を乗ずれば、變位の振幅がでることがわかる。

いま實際の値としては、嘗て倉石技師が本誌第二輯第九卷所載「一樣なる半無限體内における熱傳導の一例」で用ひた地中温度の日變化

$$T_{z,0} = T_0,33 \sin(\omega t + 71.30') + 2,15 \sin(2\omega t + 71.40')$$

を採つて見ると

$$u = \frac{ae}{3} \left\{ \frac{T_0,33}{\sqrt{\omega}} e^{-\frac{x}{a}\sqrt{\frac{\omega}{2}}} \sin\left(\omega t - \frac{x}{a}\sqrt{\frac{\omega}{2}} + 206.30'\right) + \frac{2.15}{\sqrt{2\omega}} e^{-\frac{x}{a}\sqrt{2\omega}} \sin\left(2\omega t - \frac{x}{a}\sqrt{2\omega} + 206.40'\right) \right\}$$

となる。地表における温度と變位とを圖示すれば第一圖のやうになる。たゞしこゝに一言したきは軸を地殻内にむけてとつたから隆起は負、沈下は正となる。

表面彈性波に及ぼす重力の影響

荒川 秀俊

On the Influence of Gravity on Surface (Rayleigh and Love) Waves in Cylindrical Co-ordinates. By H. Arakawa.

レリー波に及ぼす重力の影響は最初ブロムウツチによつて取扱はれた。彼の有名な論文に於て、極めて興味深く論究せられて居るけれども數學的な取扱ひを簡單にするた

めに地殻を不可壓縮的と考へ、重力は地表にあつたハーモニクな起伏に相當する重さを法線歪力の中にとり入れたにすぎなかつた、こゝには流體力學の普通の取扱ひ方に従ひ、より嚴密だと思はれる方法によつて論議した。猶問題を三次元的に擴充したし、レリー波のみならず、ラブ波をも考へることとする。

地表を平面と見なし、原點を地表にとり、圓柱座標(r, θ, z)を用ひると運動の式は

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 \theta_r}{\partial t^2} &= (\lambda + \mu) \frac{\partial \Delta}{\partial r} + \mu \left\{ \frac{\partial^2 \theta_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 \theta_r}{\partial z^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{r^2} \left(\theta_r - \frac{\partial^2 \theta_r}{\partial \theta^2} \right) - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \theta_\theta}{\partial \theta} \right\} \\ \rho \frac{\partial^2 \theta_\theta}{\partial t^2} &= (\lambda + \mu) \frac{1}{r} \frac{\partial \Delta}{\partial \theta} + \mu \left\{ \frac{\partial^2 \theta_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta_\theta}{\partial r} + \frac{\partial^2 \theta_\theta}{\partial z^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{r^2} \left(\theta_\theta - \frac{\partial^2 \theta_r}{\partial \theta^2} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \theta_\theta}{\partial \theta} \right\} \\ \rho \frac{\partial^2 \theta_z}{\partial t^2} &= -\rho g + (\lambda + \mu) \frac{\partial \Delta}{\partial z} + \mu \left\{ \frac{\partial^2 \theta_z}{\partial r^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 \theta_z}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \theta_z}{\partial \theta^2} \right\} \end{aligned}$$

こゝに $\theta_r, \theta_\theta, \theta_z$ は變位、 t は時間、 ρ は密度、 λ, μ はラーメの常數を示し、 Δ はデラレーションで

$$J = \operatorname{div} \vartheta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \vartheta_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial \vartheta_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \vartheta_z}{\partial z}$$

を示す。

フロムウツチに倣ひ數學的困難をさけるために地殻を不可壓縮と考へると』は零となる。しかし『』は有限であるから

$$\lambda J = -H$$

と置く。Hは靜水壓を示す。

いまスカラー及ベクトル・ポテンシャルを用ひ

$$\left. \begin{aligned} \vartheta_r &= \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \\ \vartheta_\theta &= -\frac{\partial A_r}{\partial r} \\ \vartheta_z &= \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial A_\theta}{\partial r} + \frac{A_\theta}{r} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

