研究

両凹面レンズによる平面超音波の集束* —理論的アプローチ—

鎌倉 友男, 青木 健一**

(電気通信大学)
(kamakura@ee.uec.ac.jp)

中村 敏明***

(防衛大学校)

安達 日出夫****

(オリンパス光学工業株式会社)

(平成14年7月2日受付け)

Abstract

Based on wave acoustics, focusing of a plane progressive ultrasonic wave by a bi-concave lens which is made of acrylic resin and is submerged in water is investigated theoretically. For simplicity, it is assumed that the wave is normally incident on the lens and there is no energy dissipation such as sound absorption losses due to viscosity in water. Another important assumption is to fulfill a boundary-free requirement in the radial direction of the lens. By imposing the appropriate boundary conditions of both the continuity of vibration velocity and of stress on the water/lens interface, not only longitudinal but also transverse waves are successfully obtained in closed forms, although their expressions are somewhat involved. Several numerical examples demonstrate that the amplitude of the ultrasonic wave passing through the lens increases with propagation in the pre-focal region, takes a maximum gain with a slight shift in position from the geometric focus, and then decreases gradually in the post-focal region. Great oscillations in the amplitude appear in the pre-focal region. There seem, however, no striking peaks and dips in the field away from the focus. Additional important finding is that the transverse wave influences more or less on the formation of the focusing patterns.

分 類 : 物理音響, 音波伝搬

キーワード : 両凹面音響レンズ, 縦波, 横波, 全反射, 集束

1. はじめに

音響エネルギーを空間のある局所に集中させるものとして, また画像化の処理機構の一つとして音響レ

ンズをよく利用する。海洋音響においては近年, 音響レンズによる画像化方式という実用的な報告もなされている^{1,2)}。ふつう, このような音響レンズは周囲媒質よりも音速が大きな物質, とりわけ固体で作られるが, この場合のレンズの開口は凹面形状となる。

ところで, 音響レンズによる超音波ビームの集束過程を調べる場合や, レンズの最適設計を行う場

* Focusing of a plane ultrasonic wave by a bi-concave lens. -Theoretical approach-

** Tomoo KAMAKURA, Kenichi AOKI (The University of Electro-Communications).

*** Toshiaki NAKAMURA (National Defense Academy)

**** Hideo ADACHI (Olympus Optical Co., LTD)

合、音線追跡法 (ray tracing) を利用することが多い²⁻⁴⁾。この手法は使用の簡便さに特長があるものの、光学で代表されるように、レンズの開口と波長の比が極めて大きい場合に十分な精度で利用できる。音響の分野ではその比がせいぜい数百のオーダーであり、したがってこのような場合でも音線追跡法がそのまま利用できるか疑問なところである。特に、集束特性に与える回折の効果を解明したり、横波の発生とその集束特性への影響を調べる場合には、音線追跡法は不向きであり、波動理論に立ち戻らなければならない。

本報告は、波動理論に基づいて平面波が両凹面レンズに垂直入射して透過する問題を解析し、集束ビームの回折、集束利得、横波の励起に関する知見を得ることを目的としている。解析理論では限界になろうこの種の研究課題に対しては、近い将来、有限要素法やFDTD法⁶⁾がその解決に威力を発揮すると思われるが、これらの数値解法に基礎データを提供する意味からも本研究の意義がある。両凹面レンズは凹平面レンズと平凹面レンズの組み合わせと考えられるが、波の透過過程としては、レンズに入射する縦波に全反射が起こることから、後者よりも前者のほうが複雑である。したがって、凹平面レンズへの波の透過問題を詳細に述べて、その解析の重要性を指摘する。

2. 基礎理論

Fig. 1 に示すように、 d の曲率半径を持つ媒質IIが、周囲媒質Iで満たされる空間内に置かれている。媒体Iは流体で、ここでは水を想定する。媒質IIは音響レンズで、固体である。水の粘性はふつう無視できるので、媒質I内では縦波のみが存在する。このとき、音波伝搬は速度ポテンシャル ϕ を用いて

$$\nabla^2 \phi + k^2 \phi = 0 \quad (1)$$

と表される。ここで、 $k = \omega / c$ 、 ω は縦波の角周波数、 c は音速である。粒子速度 $\mathbf{v}$ と音圧 p はそれぞれ $\mathbf{v} = -\nabla \phi$ 、 $p = j\omega \rho \phi$ の関係から導かれる。ここで、 ρ は媒質Iの密度である。

