波 ($A/h=0.3$) の鉛直壁の反射Fig. 9 Reflection of solitary wave with amplitude ratio $A/h=0.3$ on a vertical plane

図-10 孤立波の鉛直壁面の遡上

Fig. 10 Reflection of solitary wave on a vertical plane

解析条件は、渦動粘性係数 $\varepsilon=0$ 、マンニングの粗度係数 $n=0$ を設定し、時間増分幅 $\Delta t=1.0^{-5}$ 秒、要素の分割幅は0.1mの均等分割である。流速と波高に関する解析結果を図-12に示すが、計算結果は模型実験に比較して若干高めの値が得られているもののよい一致を見ている。この高めの計算値が得られた原因として底面抵抗を無視していることが原因であり、今回この仮定条件を考慮していない解析結果であることを勘案すると模型実験を再現しているものと考えている。

図-11 孤立波 ($A/h=0.19$) の傾斜面 ($\theta=30^\circ$) の遡上Fig. 11 Run-up of solitary wave with amplitude ratio $A/h=0.19$ on a plane inclined an angle $\theta=30^\circ$

図-12 土塊の進入モデル

Fig. 12 Model of inflow earth mass

6. あとがき

地すべり地塊の貯水池への突入に起因する造波の予測に関する数値解析手法を検討した。解析に用いた手法は、複雑な地形形状と地すべり地塊の貯水池の突入条件を容易に勘案できる非構造格子の要素区分を行う有限要素法であるが、安定化のためのBTD項を取り込んだ解析手法を検討した。得られた結論は以下の通りである。

- 1) 地すべり地塊の貯水池への突入の条件を直接考慮する基礎方程式を導出した。
- 2) 有限要素法の解析において、整合質量行列を用いた計算において数値不安定性を低減するためBTD項を簡単に勘案する手法を提案した。
- 3) 既往の模型実験結果と整合質量行列を用いた解析手法の計算結果との比較を行い、提案手法の妥当性を確認した。

有限要素法の数値安定性を確保するためBTD項を導入し、質量行列の集中化を行わない整合質量行列を用いた解析手法を検討したが、BTD項の問題点として安定性限界が低く³³⁾、比較的小さなタイムステップ値を採用しなければならない。また、マルチ・パス法における繰り返し計算回数が5～6回に達するなど計算効率の改善の必要がある。このため数値計算のより安定化と計算時

図-13 水路へ突入した土砂塊による造波

Fig. 13 Water waves generated by inflow earth mass to water channel

表-1 模型実験の条件 (実験B, 道上ら, 1996)

Table 1 Condition of Model Experiment

実験No	斜面勾配 (°)	水深 (m)	土厚 (m)	土砂流入速度 (m/sec)	土砂移動距離 (m)
1	25	0.15	0.03	0.535	0.3547
2	25	0.15	0.05	0.558	0.3547

間の短縮のための上流化法などの安定化項の検討や提案手法の現実地すべりを起因とする造波の解析への適用について三次元領域における要素サイズの影響、地すべり地塊と流体との相互作用機構および現地適用に関するCFL条件 ($\Delta t \leq \Delta x / \sqrt{gh}$)²⁵⁾についての検討が今後残された課題である。