と置く。こゝに運動はz軸に關し對稱なものと考へて

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \equiv 0$$

とした。こうすると運動の方程式は

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0, \dots \dots \dots (2)$$

$$\left. \begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 A_\theta}{\partial z^2} &= \mu \left(\frac{\partial^2 A_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial r} + \frac{\partial^2 A_\theta}{\partial z^2} - \frac{A_\theta}{r^2} \right) \\ \rho \frac{\partial^2 A_r}{\partial z^2} &= \mu \left(\frac{\partial^2 A_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 A_r}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3)$$

及び

$$H = -\rho \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \rho g z, \dots \dots \dots (4)$$

(2) 及び (3) の解を求める。

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= P e^{\xi r} C_0(\xi r) \cdot e^{i m z} \\ A_\theta &= R e^{i s r} C_1(\xi r) \cdot e^{i m z} \\ A_r &= S e^{i s r} C_0(\xi r) \cdot e^{i m z} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (5)$$

こゝに P, R, S は定數で、C₀(ξr) 及び C₁(ξr) はバラメータ ξr の零次及び一次の任意のベッセル函數であり、z 軸の正の方向を垂直に上方にとつた。しかして

$$s^2 = \xi^2 - k^2, \quad k^2 = \frac{\rho p^2}{\mu}.$$

すると(1)より

$$\left. \begin{aligned} \vartheta_r &= -(\xi P e^{\xi r} + s R e^{i s r}) C_1(\xi r) e^{i m z} \\ \vartheta_\theta &= \xi S e^{i s r} C_1(\xi r) e^{i m z} \\ \vartheta_z &= \xi (P e^{\xi r} + R e^{i s r}) C_0(\xi r) e^{i m z} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (6)$$

歪力は

$$\left. \begin{aligned} (2) \quad \frac{\partial \theta}{\partial z} &= -\left\{ 2\xi^2 P_{\epsilon^2} + (2\xi^2 - k^2) R_{\epsilon^{sz}} \right\} C_1(\xi r) e^{i\mu z} \\ \mu \quad \frac{\partial \theta}{\partial z} &= \xi_8 S_{\epsilon^{sz}} C_1(\xi r) e^{i\mu z} \\ (3) \quad \frac{\partial \theta}{\partial z} &= -\left\{ 2\xi^2 - k^2 \right\} P_{\epsilon^2} \\ \mu \quad \frac{\partial \theta}{\partial z} &= \left\{ 2\xi^2 - k^2 \right\} P_{\epsilon^{sz}} \\ &\quad + 2\xi_8 R_{\epsilon^{sz}} \left\{ C_0(\xi z) e^{i\mu z} + \frac{P}{\mu} g z \right\} \end{aligned} \right\} \dots (7)$$

自由面 $z=0$ におけるハミルトン関数は

$$\eta = \xi(P + R) C_0(\xi r) e^{i\mu z}, \dots (8)$$

法線歪力が自由面で常に零となるべく条件は

$$\left\{ (2\xi^2 - k^2) + \xi \frac{P_{\eta}}{\mu} \right\} P + \left(2\xi_8 + \xi \frac{P_{\eta}}{\mu} \right) R = 0 \dots (9)$$

切線歪力が自由面で恒に零となるべく条件は

$$2\xi^2 P + (2\xi^2 - k^2) R = 0, \dots (10)$$

$$S = 0, \dots (11)$$

(9) と (10) とより P と R とを消去すれば

$$(2\xi^2 - k^2) - 4\xi_8 - \xi k \frac{P_{\eta}}{\mu} = 0 \dots (12)$$

$$\infty \rightarrow \xi = \left(\frac{k}{\xi} \right)^2 \rightarrow \infty \rightarrow$$

$$(2 - \xi)^2 - 4\sqrt{1 - \xi} - \xi \frac{P_{\eta}}{\mu \xi} = 0 \dots (12a)$$

となり、ブロムウッチが前掲書百〇二頁で論じて居る方程式と全く同じになる。

(12) の方程式の正の實根を κ で表し、之に相應する s を s_8 で示すことゝすれば

$$s_8 = \sqrt{\kappa^2 - k^2}$$

より

$$\left. \begin{aligned} \vartheta_r &= A\kappa \{ (2\kappa^2 - k^2) e^{\kappa z} - 2\kappa_8 e^{\kappa^2 z} \} C_1(\kappa r) e^{i\mu z} \\ \vartheta_\theta &= 0 \\ \vartheta_z &= -A\kappa \{ (2\kappa^2 - k^2) e^{\kappa z} - 2\kappa^2 e^{\kappa^2 z} \} C_0(\kappa r) e^{i\mu z} \end{aligned} \right\} \dots (13)$$