一方、媒質IIでは縦波のほか横波も存在し得る。変位ベクトル $\mathbf{u}$ は次式を満たす⁷⁾。

Fig. 1 Model of a concave boundary.

$$(\lambda + 2\mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} - \mu \nabla \times \nabla \times \mathbf{u} + \rho_0 \omega^2 \mathbf{u} = 0 \quad (2)$$

ここで、 λ と μ はLamé定数、 ρ_0 は媒質IIの密度である。式(2)は、縦波を記述するスカラーポテンシャル ψ と、横波を記述するベクトルポテンシャル $\mathbf{A}$ で次のように分離できる⁷⁾。

$$\mathbf{u} = \nabla \psi + \nabla \times \mathbf{A} \quad (3)$$

$$\nabla^2 \psi + k_l^2 \psi = 0 \quad (k_l = \omega / c_l) \quad (4)$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} - k_t^2 \mathbf{A} = 0 \quad (k_t = \omega / c_t) \quad (5)$$

ここで、 $c_l = \sqrt{(\lambda + 2\mu) / \rho_0}$ は縦波の音速、 $c_t = \sqrt{\mu / \rho_0}$ は横波の音速である。なお、固体は多かれ少なかれ音波吸収を有するが、本解析では便宜上それを無視する。境界条件は、水とレンズの境界を挟んで、変位あるいは振動速度が、また応力が連続であればよい。

3. 近似解析

波動方程式(1),(4),(5)を所与の境界条件のもとで厳密に解くことは容易ではない。そこで、いくつかの仮定を設けながら、以下に示すように解析を進める。

Fig. 1 において、音軸の z 軸に沿う平面波 $\phi_i = e^{-jkz} = e^{-jkr \cos \theta}$ が、凹面固体に垂直入射する場合を想定する。まずは、原点 O を中心として、この平面波を球面波に展開する。

$$\phi_i = \sum_{n=0}^{\infty} (-j)^n (2n+1) j_n(kr) P_n(\cos\theta) \quad (6)$$

ここで、 $j_n(\cdot)$ は球ベッセル関数、 $P_n(\cdot)$ はルジャンドル関数、 r は原点から観測点Pまでの距離、 θ はPと z 軸とのなす角度である。

次に、境界で反射する波の表示式を与える。本来ならば、反射波 ϕ_r はレンズ開口の有限な大きさを考慮して求めなければならないが、ここでは θ に対して特に条件を課さない。すなわち、波動方程式(1)を満たす解として

$$\phi_r = \sum_{n=0}^{\infty} A_n (-j)^n (2n+1) h_n^{(1)}(kr) P_n(\cos\theta) \quad (7)$$

と置き、 θ について特別な条件を与えない。式(7)で、 $h_n^{(1)}(\cdot)$ は第1種球ハンケル関数、 A_n は境界条件によって決まる定数である。なお、入射波の速度ポテンシャルの振幅を便宜上1としているが、本来はそのポテンシャルの振幅に粒子速度や音圧の振幅を含めて表示すべきであろう。もし、粒子速度の振幅 V_0 で表すならば、 $\phi_i = V_0 e^{-jkz} / jk$ とすればよい。式(6)の表示における粒子速度の振幅は k である。

最後に固体内の縦波および横波の表示式を与える。音場は z 軸に関して回転対称である。また、横波のバルク波は発生してもSV波であり、よって横波を記述するベクトルポテンシャル A は、 z 軸の周りの回転成分 A_ϕ のみとなる。横波の性質 $\nabla \cdot A = 0$ と式(5)から、 $A_\phi(r, \theta)$ に関する波動方程式は

$$\nabla^2 A_\phi - \frac{A_\phi}{r^2 \sin^2 \theta} + k_l^2 A_\phi = 0 \quad (8)$$