参考文献

- Jorstad F. A.(1968) : Waves Generated by Landslides in Norwegian Fjord and Lakes, Publication 79, Norwegian Geotechnical Institute, Oslo, Norway, pp. 13-31
- 相田 勇(1982) : 山崩れによる津波, 海洋科学, Vol. 9, pp. 31-38
- Davidson, D. D. and McCartney, B. L.(1975) : Water Waves Generated by Landslides in Reservoir, Proc. of ASCE, Vol. 101, No. HY12, pp. 1489-1501
- Slingerland, R. L. and Voight, B.(1979) : Occurrence, Properties, and Prediction Models of Landslide Generated Water Waves, Rockslides and Avalanches, Vol. 2, Elsevier Science Publication, pp. 317-397
- Clifford, A. P. and Harris, D. V.(1982) : Prediction of Landslide-Generated Water Waves, Commission International, Des Grands Barrages, Riode Janeiro, pp. 283-316
- Kiersch, G.(1964) : Vaiont Reservoir Disaster, Civil Engineering, ASCE, No. 34, pp. 32-47
- Muller, P.(1964) : The Rock Slide in the Vajont Valley, Jour. of the Inter. Society of Rock Mechanics, Vol. 2, pp. 148-212
- Lane, K. S.(1966) : Stability of Reservoir Slopes, Proc. of Symposium on Rock Mechanics, Minneapolis, Minnesota, pp. 321-336
- Miller, D.(1966) : Giant Waves in Lituya Bay, Alaska, U. S. Geological Survey, Professional Paper, 354-C, pp. 51-83
- 三好 寿(1977) : 津波, イルカブックス海洋出版, No. 12, p. 30
- Noda, E. K.(1970) : Water Waves Generated by Landslides, Proc. of ASCE, Vol. 96, No. WW4, pp. 835-855
- Wiegel, R. L., Noda, E. K., Kuba, E. M., Gee, D. M. and Tornberg (1970) : Water Waves Generated by Landslides in Reservoirs, Proc. of ASCE, Vol. 96, No. WW2, pp. 307-331
- Davidson, D. D. and Whalin, R. W.,(1974) : Potential Landslide-Generated Water Waves, Libby Dam and Lake Koocanusa, Montana, U. S. Army Engineering Waterways Experiment Station, Technical Report, p. 30
- Pedersen, G. and Gjevik, B.(1983) : Run-Up of Solitary-Waves, Jour. of Fluid Mechanics, Vol. 135, pp. 283-299
- Heinrich, P.(1992) : Nonlinear Water Waves Generated by Submarine and Aerial Landslide, Jour. of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering, Vol. 118, No. 3, pp. 249-266
- Raney, D. C. and Butler, H. L.(1975) : A Numerical Model for Predicting the Effect of Landslide Generated Water Waves, U. S. Army Engineering Waterways Experiment Station, H-75-1, p. 25
- Raney, D. C. and Butler, H. L.(1976) : Landslide Generated Water Wave Model, Proc. of ASCE, Vol. 102, No. HY9, pp. 1269-1282
- 村上泰啓, 中村興一, 清水康行, 1991 : 貯水池における表面波伝播シミュレーション, 土木学会第46回年次学術講演会, pp. 466-467
- Harbitz, C. B., Pedersen, G. and Gjevik, B.(1993) : Numerical Simulations of Large Water Waves due to Landslides, A. S. C. E., Jour. of HE., Vol. 119, No. 12, pp. 1325-1342
- 道上正視 (1995) : 貯水池内での大規模崩壊に伴う水位変動について, ダム技術, No. 105, pp. 4-11
- Koutitas, C. G.(1977) : Finite Element Approach to Waves due to Landslides, Proc. of ASCE, Vol. 103, No. HY9, pp. 1021-1029
- 小林紘士, 和田 明, 角湯正剛 (1989) : 流体数値実験, 朝倉書店, p. 159
- 二之宮弘, 大西和榮, 小林錦子, 大浦洋子 (1997) : パソコンによる水環境流れ解析, 朝倉書店, p. 244
- Peraire, J., Zienkiewicz, O. C. and Morgan, M.(1986) : Shallow Water Problems: A General Explicit Formulation, Inter. Jour. for Numer. Methods in Eng., Vol. 22, pp. 547-574
- 川原睦人, 野村卓史, 榎山和男, 奥田洋司 (1988) : 有限要素法による流れのシミュレーション, 日本数値流体力学有限要素法研究委員会, シュプリンガー・フェアラーク東京, p. 298
- Otane, E.(2000) : A Stabilized Finite Element Method for Incompressible Viscous Flow using A Finite Increment Calculus Formulation, Comput. Methods. Appl. Mech. Engrg. Vol. 182, pp. 355-370
- 松本純一, 梅津 剛, 川原睦人 (1998) : 陰的有限要素法による浅水長波流れと河床変動解析, 応用力学論文集, Vol. 1, pp. 263-272
- 川原睦人(1996) : 移動境界流れ解析, 東京大学出版会, p. 184
- Kawahara, M. and Umetu, T.(1986) : Finite Element Method for Moving Boundary Problems in River Flow, Inter. Jour. for Numer. Methods in Eng., Vol. 6, pp. 365-386
- Hammack, J. L., 1973 : A Note on Tsunami: Their Generation and Propagation in An Ocean of Uniform Depth, Jour. of Fluid Mech., Vol. 60, Part4, pp. 769-799
- Laitone, E. V., 1960 : The Second Approximation to Cnoidal and Solitary Waves, Jour. of Fluid Mech., Vol. 9, pp. 440-444
- 道上正視, 檜谷 治, 木戸正二 (1996) : 貯水池内での土砂流入に伴う水面波に関する実験的研究, 鳥取大学工学部研究報告, Vol. 27, No. 1, pp. 105-112
- 丸岡 晃, 太田真二, 平野廣和, 川原睦人 (1997) : 同次補間を用いた陰的有限要素法による非圧縮粘性流れの解析, 構造工学論文集, Vol. 43A, pp. 383-394

(原稿受付2001年1月12日, 原稿受理2001年7月6日)