$$P : R : A = -(2\kappa^2 - k^2) : 2\kappa^2 : 1.$$

こゝで $\infty \rightarrow C_1(\xi r), C_0(\xi r)$ の代りに $H_{2,0}(\kappa r), H_{2,1}(\kappa r)$ とおけば $\infty \rightarrow \infty$ に發散する波が得られる。さきより $\infty \rightarrow \infty$ が甚だ大なる所を考へると

$$H_{2,1}(\kappa r) = \sqrt{\frac{2}{\pi \kappa r}} e^{-i(\kappa r - \frac{2n+1}{4}\pi)}$$

であるから

$$\left. \begin{aligned} \vartheta_r &= A\kappa \{ (2\kappa^2 - k^2) e^{\kappa z} - 2\kappa_8 e^{\kappa^2 z} \} \sqrt{\frac{2}{\pi \kappa r}} e^{i(m - \kappa r + \frac{3}{4}\pi)} \\ \vartheta_\theta &= 0 \\ \vartheta_z &= -A\kappa \{ (2\kappa^2 - k^2) e^{\kappa z} - 2\kappa^2 e^{\kappa^2 z} \} \sqrt{\frac{2}{\pi \kappa r}} e^{i(m - \kappa r + \frac{1}{4}\pi)} \end{aligned} \right\} \dots (14)$$

かくて表面波の振幅は r の逆自乗根に比例して減ずること

がわかる。又波長と速度とは夫々

$$L = \frac{2\pi}{k}, \dots\dots\dots (15)$$

$$V = \frac{p}{k}, \dots\dots\dots (16)$$

で與へられる。

かくて(12)はレイリ波の速度を決定する式であつて、しかもブロムウキツチのすでに論究した式と同じであるから、彼が決論したやうに重力の影響はまづないと言へる。

次にラブ波を論じよう。即ち半無限大の弾性體に密度や弾性常數の異なる一つの付加層があると考へ、上層に相當する量にはサフィックス1を付し、下層に相當する量には2を付して區別することとする。又層の厚さを h とする。そうすると上層及下層のポテンシャルは夫々

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= (P_1 \cosh \xi z + P_1' \sinh \xi z) C_0(\xi r) e^{i\mu t} \\ A_1 &= (R_1 \cosh s_1 z + R_1' \sinh s_1 z) C_1(\xi r) e^{i\mu t} \\ A_2 &= (S_1 \cosh s_1 z + S_1' \sinh s_1 z) C_0(\xi r) e^{i\mu t} \\ \varphi_2 &= P_2 e^{\xi z} C_1(\xi r) e^{i\mu t} \\ A_{22} &= R_2 e^{\xi z} C_1(\xi r) e^{i\mu t} \\ A_{21} &= S_2 e^{\xi z} C_0(\xi r) e^{i\mu t} \end{aligned} \right\} \dots\dots (17)$$

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= P_1 e^{\xi z} C_1(\xi r) e^{i\mu t} \\ A_{22} &= R_2 e^{\xi z} C_1(\xi r) e^{i\mu t} \\ A_{21} &= S_2 e^{\xi z} C_0(\xi r) e^{i\mu t} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (18)$$