になる。式(4)と式(8)をそれぞれ満たすポテンシャルは

$$\psi = \sum_{n=0}^{\infty} B_n (-j)^n (2n+1) h_n^{(2)}(k_l r) P_n(\cos\theta) \quad (9)$$

$$A_\phi = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (-j)^n (2n+1) h_n^{(2)}(k_l r) \frac{d}{d\theta} P_n(\cos\theta) \quad (10)$$

と表される。これらの式で、 $h_n^{(2)}(\cdot)$ は第2種球ハンケル関数であり、 B_n と C_n は A_n とともに境界条件から決定される定数である。

既に述べたように、振動変位(または振動速度)と応力は境界 $r=d$ で連続でなければならない。レンズ固体内の変位 u は式(3)によって与えられ、 r 成分と θ 成分はそれぞれ

$$u_r = \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\phi) \quad (11)$$

$$u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) \quad (12)$$

と表される。媒質Iの粘性を無視しているので、振動速度に対する境界条件は u_r のみであり、 $r=d$ において

$$-\frac{\partial}{\partial r} (\phi_i + \phi_r) = j\omega u_r \quad (\text{at } r = d) \quad (13)$$

が境界条件になる。

応力テンソルのうち境界条件に関与する成分は T_{rr} と $T_{r\theta}$ であり、それぞれの成分は

$$T_{rr} = \lambda \Delta + 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r} \quad (14)$$

$$T_{r\theta} = \mu \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) \quad (15)$$

で与えられる⁷⁾。ここで、

$$\Delta = \nabla \cdot \mathbf{u} = \nabla^2 \psi = -k_l^2 \psi$$

である。成分 T_{rr} は $r=d$ において音圧と等しい(ただし、符号に留意して)

$$\begin{aligned} -j\omega p(\phi_i + \phi_r) &= \lambda \Delta + 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r} \\ &= -\lambda k_l^2 \psi + 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r} \quad (\text{at } r = d) \end{aligned} \quad (16)$$

Fig. 2 Relative amplitude of the vibrational velocity as a function of θ when $f=500$ kHz and $d=20$ cm. Only the longitudinal wave component $c|\partial\psi/\partial r|$ of the radial velocity is plotted. The observation point on the planes perpendicular to the z axis is changed from $z=20.5$ cm to 22 cm. The medium in I is water and in II is acrylic resin.

の条件を満たす。一方、 T_θ については、つねに0である。つまり、

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} = 0 \quad (\text{at } r = d) \quad (17)$$

が成立する。多少複雑な計算を必要とするが、境界条件に関する3つの式(13), (16), (17)から3つの未知係数 A_n , B_n , C_n が決定できる。そして、これらの係数から、 ϕ , ψ , A_ϕ , さらに変位ベクトル u や応力テンソルなどのすべての量が定まる。

以上の理論を用いて、固体内の振動速度を計算した結果をFig. 2に示す。ここでは集束場に最も影響を与えるであろう縦波による振動速度の r 方向成分、つまり式(11)の右辺第1項に $j\omega$ を乗じた $|j\omega\partial\psi/\partial r|$ を取り上げている。ただし、縦軸は入射音波の粒子速度 k で無次元化した振動速度 $|j\omega\partial\psi/\partial r|/k = c|\partial\psi/\partial r|$ として与えている。周囲媒質Iは水、レンズ媒質IIはアクリル樹脂を想定している。ちなみに、 $\rho=1000$ kg/m³, $c=1500$ m/s, $\lambda=5.7\times 10^9$ Pa, $\mu=1.43\times 10^9$ Pa, $\rho_0=1200$ kg/m³, 縦波の音速 $c_I=2670$ m/s, 横波の音速 $c_T=1092$ m/s, また周波数は500 kHz, $d=20$ cm

である⁸⁾。図では、音軸に垂直な面内に観測点を置き、その位置 z を20.5, 21, 22 cmの3点に選んでいる。 $d=20$ cmなので、 $z=20.5$ cmとは観測点がレンズ開口の中心から5 mmしか離れていないことを意味する。

この数値結果から共通していえることは、3つの観測点とも、 θ がおおよそ 20° を境に振幅が急激に小さくなることである。しかも、観測点が水/アクリル樹脂の境界から離れるほど、例えば $z=20.5$ cmと22 cmのデータを比較して22 cmのほうが、小さな角度の θ で減少し始める。このような急激な振幅の減少は、入射波がレンズの曲面によって全反射するためであろう。無限に広がる平面境界に平面波が斜め入射する場合、縦波の臨界角 θ_c は $\sin(c/c_I)$ で与えられる。 c , c_I に具体的な数値を代入すると $\theta_c=34.2^\circ$ になる。Fig. 1からも分かるように、観測点を曲面に沿ってではなく、音軸に垂直な面内に設定しているために、臨界角が見かけ上 20° 付近に現れているものと思われる(付録A参照)。ただし、曲面に対して臨界角が定義できるかどうかの疑問は残る。

Fig. 2においてさらに気付くことは、透過範囲 $\theta < 20^\circ$ において、振動速度の振幅が波打つことである。この現象は、観測点 z が水/アクリル樹脂の境界から遠ざかるほど顕著となる。ここで、音軸、つまり $\theta=0$ 付近の振動速度の大きさに注目する。観測面がレンズ面からさほど離れていないとき、例えば $z=20.5$ cmの場合、その振幅はおおよそ0.65である。この値は、平面波が平面境界に垂直入射する場合の、振動速度(粒子速度)に対する透過率 T_v にほぼ等しい。すなわち、媒質I, IIの固有音響インピーダンスを Z_1 , Z_2 としたとき、 $T_v=2Z_1/(Z_1+Z_2)$ で与えられ、 $Z_1=1.5\times 10^6$ Ns/m³, $Z_2=3.2\times 10^6$ Ns/m³なので $T_v=0.64$ となり、上記のデータ値にほぼ等しい。

横波による振動速度も含めた、 $z=20.5$ cmにおける計算結果をFig. 3に示す。(a)は式(11)で記述される r 方向の速度成分 $\omega|u_r|$, また(b)は式(12)で記述される θ 方向の速度成分 $\omega|u_\theta|$ である。この場合も入射波の粒子速度 k で無次元化した。その結果が実線(total)である。まず、 r 成分のFig. 3(a)に注目する。この図において、縦波成分のみを取り出したのが点線である。この結果はFig. 2と同じであって、振幅は θ が 20° 付近で急激に減少する。この減少に呼応するように横波が発生するが、その振幅の増加は破線のように緩やかで

Fig. 3 Relative amplitude of the vibrational velocity as a function of θ when $f=500$ kHz, $d=20$ cm, and $z=20.5$ cm. r -component $c|u_r|$ (a), θ -component $c|u_\theta|$ (b).

ある。本計算値内では、 θ が 40° 前後で振幅が最大になり、それ以降は徐々に減少する。縦波と横波の位相関係から、全体としては実線のように小刻みに振幅が変動する。

つぎに、Fig. 3(b)の u_θ に目を向けると、 θ の増加につれて縦波成分 (点線) および横波成分 (破線) とともに振幅が増加することに気付く。この増加領域では、縦波成分の振幅のほうが横波成分よりも大きい。しかし、 θ が 20° を超える辺りから両者の振幅の大小関係が反転する。

4. 両凹レンズによる集束場

Fig. 4 に示す曲率半径 d_1 , d_2 の両凹面レンズにおいて、平面超音波が z 軸に沿って左から右に進行する場合を想定する。水/レンズの境界 S_1 に入射した超音波の一部は、レンズ/水の境界 S_2 で反射する。場合によっては、この波が境界 S_1 で反射するという多重反射が生ずるが、いまこの多重反

射は十分弱く無視できるとする。また、横波の速度 $c_t=1092$ m/s は水中の音速 $c=1500$ m/s よりも遅く、したがって横波に対して全反射が起こる。これについても無視する。観測点 P が境界 S_2 上に存在する場合、 z 方向の振動変位 u_z は u_r と u_θ を用いて

$$u_z = u_r \cos \theta_1 - u_\theta \sin \theta_1 \quad (\text{on } S_2) \quad (18)$$

で与えられる。また、このときの r_1 と θ_1 は d_2 と θ_2 を用いて

$$r_1 = \sqrt{(z_1 + d_2)^2 + d_2^2 - 2d_2(z_1 + d_2)\cos\theta_2} \quad (19)$$

$$\theta_1 = \sin^{-1} \left(\frac{d_2 \sin \theta_2}{r_1} \right) \quad (20)$$

Fig. 4 Geometry of a bi-concave lens.