で與へられる。たゞし

$$s_1 = \xi^2 - k_1^2, \quad k_1^2 = \frac{\rho_1 p^2}{\mu_1},$$

$$s_2 = \xi^2 - k_2^2, \quad k_2^2 = \frac{\rho_2 p^2}{\mu_2},$$

である。(1)より上層及下層の變位は夫々

$$\left. \begin{aligned} \vartheta_{z1} &= - \{ \xi (P_1 \cosh \xi z + P_1' \sinh \xi z) \\ &\quad + s_1 (R_1 \sinh s_1 z + R_1' \cosh s_1 z) \} C_1(\xi r) e^{i\mu t} \\ \vartheta_{r1} &= \xi (S_1 \cosh s_1 z + S_1' \sinh s_1 z) C_1(\xi r) e^{i\mu t} \\ \vartheta_{z1} &= \xi (P_1 \sinh \xi z + P_1' \cosh \xi z + R_1 \cosh s_1 z \\ &\quad + R_1' \sinh s_1 z) C_0(\xi r) e^{i\mu t} \end{aligned} \right\} \dots\dots (19)$$

及び

$$\left. \begin{aligned} \vartheta_{rz} &= - \{ \xi P_2 e^{\xi z} + s_2 R_2 e^{\xi z} \} C_1(\xi r) e^{i\mu t} \\ \vartheta_{rz} &= \xi S_2 e^{\xi z} C_1(\xi r) e^{i\mu t} \\ \vartheta_{z2} &= \xi (P_2 e^{\xi z} + R_2 e^{\xi z}) C_0(\xi r) e^{i\mu t} \end{aligned} \right\} \dots\dots (20)$$

であることがわかり、之に相當する重力は

$$\left. \begin{aligned} \frac{z\tau_1}{\mu_1} &= - \{ 2\xi^2 (P_1 \sinh \xi z + P_1' \cosh \xi z) + (2\xi^2 \\ &\quad - k_1^2) (R_1 \cosh s_1 z + R_1' \sinh s_1 z) C_1(\xi r) e^{i\mu t} \\ \frac{z\varphi_1}{\mu_1} &= \xi s_1 (S_1 \sinh s_1 z + S_1' \cosh s_1 z) C_1(\xi r) e^{i\mu t} \\ \frac{z\tau_1}{\mu_1} &= \{ (2\xi^2 - k_1^2) (P_1 \cosh \xi z + P_1' \sinh \xi z) \end{aligned} \right\} \dots\dots (21)$$

$$+ 2\xi_0^2(R_1 \sinh s_1 z + R_1' \cosh s_1 z) \left. \begin{array}{l} \\ \times C_0(\xi r) e^{i\mu} + \frac{\rho_1}{\mu_1} g z \end{array} \right\}$$

及び

$$\left. \begin{array}{l} (21) \quad - \{ 2\xi^2 P_2 e^{\xi z} + (2\xi^2 - k_2^2) R_2 e^{\xi z} \} C_1(\xi r) e^{i\mu} \\ \mu_2 \\ (22) \quad \xi s_2 S_2 e^{\xi z} C_1(\xi r) e^{i\mu} \\ \mu_2 \\ (23) \quad \{ (2\xi^2 - k_2^2) P_2 e^{\xi z} + 2\xi s_2 R_2 e^{\xi z} \} C_0(\xi r) e^{i\mu} + \frac{\rho_2}{\mu_2} g z \end{array} \right\}$$

境界條件として二層の境界面 ($z=0$) にあつて變位の連續に對しては

$$\left. \begin{array}{l} \xi P_1 + s_1 R_1' = \xi P_2 + s_2 R_2 \\ S_1 = S_2 \\ P_1' + R_1 = P_2' + R_2 \end{array} \right\} \dots\dots\dots (23)$$

歪力の連續に對しては

$$\left. \begin{array}{l} \mu_1 \{ 2\xi^2 P_1' + (2\xi^2 - k_1^2) R_1 \} = \mu_2 \{ 2\xi^2 P_2' \\ + (2\xi^2 - k_2^2) R_2 \} \\ \mu_1 s_1 S_1' = \mu_2 s_2 S_2' \\ \mu_1 \{ (2\xi^2 - k_1^2) P_1 + 2\xi s_1 R_1' \} + \rho_1 g \xi (P_1' + R_1) \\ = \mu_2 \{ (2\xi^2 - k_2^2) P_2 + 2\xi s_2 R_2' \} + \rho_2 g \xi (P_2' + R_2) \end{array} \right\} \dots\dots\dots (24)$$