と表される。境界 S_2 の表面が振動速度 $j\omega u_z$ で振動し、この振動によって超音波ビームは水中に放射され、伝搬につれ集束する。

ところで、広開口の高集束ビームの理論的な予測には、古くからレイリーの積分式

$$\phi = \frac{1}{2\pi} \iint_{S_0} v_n \frac{1}{R} e^{-jkR} dS \quad (21)$$

が利用されている。この式で、 R は境界 S_2 から水

中の観測点までの距離, S_0 は対象とするレンズ開口の面積, v_n は境界 S_2 における法線方向の粒子速度を表す。厳密に言えば, 曲面を持った音源開口に対して, レイリーの積分式は適用できない。しかし, 超音波の波長が凹面の曲率半径よりも十分短い場合には, 半開口角が 60° 程度までは, 実用上, 使用できることが Coulouvrat によって確かめられている⁹⁾。このように, レイリーの積分式は広い開口角にも適用できるという特長をもつが, 一般に2重積分を実行せねばならず, 数値計算を行うとなると面倒である。

レイリーの積分式の誘導に立ち返ってみると, この積分式は波動方程式, つまり式(1)を所与の境界条件を課しながら積分形式に変換したものに他ならない。音場を理論予測する際に, レイリーの積分式を利用するよりも波動方程式, あるいはその式から導かれる適切なビームモデル式を用いて音場解析したほうが便利な場合もある。本報告では, この方針に従って, ビームモデル式 SBE (Spheroidal Beam Equation, 回転楕円ビーム式)¹⁰⁻¹²⁾を利用する。この SBE は焦点から遠く離れた音場の理論予測に不向きであるものの, 凹面形状の境界条件を式に容易に含めることができるという特長を有する。

Fig. 5 は, 式(18)の境界条件のもとで SBE を数値解析した結果で, 音軸上の音圧分布を示している。ただし, 付録 B の結果を利用して, 境界 S_2 上における法線方向の粒子速度を

Fig. 5 On-axis pressure amplitude. $d_2=20$ cm. Solid lines: including both the longitudinal and transverse waves in the lens, dotted lines: including only the longitudinal wave, neglecting the generation of the transverse wave.

$$v_n = v_z \times 1.36 \cos \theta_2 \quad (\text{on } S_2) \quad (22)$$

と置いた。ここで, $v_z = j\omega u_z$ である。このモデル計算では両面のレンズの曲率半径は等しいとして, $d_1=d_2=20$ cm に設定している。 $z_1=20.5$ cm なので, レンズの厚さは開口中心において 5 mm である。図の縦軸は, レンズがないとしたときの音圧を基準に, レンズを通したときの音圧をデシベル表示したもので, いわゆる集束利得に対応する。また, 横軸は, 境界 S_2 の開口中心を $z=0$ に設定しての伝搬距離である。図中の実線はレンズ内の縦波と横波を含めて計算した音圧分布であり, 点線はその2つの波のうち縦波成分だけを取り出して計算した音圧分布である。

幾何光学によれば, 薄レンズの公式から焦点距離 z_f は

$$\frac{1}{z_f} = (n-1) \left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2} \right) \quad (23)$$

になることが知られている¹³⁾。ここで, 屈折率 n はレンズに対する水の音速比 c/c_l とし, いまの場合 $1500/2670=0.56$ である。また, 両凹レンズなので慣習に従って $d_1 < 0$ とし, $d_1 = -20$ cm, $d_2 = 20$ cm である。式(23)にこれらの値を代入すると幾何学的な焦点距離として $z_f=22.7$ cm を得る。この値は薄レンズを前提とした結果であって直接の比較は危険性があるものの, 音響的な焦点距離は回折に起因するためであろうか, その距離よりも2~3 cm 短く, 球の中心 O_2 の $z=20$ cm 付近に位置する。実線と点線で表された2つの音圧分布に目立つような大きな差異が現れていない。ただ, 横波の存在は焦点以遠の分布に若干の変動を与えているだけである。よって, 集束場は大方縦波のみを取り出して理論予測してもよいことになる。

音響レンズを透過した超音波ビームの振幅は, 焦点まではピーク, ディップを繰り返しながら増加する。焦点での相対レベルは 27 dB なので, レンズを通すことで音圧振幅がおよそ 23 倍に増幅されることになる。焦点を超えると振幅は単調に減少し, 計算範囲内には顕著なピーク, ディップは現れない。参考までに, 横波の発生を無視して縦波のみを考慮した, つまり $A_\theta=0$ として解析した結果を Fig. 5 に破線で示す。大まかな音圧の増減傾向は横波を含めた特性と変わることはない。しかし, 横波の存在はディップをより深くし, 焦点前から焦点に

Fig. 6 Beam patterns on the focal plane of $z=20$ cm. Solid lines: including both the longitudinal and transverse waves in the lens, dotted lines: including only the longitudinal wave, neglecting the generation of the transverse wave.

近づくにつれ音圧をより急激に増加させ、逆に焦点以遠ではより緩やかに減少させる傾向にある。また、横波を含めることで集束利得が全体的に下がり、焦点でおおよそ 3 dB 減である。このように集束利得が下がる理由は、レンズに入射する縦波のエネルギーの一部が、横波の励起エネルギーに変換されるためである。なお、レンズ開口は半開口角 $\theta_0=45^\circ$ 、開口半径に換算して 14 cm で計算している。比較として、半開口角 30° (開口半径 10 cm) として計算したが、開口角の違いが音圧分布の特性にほとんど影響しなかった。

$z=20$ cm の焦点面におけるビームパターン特性を Fig. 6 に示す。Fig. 5 のときと同様に、点線は縦波のみを取り出して描いた特性である。縦波および横波ともに含めた実線とに顕著な相異は見られない。横波の発生を無視して ($A_0=0$)、縦波のみから予測されるビームパターンを図中の破線で示す。この場合も両者のパターンの大まかな変動傾向は同じであるが、詳細においては異なる。特に、ディップの深さや、音軸から離れた $r>10$ mm の領域のパターンに相異が現れている。

このビームパターン特性によれば -6 dB 幅はおおよそ 5 mm で、これがこのレンズの方位分解能と思われる。また、音軸からおおよそ 5 mm と 10 mm 離れた位置にディップが現れ、それ以遠では目立つディップは現れない。音軸に近いこういっ

Fig. 7 Three-dimensional view of the focused field. The lens is located on the left.

たピークやディップの存在を実証するには、ピークとディップ間隔より微小な、具体的には 5 mm よりも小さな径のハイドロホンで音場計測を行う必要がある。また、ディップの存在の有無はレンズや音源の軸対称性にも大きく依存するので、レンズの対称性加工にも留意を要する。

音圧の空間分布を鳥瞰図として Fig. 7 に示す。音響レンズは図の左側に設置され、超音波はそのレンズを通過して右側に進んでいるものとして描いている。焦点近傍で音圧は最大になるが、この図ではその音圧振幅が 1 になるように規格化している。明らかに、焦点よりも手前、つまりレンズ側の領域でいくつかのピーク、ディップが現れており、音場特性は複雑である。一方、焦点よりも遠方では音圧は単調に減少している。

6. おわりに

いくつかの仮定や近似を設けながら、両凹面レンズによる平面超音波の集束過程を理論解析した。本計算モデルで対象としたレンズ材や寸法は一例に過ぎないが、いくつかの数値結果から、音響的な焦点は薄レンズの公式によって導かれる幾何学的焦点よりも幾分レンズ側の、球の中心にほぼ位置することが分かった。また、焦点手前では音圧分布にいくつかのピーク、ディップが現れるが、焦点以遠ではなめらかに減少していくことも分かった。しかも大方の集束場は、境界面で発生する横波を無視して縦波のみから予測できることも判明した。しかし、や