自由面 $z=l$ にあける歪力に對しては

$$\left. \begin{array}{l} 2\xi^2 (P_1 \sinh \xi l + P_1' \cosh \xi l) - (2\xi^2 \\ - k_1^2) (R_1 \cosh s_1 l + R_1' \sinh s_1 l) = 0 \\ S_1 \sinh s_1 l + S_1' \cosh s_1 l = 0 \\ (2\xi^2 - k_1^2) (P_1 \cosh \xi l + P_1' \sinh \xi l) \\ + 2\xi s_1 (R_1 \sinh s_1 l + R_1' \cosh s_1 l) \\ + \frac{\rho_1}{\mu_1} g \xi (P_1 \sinh \xi l + P_1' \cosh \xi l) \\ + R_1 \cosh s_1 l + R_1' \sinh s_1 l = 0 \end{array} \right\} \dots\dots\dots (25)$$

なる關係がなりたつ。

(23) (24) 及び (25) の夫々の第二式にあたる三つの關係式

から S_1, S_1' 及び S_2 を消去すると

$$\mu_2 s_2 \cosh s_1 l + \mu_1 s_1 \sinh s_1 l = 0 \dots\dots\dots (26)$$

となる。

この問題を限界してその實値のみをとり、且

$$k_1 > k_2 \quad \text{即ち} \quad \frac{\mu_1}{\rho_1} < \frac{\mu_2}{\rho_2}$$

詳言すれば上層における横波の速度が下層のそれよりも小なる場合をのみ考へることしよう。すると (26) の根は

$$s_1 = i s_1$$

とあらう。

$$\tan \delta f = \frac{\mu_2 \delta^2 a}{\mu_1 \delta^2 b}$$

となつて、⁽²⁾ ラブが且てラブ波を提唱したとき、速度をさめる式に到達した。

即ちラブ波の速度は z 軸のまわりに波動が對稱に起るとする限りに於ては重力の影響は全くないことがわかる。更に⁽³⁾ ラブ波についての詳しい論議は他の論文にゆづつておく。

更に⁽²³⁾、⁽²⁴⁾及び⁽²⁵⁾の夫々の第一、第三式の六つの式をとつて P_1, P_1', R_1, R_1' 及び P_2, R_2 を消去すれば付加層のあるために變形されたレイリ波の傳播速度を決定する式が得られ、之に實際値を入れると q を含む項は他の項に比して小さく、之を無視すれば⁽⁴⁾ ラブの前掲書百六十七頁所載の變形されたレイリ波の速度をさめる式を得ることができ、るがこゝには省略する。

以上結論をまとめるとレイリ波には重力の影響殆どなくラブ波には全く認め得ないといふことに盡く。

終りに岡田臺長並びに藤原先生の御勉勵に對して厚く感謝の意を表して結尾とする。

註 (1) T. J. T. A. Bromwich: On the Influence of Gravity on Elastic Waves, and, in particular, on the Vibration of an Elastic Glove,

氣象集誌 第二輯 第十卷 第十一號

Proc. London Math. Soc., Vol. XXX, p. 98 (1898).

註 (2) Love: Geodynamics, p. 162, Eq. (40).

註 (3) H. Nakano: Love Waves in Cylindrical Coordinates, Geophys. Mag., Vol. II, p. 37 (1928); H. Arakawa: Surface Waves in a Two-Layer Crust, Geophys. Mag., Vol. V, p. 123 (1932).

註 (4) Love: loc. cit., p. 167.

地形と航空

佐貫 亦男

Topography and Aerial Navigation. By M. Sanuki.

飛行機が平坦な土地より起伏する土地にさしかゐる時には其受ける空氣力學的な力に變化を生ずる。飛行機が山に向ふ時は鉛直成分即ち水平飛行の場合の揚力が減じて、水平成分即ち水平飛行機の抗力部分が増して來て、恰もつり返されるが如く、飛行機が谷を渡る時は、鉛直成分がやはり減ずるが、水平成分も減じて恰もひき込まれる如く見える。元來飛行機が地面近くを飛ぶ時は翼が地面の影響を受けて揚力は大きくなるものであるが、其量は佐々木達次郎氏谷一郎氏等の理論的研究によれば可成小さいもので普通