はり厳密な予測には横波の発生は無視できず、その存在は焦点手前の領域において音圧のディップをより深くし、また焦点以遠の領域では音圧の減衰を緩やかにする特徴として現れるとの結果を得た。そして、横波の励起に起因して集束利得は縦波のみを考慮したときよりも 3 dB ほど下がり、27 dB となった。さらに平面波入射に対し、レンズの半開口角が臨界角付近、今回の数値例では 34° 、開口半径にして 11 cm もあればビームの集束に十分効果があると予想された。

本解析で用いた仮定や近似解析、特にレンズ内の音波吸収、縦波および横波のレンズ/水境界における複雑な反射、そして表面波の励起などの無視が妥当であるかについて、今後、実験結果と比較しながら解明する予定である。また、光線追跡法を用いた結果と比較して、その使用限界についても検討する予定である。

参考文献

- 1) 中村敏明他, “AUV「うらしま」搭載の音響機器について,” 海洋音響学会講演論文集, 59-62 (2001).
- 2) E. Belcher, W. Hanot, and J. Burch, “Dual-frequency identification sonar,” IEEE Proceedings of 2002 International Symposium on Underwater Technology, 187-192 (2002).
- 3) Y. Tannaka and T. Koshikawa, “Solid-liquid compound hydroacoustic lens of low aberration,” J. Acoust. Soc. Am., **53**, 590-595 (1973).
- 4) 菊池年晃, 奥島基良, 高橋純夫, “分布屈折率球形音響レンズの層分割法,” 海洋音響研究会報, **12**, 40-46 (1985).
- 5) D. L. Folds, “Status of ultrasonic lens development,” in *Underwater Acoustics and Signal Processing* by L. Bjørnø (ed.) (D. Reidel Publishing Company, 1981), 263-279.
- 6) 土屋健伸, 穴田哲夫, 遠藤信行, 中村敏明, 海法宇治, “PE 法に基づく水中 TV 用音響レンズの音響特性の数値解析,” 信学技報, US2001-33 (2001).
- 7) 例えば, 尾上守夫監修, 固体振動論の基礎 (オーム社, 昭和 57 年), 1, 2 章.
- 8) L. E. Kinsler, A. Frey, A. B. Coppens, and J. V. Sanders, *Fundamentals of Acoustics* (John Wiley & Sons, 2000), p.526 の Lucite のデータから, $c_l = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho_0} = 2650 \text{ m/s}$ とポアソン比 $\sigma = \lambda/2(\lambda + \mu) = 0.4$ の関係を用いて, $\lambda = 5.7 \times 10^9 \text{ Pa}$, $\mu = 1.43 \times 10^9 \text{ Pa}$ を誘導した.
- 9) F. Coulouvrat, “Continuous field radiated by a geometrically focused transducer : Numerical investigation and comparison with an approximate model,” J. Acoust. Soc. Am., **94**, 1663-1675 (1993).
- 10) T. Kamakura, T. Ishiwata, and K. Matsuda, “Model equation for strongly focused finite-amplitude sound beams,” J. Acoust. Soc. Am., **107**, 3035-3046 (2000).
- 11) T. Kamakura, K. Aoki, and T. Ishiwata, “Non-linear propagation of focused ultrasound beams from a wide-angle aperture,” ACUSTICA • acta acustica, **86**, 446-456 (2000).
- 12) <http://ew3.ee.uec.ac.jp/samples/samples.html>
- 13) 佐藤拓宋, 上田光宏, 波動と映像 (森北出版, 東京, 1972), 第 4 章.

付録A

球の中心Oから等距離にある3点 $r=20.5, 21, 22$ cm を選び、レンズ内における縦波の振幅 $c |\partial\psi/\partial r|$ の θ 依存性を Fig. A に示す。Fig. 2 の特性と同じ傾向ではあるが、減衰領域が全体的に右側、つまり θ の大きな値にずれている。しかも、その減衰曲線はなめらかになっている。特に、境界に近い $z=20.5$ cm ではその傾向が強い。この計算結果によれば、平板に対する臨界角 $\theta_c=34.2^\circ$ 以内に縦波の90%以上が透過しているようである。

Fig. A Relative amplitude of the vibrational velocity as a function of θ when $f=500$ kHz and $d=20$ cm. Only the longitudinal wave component $c |\partial\psi/\partial r|$ of the radial velocity is plotted. The observation point is changed from $r=20.5$ cm to 22 cm.

付録B

波を集束させるために Fig. 1 と逆向きに配置したレンズ、つまり平凹面音響レンズは超音波医用や非破壊検査において頻繁に利用されるが、この場合の波の透過問題をここで取り上げる。Fig. 1 で z 軸を逆向きにして、縦波の平面波 $\psi_i (= e^{-jk_z z})$ が媒質IIのレンズ内を右から左に伝搬しているとす。解析方法は本文第2, 3章と同じである。すなわち、レンズ/水の境界面で反射する縦波を ψ_r 、境界で横波に変換された波を A_ϕ 、そして縦波として水へ透過する波を ϕ と置く。なお、 ψ_i, ψ_r, A_ϕ は変位ポテンシャルであり、 ϕ は速度ポテンシャルである。

まず、入射波は z 軸の原点Oの周りで球面波に展開する。

$$\psi_i = \sum_{n=0}^{\infty} j^n (2n+1) j_n(k_l r) P_n(\cos\theta) \quad (\text{B-1})$$

つぎに、反射波および透過波をそれぞれ

$$\left. \begin{aligned} \psi_r &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n j^n (2n+1) h_n^{(2)}(k_l r) P_n(\cos\theta) \\ A_\phi &= \sum_{n=0}^{\infty} B_n j^n (2n+1) h_n^{(2)}(k_l r) P_n(\cos\theta) \\ \phi &= \sum_{n=0}^{\infty} C_n j^n (2n+1) h_n^{(1)}(kr) P_n(\cos\theta) \end{aligned} \right\} \quad (\text{B-2})$$

と置く。そして、振動速度の連続性と応力の連続性という境界条件から式(B-2)の係数 A_n, B_n, C_n を決定する。

境界面 $r=d$ における入射波の振動速度と、同じく $r=d$ における透過波の粒子速度との比、つまり振動速度の透過係数 $T_v (= |T_v| e^{j\beta})$ を θ の関数として計算し、その結果を Fig. B に示す。ここで用いたレンズ材は本文と同じくアクリル樹脂で、 $d=20$ cm としている。また、駆動周波数は 500 kHz である。図中の実線は上式 (B-1), (B-2) に基づき解析的に得た結果であり、これにより θ の増加につれて振幅 $|T_v|$ 、位相 β ともに単調に減少することがわかる。ここで、 β は $\theta=0$ での位相を基準として表している。なお、透過係数の振幅およ

Fig. B Amplitude $|T_v|$ and phase β of the transmission coefficient for the vibrational velocity when $f=500$ kHz and $d=20$ cm. Both the phase curves almost overlap.

び位相の簡易式から得た結果を図中の点線で示す。振幅の簡易式は、平板に垂直入射する縦波の振動速度の透過係数と、方向余弦 $\cos \theta$ との積

$$T_v = \frac{2Z_2}{Z_1 + Z_2} \cos \theta = 1.36 \cos \theta \quad (\text{B-3})$$

である。ここで、 Z_1 , Z_2 は水およびレンズの固有

音響インピーダンスで、この値は既に第3章で記載している。この簡易解は解析解と $\theta=0^\circ$ でほぼ等しく、 $\theta=30^\circ$ であっても2%小さいのみである。

一方、位相の簡易式は平面入射波が境界の曲面に対応するだけ遅れるという幾何学的に計算される

$$\beta = -k_l d (1 - \cos \theta) \quad (\text{B-4})$$

を表したものである。この位相についての簡易解は θ の広い範囲において解析解とほとんど重なっており、よく一致する。以上のように、平凹面レンズによる超音波の透過過程は凹平面レンズに比べると単純であり、この意味で簡易式 (B-3), (B-4) が利用できる。

なお、本文とこの付録の解析結果から、音波が水からレンズに透過する過程はレンズから水に透過する過程よりも複雑である、という知見を得た。このことは、非破壊検査や超音波医用の分野でよく利用される凹面レンズを利用したパルスエコー法において、パルスを送波するよりも受波の過程に十分留意する必要があることを示唆する。